

## درس اول

### مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

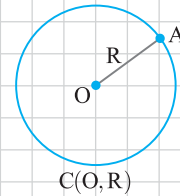
برای مشاهده خلاصه‌ای از نکات فصل اول در یک قاب، به صفحات ۵۷ تا ۵۹ رجوع کنید.

دایره یکی از شکل‌های مهم در هندسه است. با مفهوم دایره در سال‌های گذشته آشنا شده‌اید. همان‌طور که می‌دانید، همهٔ نقاط روی دایره از مرکز آن به یک فاصلهٔ ثابت هستند. آیا می‌توانید با این ویژگی دایره را تعریف کنید؟

#### دایره

مجموعهٔ همهٔ نقاطی از صفحه که از یک نقطهٔ ثابت در همان صفحه فاصله‌ای ثابت و غیرصفر دارند، دایره است. به این نقطهٔ ثابت، مرکز دایره و به فاصلهٔ ثابت، شعاع دایره گفته می‌شود.

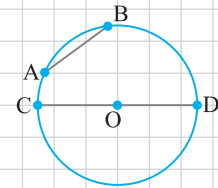
**توجه:** نمایش دایره به مرکز  $O$  و شعاع  $R$  به صورت  $C(O, R)$  است.



#### اجزای دایره

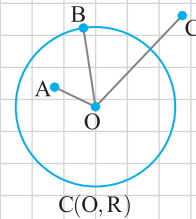
- ۱ شعاع: پاره‌خطی است که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.<sup>۱</sup>
- ۲ وتر: پاره‌خطی است که دو سر آن روی دایره باشند.
- ۳ قطر: وتری از دایره است که از مرکز دایره می‌گذرد. در واقع قطر بزرگ‌ترین وتر دایره است.
- ۴ کمان: قسمتی از دایره است که شامل دو نقطه روی دایره و همهٔ نقطه‌های بین این دو نقطه باشد.

در شکل مقابل، پاره‌خط‌های  $OC$  و  $OD$  دو شعاع دایره هستند، پاره‌خط  $AB$  یک وتر دایره است و پاره‌خط  $CD$  یک قطر دایره است. همچنین، قسمتی از دایره شامل دو نقطه  $A$  و  $B$  و همهٔ نقطه‌های بین این دو نقطه یک کمان دایره است (کمان  $AB$ ).



#### اوضاع نسبی نقطه و خط نسبت به دایره

به نظر شما نقطه و دایره، چه حالت‌هایی نسبت هم دارند؟ به سه نقطه  $A$ ،  $B$  و  $C$  در شکل مقابل توجه کنید و سعی کنید پاسخ این پرسش را بیابید.



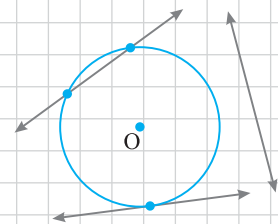
#### اوضاع نسبی نقطه و دایره

وضعیت نقطه  $A$  نسبت به دایره  $C(O, R)$  ممکن است سه گونه باشد:<sup>۲</sup>

- ۱ نقطه  $A$  درون دایره است، هرگاه فاصلهٔ آن از مرکز دایره کمتر از شعاع دایره باشد، یعنی  $OA < R$ .
- ۲ نقطه  $A$  روی دایره است، هرگاه فاصلهٔ آن از مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد، یعنی  $OA = R$ .
- ۳ نقطه  $A$  بیرون دایره است، هرگاه فاصلهٔ آن از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره باشد، یعنی  $OA > R$ .

در دایره  $C(O, R)$  در شکل بالا، نقطه  $A$  درون دایره است، پس  $OA < R$ ؛ نقطه  $B$  روی دایره است، پس  $OB = R$ ؛ و نقطه  $C$  بیرون دایره است، پس  $OC > R$ .

اکنون بگویید خط و دایره چه حالت‌هایی نسبت به هم دارند. آیا پاسخ آن مشابه حالت‌های نقطه و دایره است؟ برای یافتن پاسخ به سه خط شکل مقابل توجه کنید. تعداد نقاط برخورد هر کدام از آن‌ها با دایره چند تا است؟ همان‌طور که در شکل می‌بینید، تعداد نقاط برخورد خط و دایره می‌تواند صفر، یک یا دو باشد.



۱- طبق تعریف، شعاع یک پاره‌خط است. اما در این کتاب آن را به مفهوم اندازهٔ این پاره‌خط نیز در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال می‌گوییم دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر.

۲- در اینجا لازم است که ذکر شود نقطه و دایره در یک صفحه‌اند. در سرتاسر این کتاب همهٔ شکل‌ها در یک صفحه فرض می‌شوند و از ذکر کردن آن صرف نظر می‌کنیم.

### خط مماس و خط قاطع

۱ خط مماس: هرگاه خطی با دایره‌ای فقط یک نقطه مشترک داشته باشد، گفته می‌شود خط بر دایره مماس است.

۲ خط قاطع: هرگاه خطی با دایره‌ای دو نقطه مشترک داشته باشد، خط را نسبت به آن دایره قاطع می‌نامند. در این حالت خط و دایره را متقاطع می‌نامند.

پس خط و دایره نسبت به هم سه حالت دارند. آیا این سه حالت به فاصله مرکز دایره از خط وابسته است؟ حتماً پاسخ شما «بله» است.

### اوضاع نسبی خط و دایره

وضعیت خط  $d$  نسبت به دایره  $C(O, R)$  ممکن است سه گونه باشد:

۱ خط و دایره نقطه مشترک ندارند، هرگاه فاصله مرکز دایره از خط بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد، یعنی  $OH > R$ .

۲ خط بر دایره مماس است، هرگاه فاصله مرکز دایره از خط برابر شعاع دایره باشد، یعنی  $OH = R$ . در این حالت خط و دایره یک نقطه مشترک دارند.

۳ خط و دایره متقاطع‌اند، هرگاه فاصله مرکز دایره از خط کوچک‌تر از شعاع دایره باشد، یعنی  $OH < R$ . در این حالت خط و دایره دو نقطه مشترک دارند.

ممکن است در مورد حالت دوم بپرسید که اگر  $OH = R$ ، آن‌گاه چرا خط بر دایره مماس است؟ به مسئله زیر توجه کنید تا پاسخ برای شما واضح شود.

### مسئله ۱

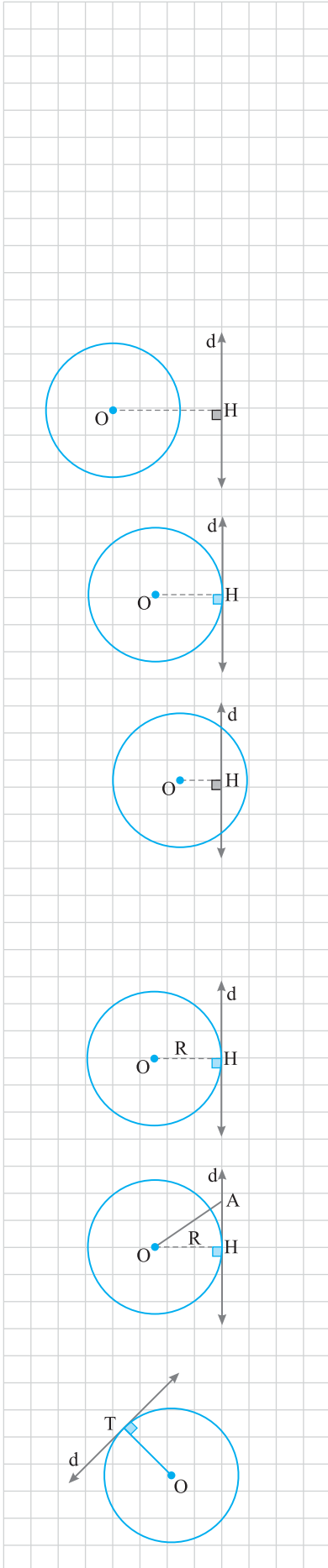
در شکل مقابل فاصله مرکز دایره  $C(O, R)$  از خط  $d$  برابر شعاع دایره است. ثابت کنید خط  $d$  بر دایره مماس است.

**راه‌حل** خط بر دایره مماس است، یعنی چه؟ یعنی خط و دایره یک نقطه مشترک دارند. پس کافی است ثابت کنیم خط و دایره غیر از  $H$  نقطه مشترک دیگری ندارند. اکنون آیا می‌توانید اثبات را تکمیل کنید؟ برای این منظور نقطه‌ای مانند  $A$  (غیر از  $H$ ) روی خط  $d$  در نظر می‌گیریم. در مثلث قائم‌الزاویه  $OAH$ ، طول وتر  $OA$  از اندازه ضلع قائم  $OH$  بزرگ‌تر است. پس  $OA > R$  و در نتیجه نقطه  $A$  روی دایره قرار ندارد و این یعنی خط  $d$  و دایره فقط در نقطه  $H$  مشترک‌اند. به بیان دیگر، خط  $d$  بر دایره  $C(O, R)$  مماس است.

توجه کنید که عکس مسئله ۱ نیز درست است. در واقع می‌توان چنین گفت:

**نتیجه** یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود باشد.

در مسئله ۱ یک طرف این نتیجه ثابت شد. اثبات طرف دیگر در تمرین مهارتی ۱ از شما خواسته شده است. در واقع می‌توان چنین نیز گفت که اگر خط  $d$  در نقطه  $T$  بر دایره  $C(O, R)$  مماس باشد، آن‌گاه نزدیک‌ترین نقطه خط  $d$  به نقطه  $O$  نقطه  $T$  است.



## زاویه‌ها در دایره

در این بخش سه زاویه اصلی مرکزی، محاطی و ظلّی و سپس دو زاویه فرعی داخلی و خارجی را در دایره معرفی می‌کنیم. البته با زاویه‌های مرکزی و محاطی در پایه‌های قبل آشنا شده‌اید. در ابتدا سه زاویه اصلی مرکزی، محاطی و ظلّی را در دایره  $C(O, R)$  تعریف می‌کنیم.

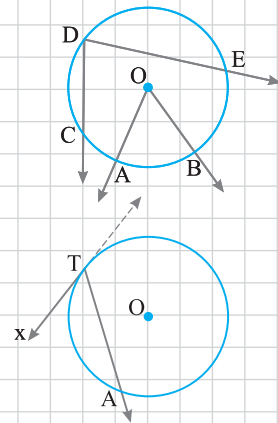
### زاویه‌های مرکزی، محاطی و ظلّی

#### زاویه‌های مرکزی، محاطی و ظلّی

۱ **زاویه مرکزی:** زاویه‌ای را که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد و دو ضلع آن شامل دو شعاع از دایره باشند، زاویه مرکزی می‌گویند (زاویه  $AOB$  در شکل مقابل).

۲ **زاویه محاطی:** زاویه‌ای را که رأس آن روی دایره و دو ضلع آن شامل دو وتر از دایره باشند، زاویه محاطی می‌گویند (زاویه  $CDE$  در شکل مقابل).

۳ **زاویه ظلّی:** زاویه‌ای را که رأس آن روی دایره قرار داشته باشد، یکی از ضلع‌های آن روی خطی مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتر از دایره باشد، زاویه ظلّی می‌گویند (زاویه  $xTA$  در شکل مقابل).



اکنون می‌خواهیم هر کدام از این سه زاویه را با کمان متناظرش مرتبط کنیم. برای این منظور در تعریف زیر به هر کمان از دایره، عددی برحسب درجه نسبت می‌دهیم.

### اندازه کمان

اندازه زاویه مرکزی مقابل به یک کمان را **اندازه آن کمان** می‌نامند.

به عنوان مثال، در دایره  $C(O, R)$  در شکل مقابل اندازه کمان  $AB$  برابر با اندازه زاویه مرکزی  $AOB$

$$\widehat{AB} = \hat{O}$$

است و بدین صورت نوشته می‌شود:

البته ممکن است در تعریف اندازه کمان اشکالی ببینید. همان‌طور که از هندسه ۱ به یاد دارید، اندازه زاویه حداکثر  $180^\circ$  است. پس آیا این تعریف برای همه کمان‌ها قابل استفاده است؟ پاسخ «خیر» است.

برای توضیح بیشتر به شکل مقابل توجه کنید. در شکل مقابل چند کمان  $AB$  مشاهده می‌کنید؟ دو کمان. اندازه کمان کوچک‌تر  $AB$  با اندازه زاویه مرکزی  $AOB$  برابر است. در مورد کمان بزرگ‌تر  $AB$  چه می‌توان گفت؟ برای نمایش کمان بزرگ‌تر  $AB$  از یک حرف کمکی استفاده می‌شود، یعنی در شکل مقابل این کمان را با  $\widehat{ACB}$  مشخص می‌کنیم که  $C$  نقطه دلخواهی روی کمان بزرگ‌تر  $AB$  است. حال این پرسش مطرح می‌شود که اندازه کمان  $ACB$  را چگونه تعریف کنیم؟ بدین صورت:

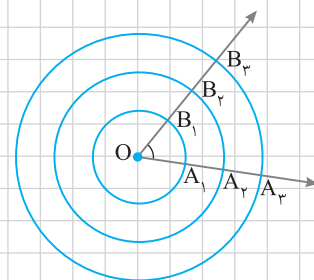
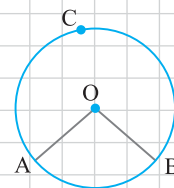
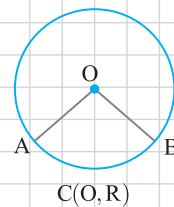
$$\widehat{ACB} = 360^\circ - \widehat{AB} = 360^\circ - \hat{O}$$

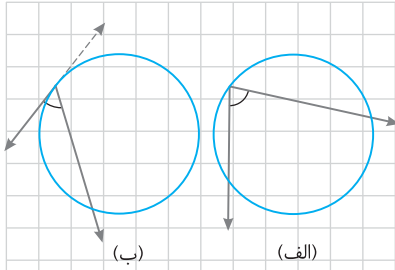
بنابراین اندازه کمان از صفر تا  $360^\circ$  درجه است.

در تعریف اندازه کمان لازم است به نکته‌ای دیگر نیز اشاره کنیم. بنابر شکل مقابل، هر سه کمان  $A_1B_1$ ،  $A_2B_2$  و  $A_3B_3$  یک اندازه دارند. بنابراین

$$\hat{O} = \widehat{A_1B_1} = \widehat{A_2B_2} = \widehat{A_3B_3}$$

اکنون که با اندازه زاویه مرکزی آشنا شدیم، می‌خواهیم در دو قضیه زیر اندازه‌های زاویه‌های محاطی و ظلّی را به اندازه کمان مقابل به آن‌ها ارتباط دهیم.





قضیه ۱

الف) اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف اندازه کمان مقابل به آن است.  
 ب) اندازه هر زاویه ظلّی برابر با نصف اندازه کمان مقابل به آن است.

در دو مسئله بعدی این قضیه را ثابت می‌کنیم.

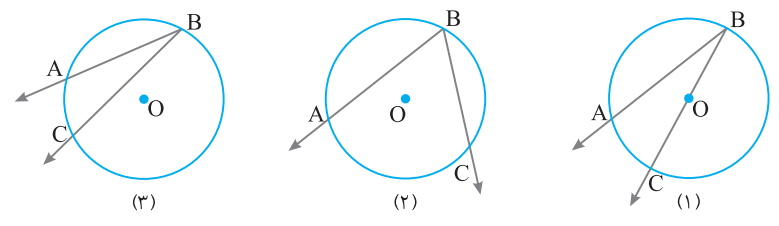
مسئله ۲

کتاب درسی

دایره  $C(O, R)$  و یک زاویه محاطی مانند زاویه  $ABC$  مفروض است. مطابق شکل‌های زیر، مرکز دایره نسبت به این زاویه سه حالت دارد:

- ۱) یک ضلع زاویه از نقطه  $O$  می‌گذرد.
- ۲) دو ضلع زاویه در دو طرف نقطه  $O$  واقع شوند.
- ۳) دو ضلع زاویه در یک طرف نقطه  $O$  واقع شوند.

در هر یک از این سه حالت، ثابت کنید اندازه زاویه محاطی  $ABC$  برابر با  $\frac{\widehat{AC}}{۲}$  است.



راه‌حل

حالت (۱): شعاع  $OA$  را رسم می‌کنیم. در مثل متساوی‌الساقین  $OAB$ ، زاویه  $AOC$  زاویه خارجی مثلث است. پس

$$\widehat{AOC} = \widehat{O_1} = \widehat{A} + \widehat{B} = ۲\widehat{B} \Rightarrow \widehat{B} = \frac{\widehat{O_1}}{۲} \Rightarrow \widehat{ABC} = \frac{\widehat{O_1}}{۲}$$

از طرفی زاویه  $O_1$  زاویه‌ای مرکزی است. در نتیجه  $\widehat{O_1} = \widehat{AC}$ . بنابراین  $\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{۲}$ .

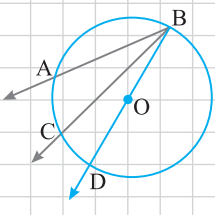
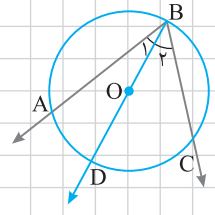
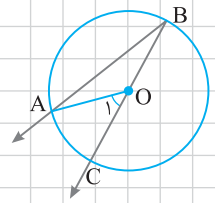
حالت (۲): از  $B$  به  $O$  وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا نیم‌خط حاصل دایره را در نقطه  $D$  قطع و زاویه  $ABC$  را به دو زاویه از نوع زاویه‌های حالت (۱) تقسیم کند. اکنون سعی کنید خودتان کار را تمام کنید.

$$\Rightarrow \text{حالت (۱)} \begin{cases} \widehat{B_1} = \frac{\widehat{AD}}{۲} \\ \widehat{B_2} = \frac{\widehat{DC}}{۲} \end{cases} \xrightarrow{+} \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DC}}{۲} \Rightarrow \widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{۲}$$

حالت (۳): در این حالت نیز از  $B$  به  $O$  وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه  $D$  قطع کند و دو زاویه از نوع زاویه‌های حالت (۱) ایجاد شوند.

$$\Rightarrow \text{حالت (۱)} \begin{cases} \widehat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{۲} \\ \widehat{CBD} = \frac{\widehat{CD}}{۲} \end{cases} \xrightarrow{-} \widehat{ABD} - \widehat{CBD} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{CD}}{۲} \Rightarrow \widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{۲}$$

توجه کنید که برای اثبات قضیه ۱ (الف) هر سه حالت این مسئله لازم است. در مسئله بعدی قضیه ۱ (ب) را ثابت می‌کنیم.



مسئله ۳

کتاب درسی

دایره  $C(O, R)$  و یک زاویه ظلی مانند زاویه  $\widehat{ATA}$  مفروض است. مطابق شکل مقابل

ثابت کنید اندازه زاویه ظلی  $\widehat{ATA}$  برابر با  $\frac{\widehat{AT}}{2}$  است.

**راه حل** روش اول (روش کتاب درسی): از  $T$  به  $O$  وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در

نقطه  $B$  قطع کند. شعاع  $OT$  در نقطه  $T$  بر خط مماس عمود است. اکنون توجه کنید که

$$\widehat{AT} = \widehat{AB}, \quad \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2 = 90^\circ = \widehat{TB}$$

$$\widehat{ATA} = \widehat{T}_1 = 90^\circ - \widehat{T}_2 = \widehat{TB} - \widehat{AB} = \widehat{AT}$$

در نتیجه

**روش دوم:** شعاع‌های  $OA$  و  $OT$  را رسم می‌کنیم. مثلث  $OAT$  متساوی‌الساقین است. پس

$\widehat{OTA} = \widehat{OAT} = \alpha$ . در نتیجه  $\widehat{AOT} = 180^\circ - 2\alpha$ . از طرفی  $\widehat{ATA} = 90^\circ - \alpha$ .

بنابراین

$$\widehat{ATA} = 90^\circ - \alpha = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = \frac{\widehat{AOT}}{2}$$

ممکن است این پرسش برای شما مطرح شود که آیا اثبات قضیه ۱ (ب) مانند اثبات قضیه ۱ (الف) سه حالت ندارد؟ پاسخ مثبت است؛ سه حالت دارد. تاکنون قضیه برای حالتی که زاویه  $\widehat{ATA}$  حاده باشد، ثابت شده است. حال می‌خواهیم دو حالت دیگر را بیان کنیم. اگر  $AT$  قطر دایره باشد،

آن‌گاه  $\widehat{ATA} = 90^\circ$  و  $\widehat{AOT} = 180^\circ$ . پس در این حالت نیز  $\widehat{ATA} = \frac{\widehat{AOT}}{2}$ .

در نهایت، اگر زاویه  $\widehat{ATA}$  منفرجه باشد، چگونه ثابت کنیم؟ بدین صورت که ابتدا از  $T$  به  $O$  وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه  $B$  قطع کند. در این صورت  $BT$  قطر دایره است و داریم

$$\widehat{ATA} = \widehat{T}_1 + \widehat{ATB} = \widehat{T}_1 + 90^\circ = \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{BT}}{2} = \frac{\widehat{AT}}{2}$$

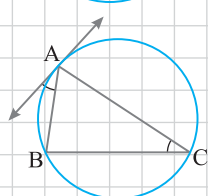
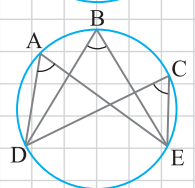
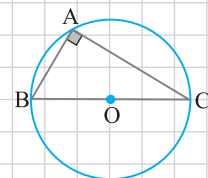
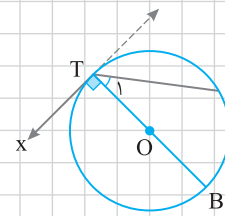
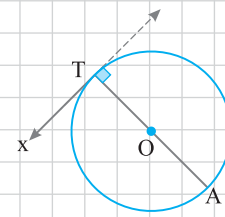
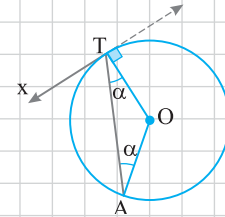
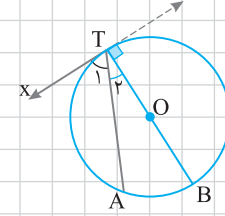
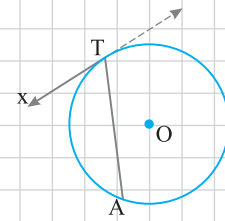
از گزاره‌هایی که ثابت کردیم چند نتیجه کاربردی به دست می‌آیند که از آن‌ها زیاد استفاده می‌کنیم.

**نتیجه** درباره اندازه‌های زاویه‌های محاطی و ظلی گزاره‌های زیر برقرارند:

(الف) اندازه زاویه محاطی روبه‌رو به قطر،  $90^\circ$  است.

(ب) زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان هم‌اندازه‌اند.

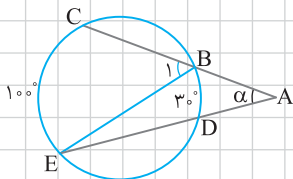
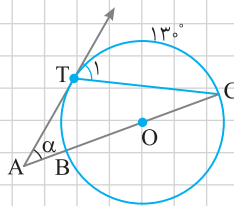
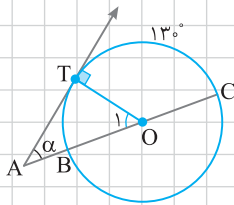
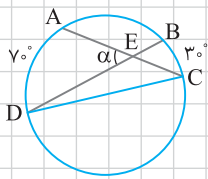
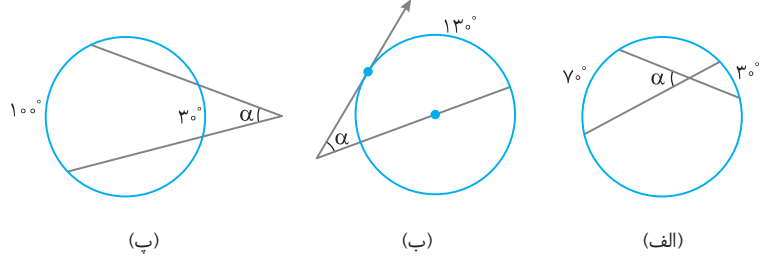
(پ) دو زاویه مشخص شده در شکل هم‌اندازه‌اند. زیرا اندازه هر دو نصف اندازه کمان  $AB$  است.



اکنون به بیان چند مسئله می‌پردازیم تا از این گزاره‌ها استفاده کنیم.

مسئله ۴

در هریک از شکل‌های زیر مقدار  $\alpha$  را به دست آورید.



**راه‌حل** الف) وتر CD را رسم می‌کنیم. سعی کنید اندازه‌های زاویه‌های مثلث CDE را به دست آورید.

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{7^\circ}{2} = 3.5^\circ \text{ (زاویه محاطی)}$$

$$\hat{D} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{3^\circ}{2} = 1.5^\circ \text{ (زاویه محاطی)}$$

از طرفی  $\alpha = \hat{C} + \hat{D} = 3.5^\circ + 1.5^\circ = 5^\circ$  پس  $\alpha = 5^\circ$  است.

ب) در این شکل AT بر دایره مماس و O مرکز دایره است. به دروش به این قسمت پاسخ می‌دهیم.  
**روش اول:** شعاع OT را رسم می‌کنیم. توجه کنید که

$$\widehat{BT} = 180^\circ - \widehat{TC} = 180^\circ - 13^\circ = 167^\circ$$

از طرفی زاویه  $O_1$  زاویه مرکزی است. پس  $\hat{O}_1 = \widehat{BT} = 167^\circ$ . اکنون می‌توان نوشت

$$\triangle AOT: \alpha = 90^\circ - \hat{O}_1 = 90^\circ - 167^\circ = -77^\circ$$

**روش دوم:** وتر TC را رسم می‌کنیم. توجه کنید که

$$\widehat{BT} = 180^\circ - \widehat{TC} = 167^\circ$$

در نتیجه

$$\hat{C} = \frac{\widehat{BT}}{2} = \frac{167^\circ}{2} = 83.5^\circ \text{ (زاویه محاطی)}$$

$$\hat{T}_1 = \frac{\widehat{TC}}{2} = \frac{13^\circ}{2} = 6.5^\circ \text{ (زاویه ظلی)}$$

در مثلث TAC، زاویه  $T_1$  زاویه خارجی مثلث است. پس

$$\hat{T}_1 = \alpha + \hat{C} \Rightarrow \alpha = \hat{T}_1 - \hat{C} = 6.5^\circ - 83.5^\circ = -77^\circ$$

پ) وتر BE را رسم می‌کنیم. آیا می‌توانید اندازه‌های زاویه‌های مثلث BAE را به دست آورید؟  
توجه کنید که

$$\hat{B}_1 = \frac{\widehat{CE}}{2} = \frac{10^\circ}{2} = 5^\circ \text{ (زاویه محاطی)}$$

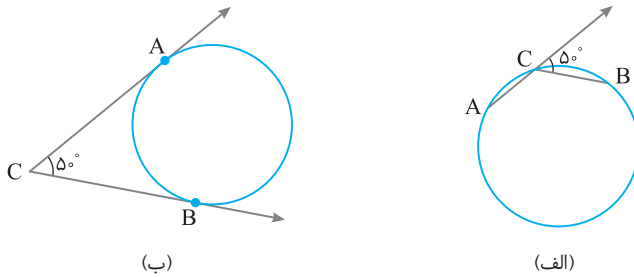
$$\hat{E} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{3^\circ}{2} = 1.5^\circ \text{ (زاویه محاطی)}$$

در مثلث BAE زاویه  $B_1$  زاویه خارجی مثلث است. پس

$$\hat{B}_1 = \alpha + \hat{E} \Rightarrow \alpha = \hat{B}_1 - \hat{E} = 5^\circ - 1.5^\circ = 3.5^\circ$$

## مسئله ۵

در هریک از شکل‌های زیر اندازه کمان  $AB$  را حساب کنید.



**راه‌حل** توجه کنید که در هریک از شکل‌ها دو کمان  $AB$  وجود دارد. همان‌طور که قبلاً گفتیم، منظور از  $\widehat{AB}$  کمان با اندازه کوچک‌تر است. برای نشان دادن کمان بزرگ‌تر از حرف سوم استفاده می‌کنیم.

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

الف) توجه کنید که

زاویه  $ACB$  محاطی است. پس

$$\widehat{ACB} = \frac{\widehat{ADB}}{2} \Rightarrow \widehat{ADB} = 2 \times 130^\circ = 260^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 360^\circ - \widehat{ADB} = 100^\circ$$

آیا می‌توانید روش دیگری برای این قسمت ارائه کنید؟

ب) برای این قسمت دو روش ارائه می‌کنیم:

**روش اول:** وتر  $AB$  را رسم می‌کنیم. دو زاویه  $A_1$  و  $B_1$  ظلی هستند. پس

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} = \alpha$$

$$\triangle ABC: 50^\circ + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 65^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 2\alpha = 130^\circ$$

بنابراین

**روش دوم:** از مرکز دایره استفاده می‌کنیم. توجه کنید که  $O$  زاویه مرکزی است و شعاع‌های  $OA$  و  $OB$  بر خط‌های مماس عمودند. آیا می‌توانید این روش را تکمیل کنید؟ می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی چهارضلعی  $CAOB$  برابر  $360^\circ$  است. پس

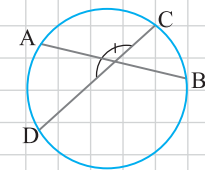
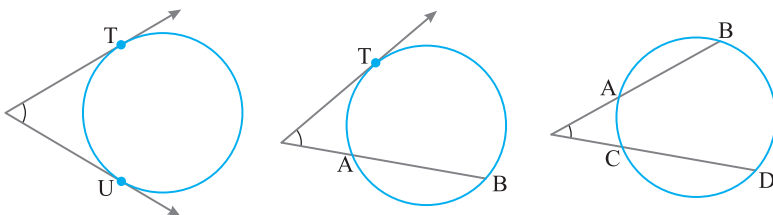
$$\hat{O} = 360^\circ - (90^\circ + 50^\circ + 90^\circ) = 130^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = \hat{O} = 130^\circ$$

## زاویه‌های داخلی و خارجی

تاکنون زاویه‌هایی را بررسی کردیم که رأس آن‌ها روی دایره باشد و در قضیه ۱ رابطه بین اندازه این زاویه‌ها را با اندازه کمان‌های نظیرشان مشخص کردیم. اکنون به بررسی این موضوع برای زاویه‌هایی می‌پردازیم که رأس آن‌ها درون یا بیرون دایره است و اضلاعشان کمان‌هایی روی دایره جدا می‌کنند: زاویه‌های داخلی و خارجی در دایره.

در شکل مقابل دو وتر  $AB$  و  $CD$  یکدیگر را درون دایره قطع کرده‌اند. به زاویه بین این دو وتر **زاویه داخلی** می‌گوییم.

به نظرتان زاویه خارجی چیست؟ به سه شکل زیر توجه کنید. به هریک از این سه زاویه، **زاویه خارجی** می‌گوییم.



حال این پرسش مطرح می‌شود که اندازه‌های زاویه‌های داخلی و خارجی چه رابطه‌ای با اندازه‌های کمان‌های متناظرشان دارد؟ آیا پاسخی برای این پرسش دارید؟ در جدول زیر این ارتباط را می‌بینید.

|                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
|                          |                          |                          |                          |
| $\alpha = \frac{a-b}{2}$ | $\alpha = \frac{a-b}{2}$ | $\alpha = \frac{a-b}{2}$ | $\alpha = \frac{a+b}{2}$ |

آیا اثبات این چهار مورد را بلدید؟ سعی کنید از دو مسئله قبل استفاده کنید و آن‌ها را ثابت کنید. در مسئله بعد، حکم را در مورد زاویه داخلی ثابت می‌کنیم. اثبات موارد دیگر را در تمرین ۲ از شما خواسته‌ایم.

مسئله ۶

در شکل مقابل ثابت کنید

کتاب درسی

$$\alpha = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$

**راه‌حل** توانستید ثابت کنید؟ حتماً خیلی از شما آن را ثابت کردید. اگر هنوز نتوانسته‌اید، کمی بیشتر فکر کنید و از ایده حل مسئله ۴ کمک بگیرید. کافی است از زاویه خارجی مثلث PAD یا مثلث PBC استفاده کنید. ما در اینجا با مثلث PAD کار می‌کنیم. پس ابتدا وتر AD را رسم می‌کنیم. توجه کنید که از طرفی دو زاویه A و D زاویه‌های محاطی در دایره‌اند. پس

$$\begin{cases} \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} \\ \hat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \hat{D} + \hat{A} = \frac{\widehat{AC}}{2} + \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$

اکنون با ایده گرفتن از این مسئله، سعی کنید موارد دیگر جدول قبل را ثابت کنید. در تمرین ۲، اثبات آن‌ها از شما خواسته شده است. در پاسخ آن تمرین، روش دیگری نیز برای این موارد بیان شده است.

**توجه** جدول ارائه شده بسیار مهم است. حتماً نتایج آن را به خاطر بسپارید و در مسئله‌های بعدی از آن‌ها استفاده کنید.

مسئله ۷

در شکل مقابل، اندازه زاویه alpha را به دست آورید.

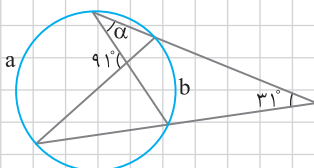
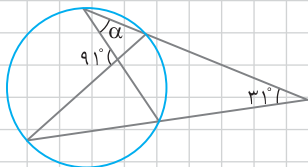
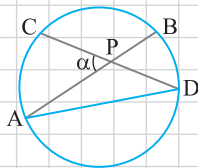
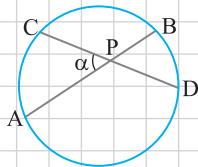
کتاب درسی

**راه‌حل** در این شکل چه نوع زاویه‌هایی می‌بینید؟ غیر از زاویه‌های محاطی، یک زاویه داخلی و یک زاویه خارجی در دایره دیده می‌شود. این‌طور نیست؟ توجه کنید که

$$\begin{cases} 91^\circ = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a+b = 182^\circ \\ 31^\circ = \frac{a-b}{2} \Rightarrow a-b = 62^\circ \end{cases} \Rightarrow a = 122^\circ, \quad b = 60^\circ$$

$$\alpha = \frac{b}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

چون alpha اندازه زاویه محاطی است، پس





## مسئله ۸

در شکل مقابل  $\widehat{AB} = 100^\circ$  و  $\widehat{C} = 40^\circ$ . اندازه کمان‌های  $AT$  و  $BT$  را به دست آورید.

**راه‌حل** زاویه  $C$  زاویه خارجی دایره است. پس

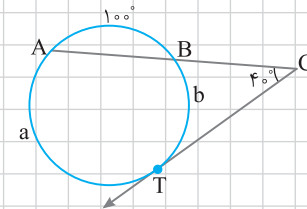
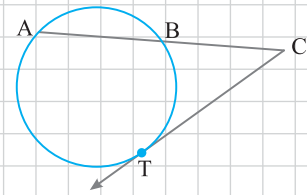
$$\widehat{C} = \frac{a-b}{2} \Rightarrow 40^\circ = \frac{a-b}{2} \Rightarrow a-b = 80^\circ$$

از طرفی مجموع اندازه‌های کمان‌های دایره  $360^\circ$  است. در نتیجه

$$a+b+100^\circ = 360^\circ \Rightarrow a+b = 260^\circ$$

پس

$$\begin{cases} a+b = 260^\circ \\ a-b = 80^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 170^\circ \Rightarrow \widehat{AT} = 170^\circ \\ b = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BT} = 90^\circ \end{cases}$$



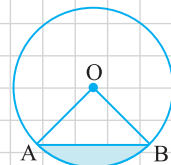
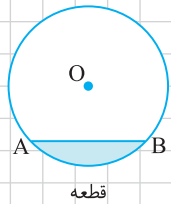
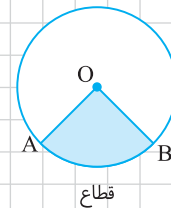
## قطع و قطعه

می‌دانید قطع چیست؟ آیا تفاوت بین قطع و قطعه را می‌دانید؟ به دو تعریف زیر دقت کنید تا به پاسخ این سؤال‌ها برسید.

## قطع و قطعه

**۱ قطع:** به ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است، قطع گفته می‌شود. در دایره  $C(O, R)$  در شکل مقابل یک قطع رنگی و یک قطع سفید دیده می‌شوند.

**۲ قطعه:** به ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به یک وتر و آن دایره محدود است، قطعه گفته می‌شود. در دایره  $C(O, R)$  در شکل مقابل یک قطعه رنگی و یک قطعه سفید دیده می‌شوند.



چه ارتباطی بین مساحت‌های قطع و قطعه وجود دارد؟ حتماً پاسخ مناسبی برای این پرسش دارید.

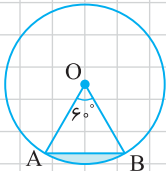
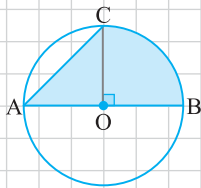
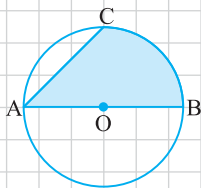
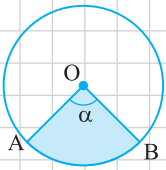
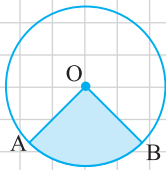
**نتیجه** در دایره  $C(O, R)$  در شکل مقابل

$$\text{مساحت مثلث } AOB = \text{مساحت قطعه} + \text{مساحت قطع } AOB$$

در ادامه این قسمت به بررسی قطع می‌پردازیم. آیا بین مساحت قطع  $AOB$  و اندازه کمان  $AB$  رابطه‌ای وجود دارد؟ همان‌طور که مشخص است، هرچه اندازه کمان بیشتر شود، مساحت قطع بیشتر می‌شود. آیا با افزایش اندازه کمان، طول آن کمان نیز افزایش می‌یابد؟ حتماً پاسخ شما «بله» است. به عنوان مثال، اگر  $\widehat{AB} = 60^\circ$ ، آن‌گاه مساحت قطع  $AOB$  چه کسری از مساحت دایره است؟

حتماً می‌گویید  $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$ . کاملاً درست است. بنابراین مساحت قطع  $AOB$  و طول کمان  $AB$

به اندازه  $\widehat{AB}$  وابسته است.



نتیجه در دایره  $C(O, R)$  در شکل مقابل

$$\frac{\widehat{AB}}{36^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}$$

$$\frac{\widehat{AB}}{36^\circ} = \frac{\text{مساحت قطاع } AOB}{\text{مساحت دایره}}$$

سعی کنید این تناسب‌ها را به خوبی درک کنید. در نکته زیر، مساحت قطاع، طول کمان و محیط قطاع بر حسب اندازه زاویه مرکزی یا اندازه کمان مشخص شده‌اند.

### نکته

در دایره  $C(O, R)$  در شکل مقابل اگر  $\widehat{AB} = \alpha$ ، آن‌گاه

$$\frac{\alpha}{36^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{2\pi R} \Rightarrow L = \text{طول کمان } AB = \frac{\alpha}{36^\circ} \times 2\pi R$$

$$\frac{\alpha}{36^\circ} = \frac{\text{مساحت قطاع } AOB}{\pi R^2} \Rightarrow S = \text{مساحت قطاع } AOB = \frac{\alpha}{36^\circ} \times \pi R^2$$

$$\text{محیط قطاع } AOB = \text{طول کمان } AB + 2R \Rightarrow \text{محیط قطاع } AOB = \frac{\alpha}{36^\circ} \times 2\pi R + 2R$$

### مسئله ۹

در دایره  $C(O, 10)$  در شکل مقابل، اندازه کمان  $AC$  برابر  $90^\circ$  است. مساحت ناحیه رنگی را حساب کنید.

**راه‌حل** توجه کنید که ناحیه رنگی قطاع نیست. آیا می‌توانید یک قطاع از آن جدا کنید؟ با رسم شعاع  $OC$ ،

ناحیه خواسته شده به یک قطاع  $90^\circ$  و یک مثلث قائم‌الزاویه تقسیم می‌شود. توجه کنید که

$$S_{OAC} = \frac{OA \times OC}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50$$

$$S_{\text{قطاع } COB} = \frac{\alpha}{36^\circ} \times \pi R^2 = \frac{90^\circ}{36^\circ} \times \pi \times 10^2 = 25\pi$$

پس مساحت ناحیه رنگی برابر  $25\pi + 50$  است.

### مسئله ۱۰

کتاب درسی

در شکل مقابل شعاع دایره برابر ۴ است. مساحت قطعه رنگی را حساب کنید.

**راه‌حل** کافی است مساحت مثلث  $AOB$  را از مساحت قطاع  $AOB$  کم کنیم:

$$\text{مساحت قطاع } AOB = \frac{\alpha}{36^\circ} \times \pi R^2 = \frac{60^\circ}{36^\circ} \times \pi \times 4^2 = \frac{16}{3}\pi$$

مثلث  $OAB$  متساوی‌الاضلاع با طول ضلع  $R$  است. در نتیجه

$$S_{OAB} = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$$

بنابراین مساحت قطعه رنگی برابر  $\frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}$  است.

## درس اول

### تمرین‌های تشریحی

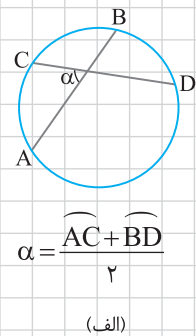
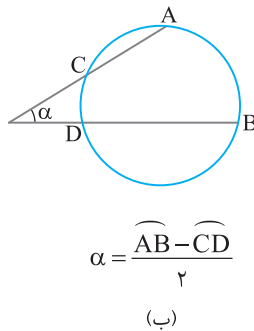
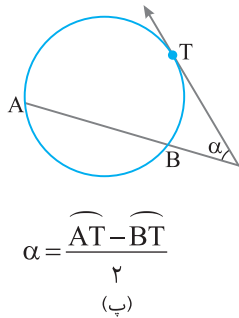
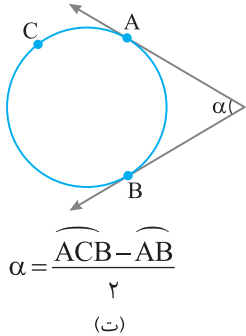
کتاب درسی

۱ جاهای خالی را پر کنید.

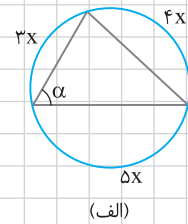
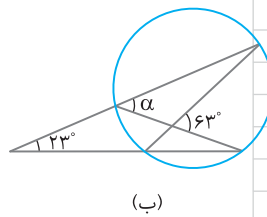
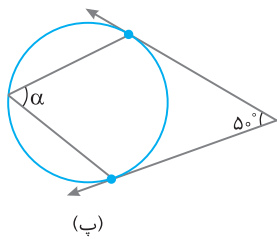
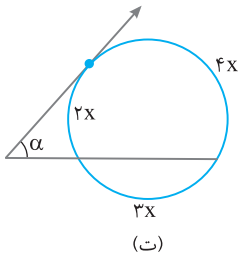
- الف) نقطه A درون دایره C(O, R) است هرگاه .....  
 ب) خط l بر دایره C(O, R) مماس است هرگاه .....  
 پ) نقطه A روی دایره C(O, R) است هرگاه .....  
 ت) خط l با دایره C(O, R) متقاطع است هرگاه .....

کتاب درسی

۲ در هریک از شکل‌های زیر حکم خواسته شده را ثابت کنید.



۳ در هریک از شکل‌های زیر، مقدار alpha را به دست آورید.

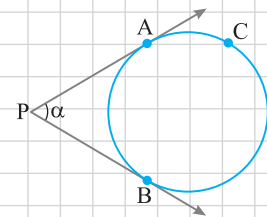


۴ در دایره C(O, R)،  $\widehat{AB} = 60^\circ$  و  $AB = 10$ . فاصله O از وتر AB را به دست آورید.

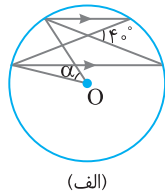
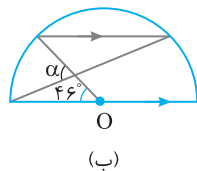
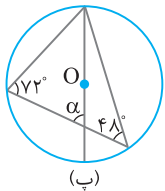
کتاب درسی

۵ در شکل مقابل ثابت کنید

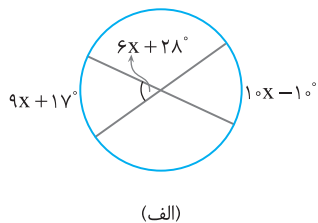
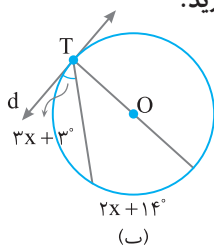
$$\widehat{AB} = 180^\circ - \alpha, \quad \widehat{ACB} = 180^\circ + \alpha$$



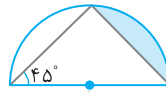
۶ در دایره C(O, R) در شکل‌های زیر، مقدار alpha را به دست آورید.



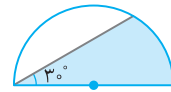
۷ در هریک از شکل‌های زیر مقدار x را به دست آورید.



۸. شعاع نیم‌دایره‌های زیر برابر ۱۲ است. در هر کدام مساحت ناحیه رنگی را حساب کنید.

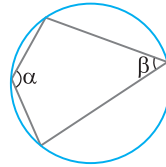


(ب)



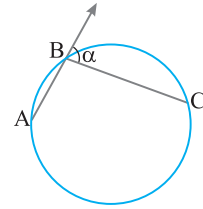
(الف)

۹. در هر یک از شکل‌های زیر حکم خواسته شده را ثابت کنید.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

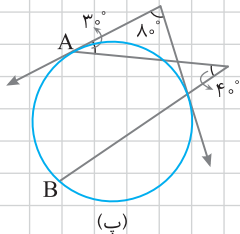
(ب)



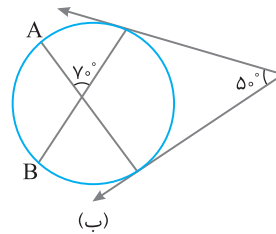
$$\alpha = \frac{\widehat{ABC}}{2}$$

(الف)

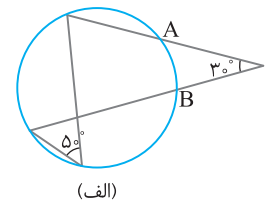
۱۰. در هر یک از شکل‌های زیر اندازه کمان AB را به دست آورید.



(ب)



(ب)

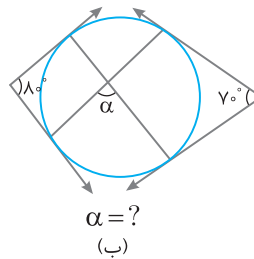


(الف)

۱۱. فاصله وتر AB در دایره  $C(O, 10)$  از مرکز آن برابر  $5\sqrt{3}$  است. طول کمان AB چقدر است؟

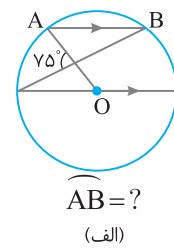
کتاب درسی

۱۲. در شکل‌های زیر مقدار خواسته شده را حساب کنید.



$$\alpha = ?$$

(ب)

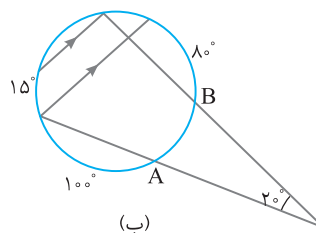


$$\widehat{AB} = ?$$

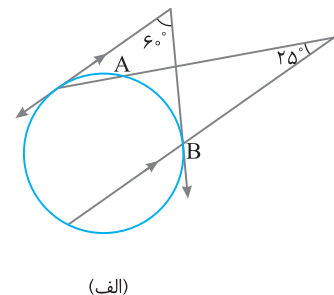
(الف)

۱۳. اگر طول کمان AB در دایره‌ای یک‌چهارم اندازه قطر این دایره و مساحت قطاع کمان AB برابر ۲۵ باشد، محیط این قطاع چقدر است؟

۱۴. در هر یک از شکل‌های زیر اندازه کمان AB را به دست آورید.



(ب)

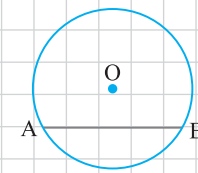
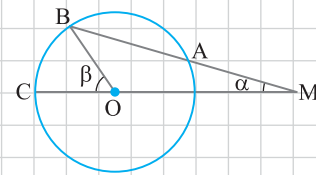


(الف)

۱۵. طول دو وتر از دایره‌های ۲۲ و ۲۸ است. اگر فاصله مرکز دایره از یکی از وترها دو برابر فاصله مرکز دایره از دیگری باشد، شعاع دایره چقدر است؟

۱۶- دایره  $C(O, R)$  مفروض است. از نقطه  $M$  در خارج دایره قاطعی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه  $A$  و  $B$  قطع کرده است. اگر  $MA = R$ ، نشان دهید  $\beta = 3\alpha$ .

کتاب درسی



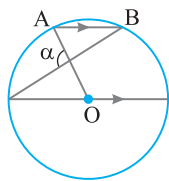
۱۷- (نکته‌های الف)، (ب) و (پ) در دایره  $C(O, R)$  در شکل مقابل نشان دهید

الف)  $\widehat{AB} = 60^\circ \Leftrightarrow AB = R$  (الف)

ب)  $\widehat{AB} = 90^\circ \Leftrightarrow AB = \sqrt{2}R$  (ب)

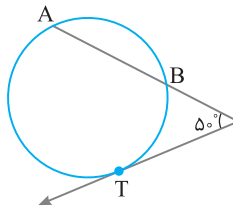
پ)  $\widehat{AB} = 120^\circ \Leftrightarrow AB = \sqrt{3}R$  (پ)

۱۸- در دایره‌های  $C(O, R)$  در شکل‌های زیر، با توجه به فرض داده شده مورد خواسته شده را به دست آورید.



$AB = R \Rightarrow \alpha = ?$

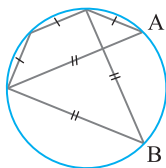
(ب)



$AB = \sqrt{2}R \Rightarrow \widehat{AT} = ?$

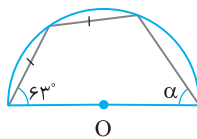
(الف)

۱۹- در هریک از شکل‌های زیر مورد خواسته شده را حساب کنید.



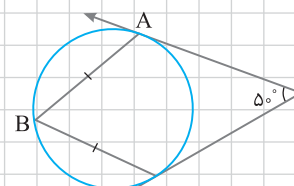
$\widehat{AB} = ?$

(ب)



$\alpha = ?$

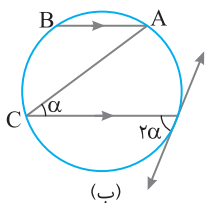
(ب)



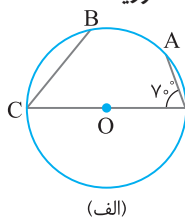
$\widehat{AB} = ?$

(الف)

۲۰- در دایره‌های  $C(O, R)$  در شکل‌های زیر،  $AB = R$ . در هر کدام اندازه کمان BC را به دست آورید.

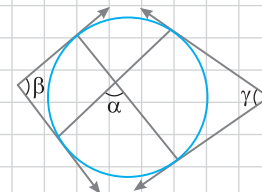


(ب)

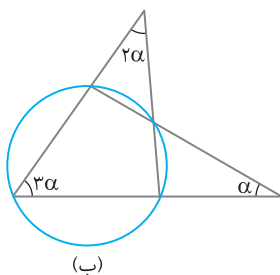


(الف)

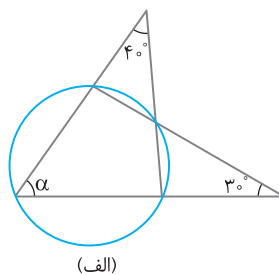
۲۱- با توجه به شکل مقابل نشان دهید  $\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$ .



۲۲- در هر شکل مقدار  $\alpha$  را به دست آورید.



(ب)



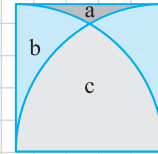
(الف)

## تمرین‌های مهارتی

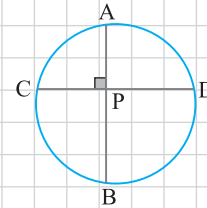
صفحات پاسخ: ۲۱۲ تا ۲۲۰

۱- قضیه خط مماس (قضیه خط مماس) نشان دهید خط  $d$  در نقطه  $T$  بر دایره  $C(O, R)$  مماس است اگر و تنها اگر  $OT$  بر  $d$  عمود باشد.

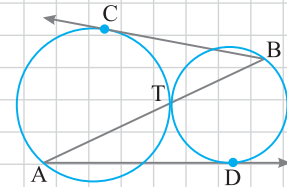
۲- در شکل مقابل دو ربع دایره رسم شده است. اگر طول ضلع مربع  $۱۰$  باشد، مساحت هریک از ناحیه‌های مشخص شده را به دست آورید.



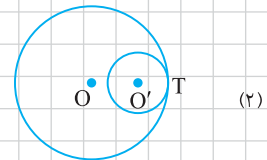
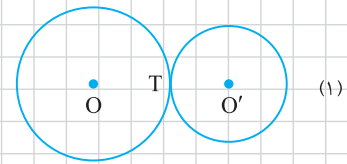
۳- دو وتر  $AB$  و  $CD$  در دایره  $C(O, R)$  بر هم عمودند. نشان دهید الف) امتداد میانه  $PM$  از مثلث  $PAD$  بر  $BC$  عمود است. ب)  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 = 4R^2$



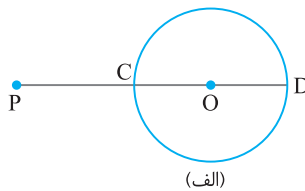
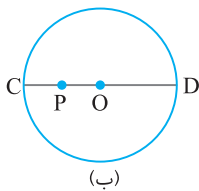
۴- در شکل مقابل دو دایره در نقطه  $T$  مماس خارج‌اند. ثابت کنید  $AB^2 = BC^2 + AD^2$



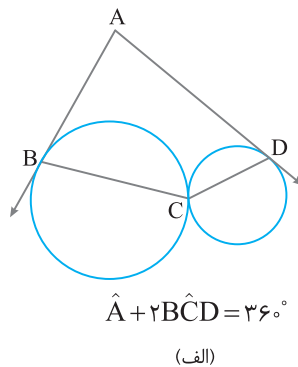
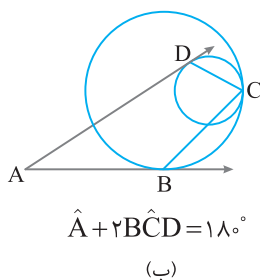
۵- دو دایره  $C(O, R)$  و  $C(O', R')$  در نقطه  $T$  بر هم مماس‌اند. در هر دو شکل زیر نشان دهید الف)  $O, O', T$  روی یک خط‌اند. ب) در نقطه مشترک دو دایره، یک خط بر هر دو مماس است.



۶- مطابق شکل‌های زیر دایره  $C(O, R)$  مفروض است. در هریک از دو حالت ثابت کنید نزدیک‌ترین نقطه دایره به  $P$  نقطه  $C$  و دورترین نقطه دایره از  $P$  نقطه  $D$  است.



۷- در هریک از شکل‌های زیر حکم خواسته شده را ثابت کنید.



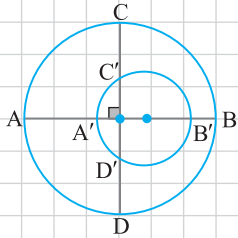
۸. طول خط‌المركزين دو دایره متخارج برابر  $d$  است. اگر اندازه زاویه بین دو مماس مشترک داخلی این دو دایره  $2\alpha$  و اندازه زاویه بین دو مماس مشترک خارجی این دو دایره  $2\beta$  باشد، نشان دهید

(الف) طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر  $d \cos \alpha$  است.

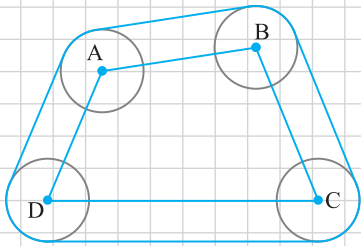
(ب) طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر  $d \cos \beta$  است.

۹. در شکل قطر  $AB$  از مرکز دایره کوچک می‌گذرد و بر قطر  $CD$  عمود است. اگر  $AA' = a$ ،  $BB' = b$  و  $CC' = c$  و شعاع دایره بزرگ  $R$  باشد، ثابت کنید

$$R = \frac{ab - c^2}{a + b - 2c}$$



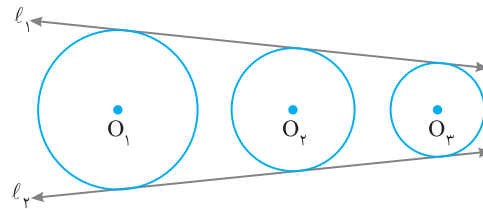
۱۰. چهار دایره با شعاع برابر و به مراکز رأس‌های چهارضلعی  $ABCD$  مطابق شکل مقابل رسم شده‌اند. این چهار دایره با نخ به هم بسته شده‌اند. ثابت کنید طول نخ برابر با مجموع محیط یک دایره و محیط چهارضلعی است.



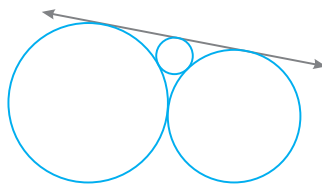
۱۱. مطابق شکل زیر، دو خط  $l_1$  و  $l_2$  بر سه دایره  $C(O_1, R_1)$ ،  $C(O_2, R_2)$  و  $C(O_3, R_3)$  مماس‌اند. نشان دهید

$$\frac{O_1 O_2}{O_2 O_3} = \frac{R_1 - R_2}{R_2 - R_3}$$

نشان دهید.

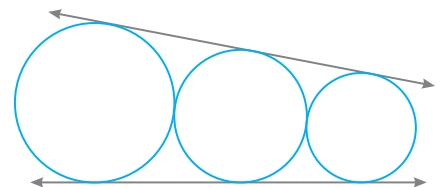


۱۲. در هر یک از شکل‌های زیر سه دایره به شعاع‌های  $R_1 > R_2 > R_3$  رسم شده‌اند. در هر کدام حکم خواسته شده را ثابت کنید.



$$\frac{1}{\sqrt{R_2}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_3}}$$

(ب)



$$R_2 = \sqrt{R_1 R_3}$$

(الف)

۱۳. دو دایره  $C(O, R)$  و  $C(O', R')$  در نقطه  $T$  مماس درون هستند. حکم‌های زیر را ثابت کنید.

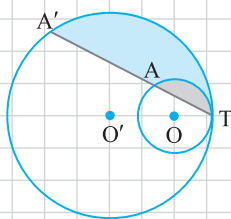
(ب)  $OA \parallel O'A'$

(الف)  $\widehat{TA} = \widehat{TA'}$

(ت)  $\frac{\text{طول کمان } TA}{\text{طول کمان } TA'} = \frac{R}{R'}$

(پ)  $\frac{TA}{TA'} = \frac{R}{R'}$

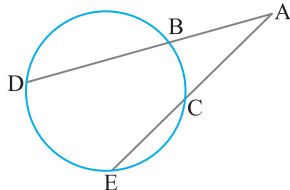
(ث)  $\frac{\text{مساحت ناحیه خاکستری}}{\text{مساحت ناحیه آبی}} = \frac{R^2}{R'^2 - R^2}$



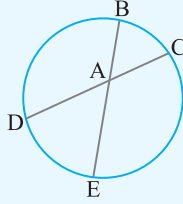
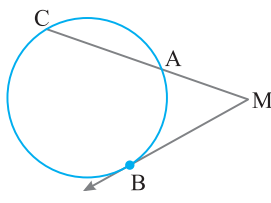
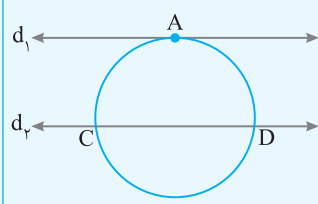
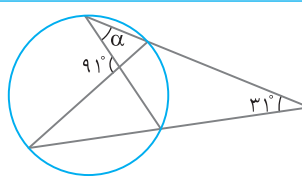
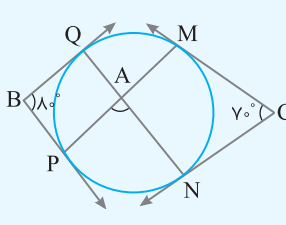
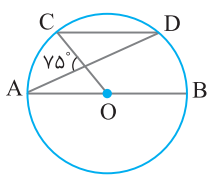
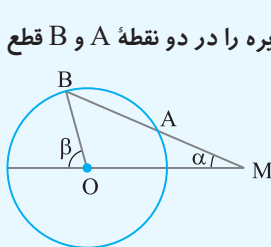
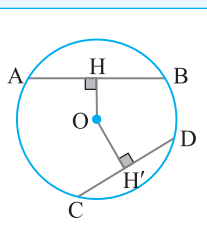
## سوالات امتحانی با رمبندی شده

صفحات پاسخ: ۲۲۱ تا ۲۲۶

| ردیف | سوالات  | بارم |
|------|---|------|
| ۱    | <p>درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) هر مستطیل محاطی است.</p> <p>ب) هر ذوزنقه متساوی‌الساقین، محاطی است.</p> <p>پ) هر مثلث، هم محاطی است و هم محیطی.</p> <p>ت) هر لوزی محیطی است.</p> <p>ث) هر ذوزنقه محاطی، متساوی‌الساقین است.</p> <p>ج) هر متوازی‌الاضلاع محاطی است.</p> <p>چ) هر کایت محیطی است.</p> <p>ح) هر چندضلعی منتظم، هم محاطی است و هم محیطی.</p>  | ۲    |
| ۲    | <p>جاهای خالی را با عبارات یا عددهای مناسب پر کنید.</p> <p>الف) اگر نقطه‌ای خارج دایره باشد، آن‌گاه فاصله آن تا مرکز دایره ..... شعاع دایره است.</p> <p>ب) اگر نقطه‌ای درون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره ..... شعاع دایره است.</p> <p>پ) در دایره <math>C(O, R)</math> نقطه <math>A</math> روی دایره است هرگاه ..... .</p> <p>ت) اگر فاصله خط از مرکز دایره با شعاع دایره برابر باشد، خط و دایره ..... .</p> <p>ث) اگر فاصله خط از مرکز دایره کمتر از شعاع باشد، خط و دایره ..... نقطه اشتراک دارند.</p> <p>ج) یک چندضلعی را ..... می‌نامند هرگاه دایره‌ای بر همه ضلع‌های آن ..... باشد.</p> <p>چ) در چندضلعی‌های محیطی، مرکز دایره محاطی محل هم‌رسی ..... است.</p> <p>ح) در چندضلعی‌های محاطی، مرکز دایره محیطی محل هم‌رسی ..... است.</p> <p>خ) طول مماس مشترک داخلی دو دایره <math>C(O, ۳)</math> و <math>C(O', ۴)</math> که <math>OO' = ۱۰</math>، برابر ..... است.</p> <p>د) طول مماس مشترک خارجی دو دایره <math>C(O, ۲)</math> و <math>C(O', ۳)</math> که <math>OO' = ۷</math>، برابر ..... است.</p> <p>ذ) در یک چندضلعی محیطی با مساحت <math>۲۰</math> و محیط <math>۵</math>، شعاع دایره محاطی برابر ..... است.</p> <p>ر) اگر اندازه کمانی در دایره‌ای به شعاع <math>۶</math> برابر <math>۶۰^\circ</math> باشد، طول آن کمان ..... است.</p> <p>ز) مساحت قطاع <math>۴۵^\circ</math> از دایره‌ای به شعاع <math>۱۲</math> برابر ..... است.</p> <p>ژ) در دایره <math>C(O, R)</math>، <math>\widehat{AB} = ۶۰^\circ</math> و <math>AB = ۱۰</math>. فاصله <math>O</math> از وتر <math>AB</math> برابر ..... است.</p> | ۳/۷۵ |
| ۳    | <p>فرض کنید اندازه‌های کمان‌های <math>AB</math> و <math>CD</math> از دایره <math>C(O, R)</math> با هم برابرند. نشان دهید اندازه‌های وترهای <math>AB</math> و <math>CD</math> نیز با هم برابرند.</p>   | ۱/۲۵ |
| ۴    | <p>فرض کنید دو وتر <math>AB</math> و <math>CD</math> از یک دایره هم‌اندازه‌اند. ثابت کنید اندازه‌های کمان‌های <math>AB</math> و <math>CD</math> نیز برابرند.</p>  | ۱/۲۵ |
| ۵    | <p>نشان دهید دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند، با هم موازی‌اند اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشند.</p>  | ۱/۲۵ |
| ۶    | <p>قطر <math>CD</math> از دایره‌ای کمان <math>AB</math> از آن را نصف کرده است. نشان دهید <math>CD</math> بر <math>AB</math> عمود است و کمان <math>AB</math> را نصف می‌کند.</p>  | ۱/۲۵ |
| ۷    | <p>با توجه به شکل مقابل نشان دهید</p> $\hat{A} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{۲}$   | ۱    |



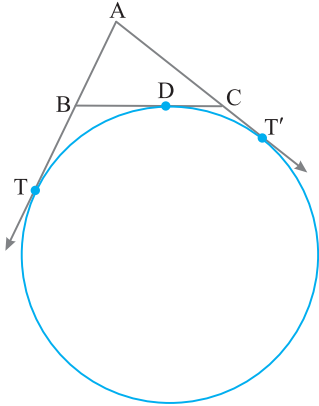
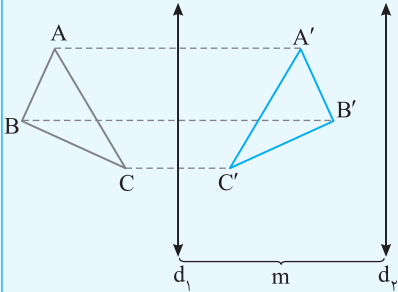


|      |   |  |    |
|------|---|--|----|
| ۱/۲۵ |  $\widehat{DAE} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{2}$ | با توجه به شکل مقابل نشان دهید   | ۸  |
| ۱    |  $\widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$   | در شکل مقابل MB بر دایره مماس است. نشان دهید   | ۹  |
| ۱    |  $\widehat{AC} = \widehat{AD}$                           | در شکل مقابل اگر $d_1$ بر دایره مماس باشد و $d_1 \parallel d_2$ ، نشان دهید $\widehat{AC} = \widehat{AD}$ .  | ۱۰ |
| ۱    |   | در شکل مقابل مقدار $\alpha$ را به دست آورید.   | ۱۱ |
| ۱/۲۵ |    | در شکل اضلاع دو زاویه B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه A چند درجه است؟  | ۱۲ |
| ۱/۲۵ |    | در دایره رسم شده در شکل مقابل، $AB \parallel CD$ . اندازه کمان CD را به دست آورید.   | ۱۳ |
| ۱/۵  |    | دایره $C(O, R)$ مفروض است. از نقطه M خارج دایره خطی چنان رسم کرده ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$ . نشان دهید $\beta = 3\alpha$ . | ۱۴ |
| ۱/۵  |    | در دایره $C(O, R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$ .   | ۱۵ |

## امتحان نوبت اول (۱)

صفحات پاسخ: ۲۸۲ و ۲۸۳

| ردیف | سوالات  | بارم |
|------|---|------|
| ۱    | درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.<br>الف) هر کایت محاطی است.<br>ب) هر ذوزنقهٔ محیطی، متساوی‌الساقین است.<br>پ) هر مثلث، هم محاطی است و هم محیطی.<br>ت) هر نقطه روی محور بازتاب، نقطهٔ ثابت تبدیل است.  | ۱    |
| ۲    | جاهای خالی را با عبارت‌ها یا عددهای مناسب پر کنید.<br>الف) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره با شعاع دایره برابر باشد، خط و دایره .....<br>ب) در چندضلعی‌های محاطی، مرکز دایرهٔ محیطی محل هم‌رسی ..... است.<br>پ) در بازتاب نسبت به خط $d$ ، تبدیل‌یافتهٔ هر نقطه روی خط $d$ ..... است.<br>ت) در دوران اگر تصویر نقطهٔ $A$ نقطهٔ $A'$ باشد، عمود منصف پاره‌خط $AA'$ از ..... می‌گذرد.<br>ث) تبدیلی که طول هر پاره‌خط را حفظ می‌کند، ..... نامیده می‌شود.<br>ج) در یک چندضلعی محیطی با مساحت ۲۰ و محیط ۵، شعاع دایرهٔ محاطی برابر ..... است.<br>چ) مساحت قطاع $۴۵^\circ$ از دایره‌ای به شعاع ۱۲ برابر ..... است.<br>ح) دوران با زاویهٔ $۶۰^\circ$ ..... نقطهٔ ثابت تبدیل دارد. | ۲    |
| ۳    | نشان دهید دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند، با هم موازی‌اند اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشند.   | ۱/۲۵ |
| ۴    | با توجه به شکل مقابل نشان دهید<br>$\hat{A} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{۲}$   | ۱    |
| ۵    | در دایرهٔ رسم شده در شکل مقابل، $AB \parallel CD$ . اندازهٔ کمان $CD$ را به دست آورید.  | ۱/۷۵ |
| ۶    | طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن‌ها مساوی $۳\sqrt{۷}$ ، طول مماس مشترک داخلی آن‌ها مساوی $\sqrt{۱۵}$ و طول خط‌المركزین آن‌ها مساوی ۸ است.   | ۱/۵  |
| ۷    | قضیه: هرگاه $M$ نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از $M$ مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازهٔ مماس برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعهٔ قاطع.  | ۱/۷۵ |
| ۸    | هرگاه از نقطهٔ $M$ خارج از دایرهٔ $C(O, R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم و نقاط تماس $T$ و $T'$ باشند، ثابت کنید $MT = MT'$ .  | ۱    |
| ۹    | از نقطهٔ $P$ در خارج دایره‌ای، مماس $PA$ به طول $۱۰\sqrt{۳}$ را بر آن رسم کرده‌ایم ( $A$ روی دایره است). همچنین خطی از $P$ گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ $B$ و $C$ قطع کرده است و $BC = ۲۰$ . طول‌های $PB$ و $PC$ را به دست آورید.  | ۱/۲۵ |
| ۱۰   | در مثلث $ABC$ اگر $h_a, h_b, h_c$ اندازهٔ ارتفاع‌ها باشد، نشان دهید<br>$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$  | ۱/۲۵ |

|      |  |                    |
|------|--|--------------------|
| ۱/۵  |  <p>در شکل مقابل، دایره محاطی خارجی مثلث ABC رسم شده است. نشان دهید <math>AT = AT' = p</math></p>   | ۱۱                 |
| ۰/۵  | <p>جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید.<br/>                 الف) بازتاب شیب خط را .....<br/>                 ب) در بازتاب، قرینه قرینه هر نقطه ..... است.</p>   | ۱۲                 |
| ۱/۵  | <p>در حالتی که پاره خط AB با بردار <math>\vec{v}</math> موازی نباشد، نشان دهید اگر <math>A'B'</math> انتقال یافته <math>AB</math> تحت بردار <math>\vec{v}</math> باشد، آن گاه AB و <math>A'B'</math> هم اندازه اند.</p>  | ۱۳                 |
| ۱/۵  |  <p>در شکل، <math>d_1</math> به موازات <math>d_2</math> و به فاصله <math>m</math> از آن قرار دارد و مثلث <math>A'B'C'</math> بازتاب مثلث <math>ABC</math> نسبت به خط <math>d_1</math> است. بازتاب مثلث <math>A'B'C'</math> را نسبت به خط <math>d_2</math> رسم کنید و آن را مثلث <math>A''B''C''</math> بنامید.<br/>                 الف) نشان دهید <math>AA'' = 2m</math>.<br/>                 ب) اندازه <math>BB''</math> و <math>CC''</math> چقدر است؟<br/>                 پ) با چه تبدیلی می توان مثلث <math>A''B''C''</math> را تصویر مثلث <math>ABC</math> دانست؟ چه نتیجه ای می گیرید؟</p> | ۱۴                 |
| ۱/۲۵ | <p>نقطه A به فاصله <math>2\sqrt{6}</math> از خط <math>d</math> قرار دارد. تصویر نقطه A را تحت بازتاب نسبت به خط <math>d</math> نقطه <math>A'</math> می نامیم. نقطه A را حول نقطه <math>A'</math> به اندازه <math>120^\circ</math> درجه دوران می دهیم تا نقطه <math>A''</math> حاصل شود. طول پاره خط <math>AA''</math> را محاسبه کنید.</p>  | ۱۵                 |
| ۲۰   | <p>جمع بارم</p>  | موفق و پیروز باشید |

فصل اول

پاسخ تمرین‌های تشریحی

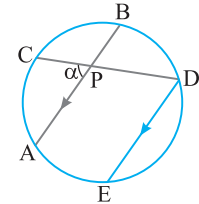


۱ الف) نقطه A درون دایره C(O, R) است هرگاه  $OA < R$ .  
 ب) خط l بر دایره C(O, R) مماس است هرگاه فاصله O از l برابر R باشد.  
 پ) نقطه A روی دایره C(O, R) است هرگاه  $OA = R$ .

ت) خط l با دایره C(O, R) متقاطع است هرگاه فاصله O از l کمتر از R باشد.  
 ۲ هر کدام را با دو روش ثابت می‌کنیم. هر دو روش در کتاب درسی آمده‌اند.  
 الف) روش اول (با زاویه خارجی مثلث): این روش در مسئله ۶ درس‌نامه بیان شده است.  
 روش دوم (با استفاده از خط موازی): از D خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه E قطع کند. بنابراین قضیه خطوط موازی و مورب،

$AB \parallel ED, \text{ مورب } CD \Rightarrow \hat{D} = \hat{P} = \alpha, \quad AB \parallel ED \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BD}$   
 در مورد مجموع اندازه‌های دو کمان AC و BD که در حکم آمده است، چه می‌توان گفت؟ چون  $\hat{D}$  زاویه محاطی است، پس  $\hat{D} = \frac{\widehat{CE}}{2}$  و در نتیجه

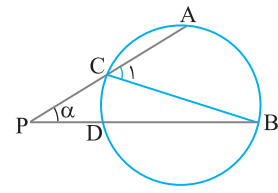
$$\alpha = \hat{D} = \frac{\widehat{CE}}{2} = \frac{\widehat{CA} + \widehat{AE}}{2} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$



ب) روش اول (با زاویه خارجی مثلث): وتر BC را رسم می‌کنیم.  
 $\triangle CPB: \hat{C}_1 = \hat{P} + \hat{B} \Rightarrow \alpha = \hat{C}_1 - \hat{B}$

دو زاویه  $C_1$  و B زاویه‌های محاطی هستند. پس

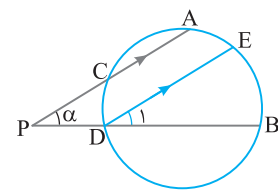
$$\begin{cases} \hat{C}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \hat{B} = \frac{\widehat{CD}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \hat{C}_1 - \hat{B} = \frac{\widehat{AB}}{2} - \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$



روش دوم (با استفاده از خط موازی): از D خطی موازی AC رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه E قطع کند. بنابراین قضیه خطوط موازی و مورب،

$AP \parallel ED, \text{ مورب } PB \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{P} = \alpha, \quad AC \parallel ED \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{CD}$   
 حال دوباره به حکم مسئله توجه کنید. تفاضل دو کمان AB و CD چه کماتی است؟ چون زاویه  $D_1$  زاویه محاطی است، پس  $\hat{D}_1 = \frac{\widehat{BE}}{2}$  و در نتیجه

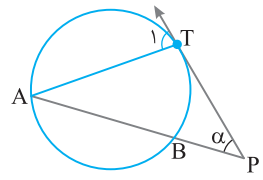
$$\alpha = \hat{D}_1 = \frac{\widehat{BE}}{2} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AE}}{2} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$



پ) روش اول (با زاویه خارجی مثلث): وتر AT را رسم می‌کنیم.

$$\triangle TAP: \hat{T}_1 = \hat{A} + \hat{P} \Rightarrow \alpha = \hat{T}_1 - \hat{A}$$

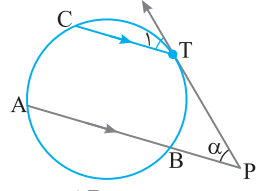
$$\begin{cases} \hat{T}_1 = \frac{\widehat{AT}}{2} \text{ (زاویه ظلّی)} \\ \hat{A} = \frac{\widehat{BT}}{2} \text{ (زاویه محاطی)} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \hat{T}_1 - \hat{A} = \frac{\widehat{AT}}{2} - \frac{\widehat{BT}}{2} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2}$$



روش دوم (با استفاده از خط موازی): از T خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه C قطع کند.

$TC \parallel PA, \text{ مورب } PT \Rightarrow \hat{T}_1 = \hat{P} = \alpha, \quad TC \parallel BA \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BT}$   
 توجه کنید که زاویه  $T_1$  زاویه ظلّی است. پس  $\hat{T}_1 = \frac{\widehat{TC}}{2}$  و در نتیجه

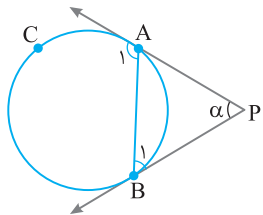
$$\alpha = \hat{T}_1 = \frac{\widehat{TC}}{2} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2}$$



ت) روش اول (با زاویه خارجی مثلث): وتر AB را رسم می‌کنیم.

$\triangle PAB: \hat{A}_1 = \hat{B}_1 + \hat{P} \Rightarrow \alpha = \hat{A}_1 - \hat{B}_1$   
 در مورد  $\hat{B}_1$  و  $\hat{A}_1$  چه می‌توان گفت؟ چه نوع زاویه‌ای هستند؟

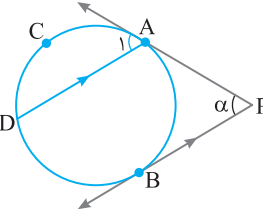
$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \frac{\widehat{ACB}}{2} \text{ (زاویه ظلّی)} \\ \hat{B}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} \text{ (زاویه ظلّی)} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \hat{A}_1 - \hat{B}_1 = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2}$$



روش دوم (با استفاده از خط موازی): از A خطی موازی PB رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه D قطع کند.

$AD \parallel PB, \text{ مورب } PA \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{P} = \alpha, \quad AD \parallel PB \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{DB}$   
 چون  $\hat{A}_1$  زاویه ظلّی است، پس  $\hat{A}_1 = \frac{\widehat{AD}}{2}$  و در نتیجه

$$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{ADB} - \widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2}$$

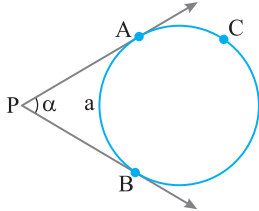


۵] نتیجه این تمرین را به خاطر بسپارید چون پرکاربرد است. ما با دو روش آن را حل می‌کنیم. فرض کنید  $\widehat{AB} = a$ .

روش اول (با زاویه خارجی در دایره):

$$\alpha = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2} = \frac{(36^\circ - a) - a}{2} = \frac{36^\circ - 2a}{2} = 18^\circ - a$$

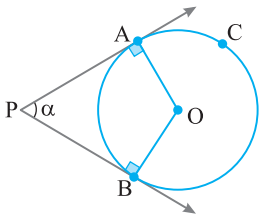
در نتیجه  $\widehat{ACB} = 36^\circ - a = 18^\circ + \alpha$  و  $\widehat{AB} = a = 18^\circ - \alpha$



روش دوم: دو شعاع OA و OB را رسم می‌کنیم. این شعاع‌ها بر خط‌های مماس عمودند. مجموع اندازه‌های زوایای داخلی چهارضلعی PAOB را در نظر می‌گیریم:

$$\hat{O} + 90^\circ + \alpha + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \hat{O} = 180^\circ - \alpha$$

زاویه O زاویه مرکزی است. در نتیجه  $\widehat{AB} = \hat{O} = 180^\circ - \alpha$ . بنابراین  $\widehat{ACB} = 360^\circ - \widehat{AB} = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) = 180^\circ + \alpha$

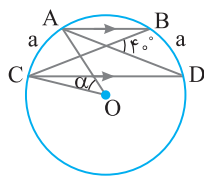


۶] الف) از موازی بودن دو وتر AB و CD چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = a$$

آیا زاویه داخلی در دایره می‌بینید؟ دقیقاً. زاویه‌ای با اندازه ۴۰°.

$$40^\circ = \frac{a+a}{2} \Rightarrow a = 40^\circ \Rightarrow \hat{O} = \alpha = \widehat{AC} = a = 40^\circ$$

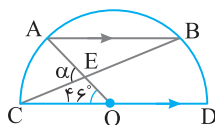


ب) روش اول: دوباره دو وتر موازی در شکل مشاهده می‌شود. همچنین توجه کنید که زاویه O زاویه مرکزی است. پس  $\widehat{AC} = \hat{O} = 46^\circ$ . بنابراین

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC} = 46^\circ \Rightarrow \hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} = 23^\circ \text{ (زاویه محاطی)}$$

در مثلث OCE، اندازه زاویه خارجی مثلث است. پس

$$\alpha = \hat{O} + \hat{C} = 46^\circ + 23^\circ = 69^\circ$$



روش دوم: نیم دایره را به دایره تبدیل می‌کنیم و شعاع OA را از سمت O امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه F قطع کند.

$$\widehat{AC} = \widehat{DF} = \hat{O} = 46^\circ$$

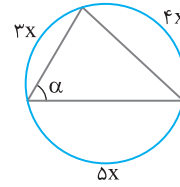
$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC} = 46^\circ \Rightarrow \widehat{BF} = 2 \times 46^\circ = 92^\circ$$

۳] الف) ابتدا توجه کنید که

$$3x + 4x + 5x = 36^\circ \Rightarrow 12x = 36^\circ \Rightarrow x = 3^\circ$$

$$\alpha = \frac{4x}{2} = 2x = 6^\circ$$

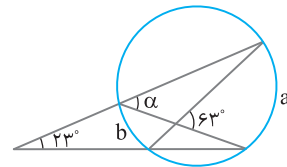
با توجه به اندازه زاویه محاطی،



ب) کافی است از زاویه‌های داخلی و خارجی در دایره استفاده کنیم:

$$\begin{cases} 63^\circ = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a+b = 126^\circ \\ 23^\circ = \frac{a-b}{2} \Rightarrow a-b = 46^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 86^\circ \\ b = 40^\circ \end{cases}$$

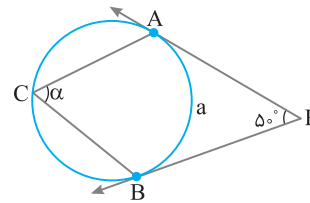
در نتیجه  $\alpha = \frac{a}{2} = 43^\circ$



ب) در شکل یک زاویه خارجی و یک زاویه محاطی دیده می‌شود. اگر  $\widehat{AB} = a$  آن‌گاه  $\widehat{ACB} = 360^\circ - a$  پس

$$\hat{P} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2} \Rightarrow 5^\circ = \frac{(360^\circ - a) - a}{2} \Rightarrow 360^\circ - 2a = 10^\circ \Rightarrow a = 13^\circ$$

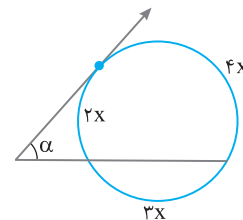
بنابراین  $\alpha = \frac{a}{2} = 6.5^\circ$



ت) در این دایره  $2x + 3x + 4x = 36^\circ$ . در نتیجه  $x = 4^\circ$ . حال با توجه به

$$\alpha = \frac{4x - 2x}{2} = x = 4^\circ$$

زاویه خارجی در دایره به دست می‌آید



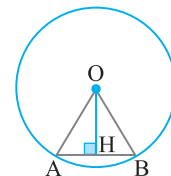
$$\widehat{AB} = 6^\circ \Rightarrow \hat{O} = \widehat{AB} = 6^\circ$$

۴] بنا بر فرض داریم

پس مثلث متساوی‌الساقین OAB یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱۰

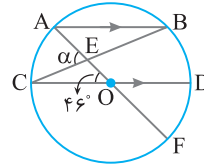
$$OH = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad OA = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3}$$

است. در نتیجه



در این دایره  $\hat{E}$  زاویه داخلی است. پس

$$\alpha = \hat{E} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BF}}{2} = \frac{46^\circ + 92^\circ}{2} = 69^\circ$$



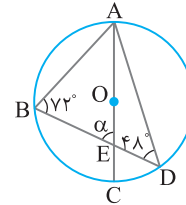
پ) این قسمت خیلی ساده است. اگر نتوانستید  $\alpha$  را به دست آورید، از قطر بودن AC استفاده نکرده‌اید. ☺

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 2 \times 72^\circ = 144^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - \widehat{AD} = 36^\circ$$

$$\hat{D} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 2 \times 48^\circ = 96^\circ$$

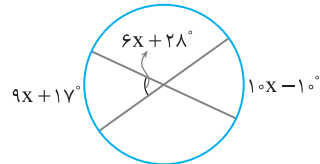
توجه کنید که  $\hat{E}$  زاویه داخلی در دایره است. پس

$$\alpha = \hat{E} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} = \frac{96^\circ + 36^\circ}{2} = 66^\circ$$



الف) کافی است از زاویه داخلی در دایره استفاده شود.

$$6x + 28^\circ = \frac{9x + 17^\circ + 10x - 1^\circ}{2} \Rightarrow 12x + 56^\circ = 19x + 7^\circ \Rightarrow x = 7^\circ$$

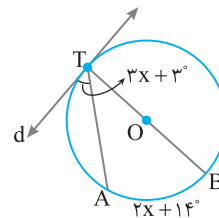


ب) با توجه به اندازه زاویه ظلّی،

$$3x + 3^\circ = \frac{\widehat{TA}}{2} \Rightarrow \widehat{TA} = 6x + 6^\circ$$

$$\widehat{TA} + \widehat{AB} = 180^\circ \Rightarrow 6x + 6^\circ + 2x + 14^\circ = 180^\circ$$

$$8x + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$



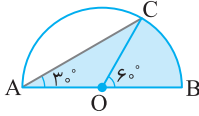
الف) به روش‌های مختلفی می‌توان مساحت ناحیه رنگی را حساب کرد. مثلاً

می‌توان از مساحت نیم‌دایره، مساحت ناحیه سفید را کم کرد. ولی ما در اینجا با رسم شعاع OC ناحیه رنگی را به مثلث OAC و قطاع BOC تقسیم می‌کنیم. با توجه به اندازه‌های زاویه‌های مرکزی و محاطی  $\hat{B} = \widehat{BC} = 2 \times \hat{A} = 60^\circ$ . در نتیجه

$$S_{\text{قطاع BOC}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi R^2 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 12^2 = 24\pi$$

$$S_{\text{OAC}} = \frac{1}{2} \times OA \times OC \times \sin \hat{O} = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times \sin 120^\circ = 36\sqrt{3}$$

بنابراین مساحت ناحیه رنگی برابر  $24\pi + 36\sqrt{3}$  است.

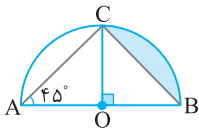


ب) ناحیه رنگی یک قطعه است. اگر شعاع OC را رسم کنیم، آن‌گاه با توجه به اندازه‌های زاویه‌های مرکزی و محاطی  $\hat{B} = \widehat{BC} = 2 \times \hat{A} = 90^\circ$ . بنابراین مساحت قطعه رنگی برابر اختلاف مساحت قطاع  $90^\circ$  و مساحت مثلث OBC است.

$$S_{\text{قطاع BOC}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi R^2 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 12^2 = 24\pi$$

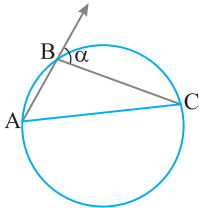
$$S_{\text{OBC}} = \frac{1}{2} \times OB \times OC = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72$$

در نتیجه مساحت قطعه رنگی برابر  $24\pi - 72$  است.



۹ الف) روش اول: وتر AC را رسم می‌کنیم. با توجه به زاویه خارجی در

$$\alpha = \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \quad \text{مثلث ABC.}$$

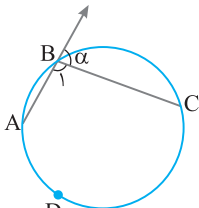


روش دوم: توجه کنید که اندازه زاویه  $B_1$  برابر  $180^\circ - \alpha$  است و این زاویه

یک زاویه محاطی است. اکنون می‌توان نوشت

$$\hat{B}_1 = \frac{\widehat{ADC}}{2} \Rightarrow 180^\circ - \alpha = \frac{\widehat{ADC}}{2}$$

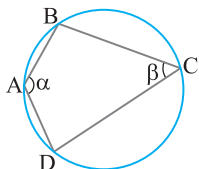
$$\alpha = 180^\circ - \frac{\widehat{ADC}}{2} = 360^\circ - \widehat{ADC} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$$



ب) کافی است از زاویه‌های محاطی استفاده کنیم:

$$\begin{cases} \hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} \\ \hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

بنابراین  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

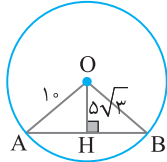


۱۱ با استفاده از قضیه فیثاغورس به دست می آید

$$\triangle OAH: AH^2 = OA^2 - OH^2 = 10^2 - (5\sqrt{3})^2 = 25 \Rightarrow AH = 5$$

در نتیجه  $AB = 10$  و مثلث  $OAB$  متساوی الاضلاع است. بنابراین  $\widehat{AOB} = 60^\circ$

$$\frac{\widehat{AOB}}{360^\circ} \times 2\pi R = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \times 10 = \frac{10\pi}{3}$$
 و طول کمان  $AB$  برابر است با



۱۲ الف) مشابه این تمرین را قبلاً گفته ایم. می توانید از آن کمک بگیرید.

همان طور که در آنجا دیدید، از دو روش می توانیم استفاده کنیم.

روش اول: موازی بودن  $AB$  و  $CD$  شما را یاد چه نتیجه ای می اندازد؟

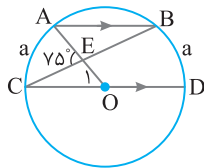
$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = a$$

توجه کنید که  $\widehat{O_1} = \widehat{AC} = a$  و  $\widehat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{a}{2}$ . با استفاده از اندازه زاویه

خارجی در مثلث  $OCE$  به دست می آید

$$75^\circ = \widehat{C} + \widehat{O_1} = \frac{a}{2} + a \Rightarrow \frac{3}{2}a = 75^\circ \Rightarrow a = 50^\circ$$

در نتیجه  $\widehat{AB} = 180^\circ - 2a = 80^\circ$

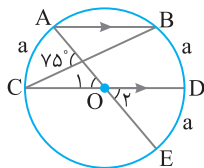


روش دوم: شعاع  $OA$  را از سمت  $O$  امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه  $E$  قطع کند.

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = a, \quad \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{DE} = a$$

زاویه با اندازه  $75^\circ$  چه نوع زاویه ای در دایره است؟ دقیقاً. زاویه داخلی. پس

$$75^\circ = \frac{a+2a}{2} \Rightarrow 3a = 150^\circ \Rightarrow a = 50^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 180^\circ - 2a = 80^\circ$$

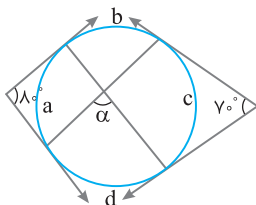


ب) روش اول (روش کتاب درسی): دو زاویه خارجی و یک زاویه داخلی دایره در شکل دیده می شوند. درست است؟

$$80^\circ = \frac{b+c+d-a}{2}, \quad 70^\circ = \frac{b+a+d-c}{2}$$

با جمع کردن این دو تساوی به نتیجه  $b+d = 150^\circ$  می رسیم. پس با توجه به

$$\alpha = \frac{b+d}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$
 اندازه زاویه داخلی،

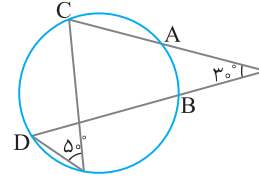


۱۰ الف) با توجه به اندازه زاویه محاطی،

$$50^\circ = \frac{\widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{CD} = 100^\circ$$

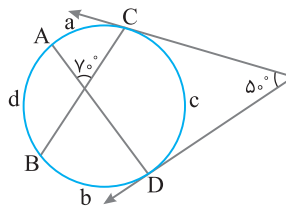
همچنین با توجه به اندازه زاویه خارجی در دایره،

$$30^\circ = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2} \Rightarrow 60^\circ = 100^\circ - \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{AB} = 40^\circ$$



ب) در شکل یک زاویه داخلی و یک زاویه خارجی در دایره دیده می شود.

$$70^\circ = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a+b = 140^\circ \Rightarrow c+d = 220^\circ$$



اکنون می توانیم به دو روش عمل کنیم.

روش اول: طبق تمرین ۵ می توان نوشت  $\widehat{CAD} = 180^\circ + 50^\circ = 230^\circ$ . پس

$$d+a+b = 230^\circ \Rightarrow d+140^\circ = 230^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = d = 90^\circ$$

روش دوم: از زاویه خارجی در دایره استفاده می کنیم:

$$50^\circ = \frac{\widehat{CAD} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 100^\circ = a+b+d-c \Rightarrow c-d = 40^\circ$$

پس  $c+d = 220^\circ$  و  $c-d = 40^\circ$

$$\begin{cases} c-d = 40^\circ \\ c+d = 220^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 130^\circ \\ d = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{AB} = 90^\circ$$

ب) طبق تمرین ۵ می توان نوشت  $\widehat{AD} = 180^\circ - \widehat{E} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

توجه کنید که زاویه  $EAC$  زاویه ظلی است، پس

$$\widehat{EAC} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow 30^\circ = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 60^\circ$$

$$\begin{cases} \widehat{AC} = 60^\circ \\ \widehat{AD} = 100^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{CD} = 40^\circ$$

از طرفی  $\widehat{F}$  زاویه خارجی در دایره است، پس

$$\widehat{F} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 40^\circ = \frac{\widehat{AB} - 40^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 120^\circ$$

