فصل ۰

استدلال‌های ریاضی

فهرست مطالب فصل

سخنی با دانش آموزان عزیز و دبیران گرامی

در کتاب درسی این درس نامه در سر فصل تئوری اعداد آمده است که به نظر می رسد مناسب نباشد چون هم عنوانش به تئوری اعداد نمی‌خورد و هم اهمیت تئوری اعداد را تحت الشعاع قرار می‌دهد. بنابراین برای رفع این دو عیب، این موضوع را جدا کرده و در قالب «فصل صفر» و پیش از ورود رسمی به ریاضیات گسسته ارائه داده‌ایم. قالب و فرمت این فصل با سایر فصول یکسان نیست و به خاطر کم اهمیت بودن این بحث، تمام پرسش‌ها، اعم از ساده، متوسط و دشوار یکجا مطرح شده (فقط تعدادی سوال که جنبه‌ی استدلال دارند و سطحشان از کنکور بالاتر است در انتهای پرسش‌های چهار گزینه‌ای گنجانده شده است. این سوالات معلومات عمومی‌ای از ریاضیات بوده و به بهانه‌ی استدلال در اینجا آورده شده‌اند). و سعی کرده‌ایم از این بحث که اکثراً هم تکراری است، سریع گذر کنیم. در نگارش و تدوین این فصل، دوست بسیار خوبم آقای دکتر جمال صادقی کمک شایانی به اینجانب داشته‌اند. پیشاپیش اعتراف می‌کنیم که بعضی از سوالات ارائه شده در این فصل، برای کنکور سراسری استانداردهای لازم را ندارند و قصد بر آن بوده است تا به بهانه‌ی استدلال، دانش‌آموزان عزیز با معلومات عمومی‌ای از ریاضیات آشنا شوند.

قبل از آن که انواع استدلال‌های ارائه شده را مورد بررسی قرار دهیم، یک استدلال نادرست ولی رایج را یاد آوری می‌کنیم.

فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم حاصل‌ضرب هر چهار عدد متوالی مضرب ۲۴ است.

ابتدایی‌ترین مطلبی که به ذهن خطور می‌کند، آن است که صحت مطلب را برای چند نمونه پیگری کنیم:

- $۱, ۲, ۳, ۴: \quad a_۱ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ = ۲۴ = ۲۴k$
- $۲, ۳, ۴, ۵: \quad a_۲ = ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۱۲۰ = ۲۴k$
- $۳, ۴, ۵, ۶: \quad a_۳ = ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ = ۳۶۰ = ۲۴k$
- $۴, ۵, ۶, ۷: \quad a_۴ = ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷ = ۸۴۰ = ۲۴k$
- $۵, ۶, ۷, ۸: \quad a_۵ = ۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸ = ۱۶۸۰ = ۲۴k$

$\vdots$

درستیِ گزاره‌ی داده شده برای پنج سلسله از «چهار عدد متوالی» بررسی شد ولی آیا می‌توانیم قضاوت کنیم که گزاره‌ی فوق همیشه برقرار است؟ اگر چنین قضاوتی کنیم آنگاه استدلال درستی انجام نشده است، چرا که ممکن است گزاره‌ای برای موردهای زیادی ارزش درستی داشته باشد ولی برای برخی (حتی یک مورد) از مقادیر برقرار نباشد. به گزاره‌ی دیگری به صورت زیر توجه کنید:

عدد $n^۲ + n + ۴۱$ به ازای تمام مقادیر طبیعی برای n عددی اول است.

حاصل عبارت فوق به ازای ۵،۴،۳،۲،۱،... برای n به ترتیب برابر ۷۱،۶۱،۵۳،۴۷،۴۳،... می‌شود، که علی الظاهر همگی اولند ولی این برداشت و این استدلال ناصحیح است چرا که به ازای ۴۰ برای n حاصل عبارت فوق برابر ۱۶۸۱ شده و عددی مرکب است، چون $۱۶۸۱ = ۴۱^۲ = ۴۱ + ۴۰ + ۴۰^۲$. بنابراین اگر گزاره‌ای برای ۳۹ عدد از اعداد نخستین طبیعی برقرار باشد دلیلی بر درستی آن گزاره برای ۴۰ نیست.

حال به سراغ استدلال‌هایی می‌رویم که پایه و اساس محکمی داشته و در محکمه‌ی ریاضی مورد قبول و پذیرش است.

مثال نقض

این نوع استدلال برای رد درستی یک گزاره در حالت کلی به‌کار می‌رود. در بحث قبلی برای رد درستی گزاره «عدد $n^۲ + n + ۴۱$ به ازای تمام مقادیر طبیعی برای n عددی اول است» مثال نقض $n = ۴۰$ وجود دارد.

مثال ۱ برای «هر عدد طبیعی دو رقمی را می‌توان به‌صورت مجموع چندین (بیش از یک) عدد طبیعی متوالی نوشت» مثال نقض بیاورید.

حل. اعداد ۱۵،۱۴،۱۳،۱۲،۱۱،۱۰ را به‌طور زیر می‌توان به‌صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی نوشت:

$$۱۰ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ \qquad ۱۱ = ۵ + ۶ \qquad ۱۲ = ۳ + ۴ + ۵$$
$$۱۳ = ۶ + ۷ \qquad ۱۴ = ۲ + ۳ + ۴ + ۵ \qquad ۱۵ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵$$

ولی هرچه تلاش کنید عدد ۱۶ را به‌صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی نمی‌توان نوشت، بنابراین عدد ۱۶ برای گزاره‌ی یاد شده مثال نقض محسوب می‌شود.

استدلال استنتاجی یا اثبات مستقیم

استفاده از گزاره‌های درست قبلی، اعم از گزاره‌هایی که بدیهی هستند یا درستی آن‌ها قبلاً اثبات شده است و نتیجه گرفتن گزاره‌ی درست جدید را اثبات مستقیم گویند.

مثال ۲ ثابت کنید مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر $\dfrac{n(n+۱)}{۲}$ است.

حل. می‌دانیم اتحاد $(x+۱)^۲ = x^۲ + ۲x + ۱$ یا $(x+۱)^۲ - x^۲ = ۲x + ۱$ همیشه برقرار است. از آن اتحاد به تعداد n بار استفاده می‌کنیم:

$$x = ۱: \quad ۲^۲ - ۱^۲ = ۲(۱) + ۱$$
$$x = ۲: \quad ۳^۲ - ۲^۲ = ۲(۲) + ۱$$
$$x = ۳: \quad ۴^۲ - ۳^۲ = ۲(۳) + ۱$$
$$\vdots$$
$$x = n: \quad (n+۱)^۲ - n^۲ = ۲(n) + ۱$$

حال همه‌ی عبارات فوق را با هم جمع می‌کنیم، معلوم است که در سمت چپ $۲^۲$ از سطر اول با $-۲^۲$ از سطر دوم، $۳^۲$ از سطر دوم با $-۳^۲$ از سطر سوم، ... حذف شده و در سمت چپ فقط $(n+۱)^۲$ از سطر آخر و $-۱^۲$ از سطر اول باقی می‌مانند، بنابراین:

$$(n+۱)^۲ - ۱^۲ = ۲[۱+۲+۳+\cdots+n] + n$$
$$\Rightarrow n^۲ + ۲n = ۲[۱+۲+۳+\cdots+n] + n \Rightarrow ۱+۲+۳+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

مثال ۳ با استفاده از اثبات مستقیم، ثابت کنید عدد $۱۶^n - ۱$ به ازای تمام مقادیر طبیعی برای n عددی مرکب است.

حل. از اتحاد $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-۱}b^۰ + a^{n-۲}b^۱ + \cdots + a^۰b^{n-۱})$ استفاده می‌کنیم.

$$۱۶^n - ۱^n = (۱۶ - ۱)[\cdots] = ۱۵k$$

همان‌طورکه مشخص است عدد فوق همیشه مضرب ۱۵ است و عددی که مضرب ۱۵ باشد، مرکب بودنش واضح است.

مثال ۴ به شیوه‌ی اثبات مستقیم ثابت کنید مربع هر عدد فرد طبیعی در تقسیم بر ۸ باقی مانده‌ی ۱ دارد.

حل. می‌دانیم هر عدد طبیعی فرد به فرم $۲k - ۱$ است، بنابراین:

$$? = (۲k-۱)^۲ = ۴k^۲ - ۴k + ۱ = ۴k(k-۱) + ۱$$

چون حاصل‌ضرب هر دو عدد متوالی از جمله $k(k-۱)$ عددی زوج است، پس: $۴(۲q) + ۱ = ۸q + ۱$
در بیان اینکه $k(k-۱)$ زوج است به این صورت استدلال می‌شود که یا k زوج است که در این صورت $k(k-۱)$ عامل زوج دارد و یا k فرد است که در این صورت $k-۱$ زوج شده و باز هم $k(k-۱)$ عامل زوج دارد. در زوج و فرد گرفتن k از استدلالی کمک گرفته شده است که در زیر بیشتر توضیح داده می‌شود:

شیوه‌ی اشباع (با در نظر گرفتن همه‌ی حالت‌ها)

گاهی اوقات برای اثبات درستی یک گزاره بهتر است تمامی حالات ممکن را به تعدادی حالت کوچک‌تر افراز کرده و مسأله را در هر حالت کوچک‌تر اثبات کرد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۵ ثابت کنید مربع هر عددی به فرم $A = ۶k + ۱$ در تقسیم بر ۲۴ باقی مانده‌ی ۱ دارد.

حل. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

(الف) kعددی زوج باشد، که در این‌صورت:

$$k = ۲q \Rightarrow A = ۱۲q + ۱ \Rightarrow A^۲ = ۱۴۴q^۲ + ۲۴q + ۱ = ۲۴t + ۱$$

(ب) kعدد فردی باشد، که در این‌صورت:

$$k = ۲q + ۱ \Rightarrow A = ۱۲q + ۷ \Rightarrow A^۲ = ۱۴۴q^۲ + ۱۶۸q + ۴۹$$
$$= ۲۴[۶q^۲ + ۷q + ۲] + ۱ = ۲۴t + ۱$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در هر دو حالت به درستیِ گزاره‌ی داده شده پی می‌بریم و چون اجتماع اعداد زوج و فرد، تمام اعداد صحیح می‌شود، بنابراین اثبات برای تمامی حالات انجام شده است و حالت اشباع رخ داده است.

مثال ۶ ثابت کنید عدد $n^5 - n$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی برای n مضرب ۵ است.

حل. عدد n به یکی از فرم‌های $5k$، $5k+1$، $5k+2$، $5k+3$ و یا $5k+4$ است و در ضمن عدد n^5-n به‌صورت $(n-1)n(n+1)(n^2+1)$ قابل تجزیه است، بنابراین پنج حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

(الف) $n = 5k$ که در این‌صورت عامل دوم از سمت چپ مضرب ۵ بوده و اثبات تمام است.

(ب) $n = 5k + 1$ که در این‌صورت عامل اول از سمت چپ مضرب ۵ بوده و اثبات تمام است.

(ج) $n = 5k + 2$ که در این‌صورت عامل آخر یعنی $n^2 + 1$ مضرب ۵ شده و اثبات تمام می‌شود:

$$n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 4 + 1 = 5(5k^2 + 4k + 1) = 5q$$

(د) $n = 5k + 3$ که در این‌صورت نیز عامل $n^2 + 1$ مضرب ۵ شده و اثبات تمام می‌شود.

(ه) $n = 5k + 4$ که در این‌صورت عامل سوم از سمت چپ مضرب ۵ بوده و اثبات تمام می‌شود.

با حالت‌بندی اثبات به درستی تمام می‌شود، چون اجتماع پنج حالت در نظر گرفته شده تمام اعداد طبیعی می‌شود.

اثبات به شیوه‌ی برهان خلف

در این شیوه فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد و با استفاده از منطقی درست و گزاره‌های درست دیگر به تناقض می‌رسیم (این تناقض می‌تواند بر علیه یک گزاره‌ی درست دیگر یا علیه فرض مسأله باشد) که در این‌صورت تناقض ایجاد شده معلوم می‌کند برقرار نبودن حکم غلط و برقراری آن مسجل است.

مثال ۷ با علم به این که مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست، ثابت کنید مجموع عدد گویای a و عدد گنگی مانند r عددی گنگ می‌شود.

حل. می‌خواهیم ثابت کنیم $a + r$ گنگ است. فرض می‌کنیم خلاف آن برقرار باشد یعنی $a + r$ گویا باشد، در این‌صورت:

$$a + r = \text{گویا} \Rightarrow r = \text{گویا} - a = \text{گویا} + (-a) = \text{گویا}$$

معلوم است که جمله‌ی به دست آمده تناقض است، چون r که عددی گنگ بود با یک عدد گویا برابر شده است. بنابراین گویا بودن $a + r$ غلط و گنگ بودن آن صحیح است.

اثبات‌های بازگشتی

با توجه به این‌که از درستی گزاره‌ی ترکیبی $P \Leftrightarrow Q$ معلوم می‌شود که دو گزاره‌ی P و Q هم‌ارزشند، بنابراین بعضی از مواقع ناچار می‌شویم حکم داده شده را چندین مرحله ساده کنیم و به یک عبارتی برسیم که درستی یا نادرستی آن مسجل است، به شرط آن‌که تمام روابط، بازگشت‌پذیر باشند معلوم می‌شود که حکم داده شده نیز ارزشی برابر با گزاره‌ی آخر دارد.

مثال ۸ برای هر سه عدد حقیقی a، b و c ثابت کنید نابرابری $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ همیشه برقرار است.

حل.

$$[a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc] \Leftrightarrow [a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow [2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow [a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow [(a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 + c^2 - 2ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) \geq 0]$$

$$\Leftrightarrow [(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq 0]$$

درستی گزاره‌ی آخر به خاطر نامنفی بودن مربع عبارات واضح است و چون تمام نتیجه‌گیری‌ها دو طرفه هستند، بنابراین گزاره‌ی اولیه نیز ارزش درستی دارد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس جلسه‌ی اول

پرسش‌های ترکیب سطوح درس جلسه‌ی اول

۱ کدام یک از گزاره‌های زیر مثال نقض دارد؟

۱) هر مربع یک لوزی است.
۲) هر عدد اول و بزرگتر از ۲، فرد است.
۳) هر مثلث متساوی الاضلاع، متساوی الساقین است.
۴) توان دوم هر عدد طبیعی کوچک‌تر از توان سوم آن است.

۲ کدام دو عدد کلیت حکم «مجموع مربعات هر دو عدد، عددی اول است» را نقض می‌کنند؟

۱) ۱ و ۲
۲) ۳ و ۵
۳) ۴ و ۵
۴) ۲ و ۳

۳ برای گزاره‌ی «عدد $۱ - ۳^n$ به ازای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ برای n مرکب است» کدام عدد مثال نقض است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) مثال نقض ندارد

٤ کدام یک از اعداد زیر برای گزاره‌ی «اگر مجموع ارقام عددی به ۱۱ بخش‌پذیر باشد آن‌گاه خود آن عدد نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر است» مثال نقض است؟

۱) ۵۷۶۱
۲) ۵۶۶۵
۳) ۵۶
۴) ۹۹

۵ در استدلال یک قضیه فرض کرده‌ایم که حکم برقرار است و پس از یک دسته اعمال مجاز به یک رابطه‌ی بدیهی و یا فرض قضیه رسیده‌ایم. برای تکمیل اثبات لازم است کدام مورد برقرار باشد؟

۱) اثبات قضیه کامل است و نیاز به فرض دیگری نیست.
۲) مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر، باشند.
۳) یک مثال نقض که در شرایط مسأله صدق و از آن حکم قضیه نتیجه شود مورد نیاز است.
۴) یک مثال نقض ارائه شود.

۶ در اثبات یک مسأله به شیوه‌ی برهان خلف:

۱) ثابت می‌کنند خلاف حکم نادرست است.
۲) ثابت می‌کنند خلاف فرض نادرست است.
۳) ثابت می‌کنند حکم نادرست است.
۴) ثابت می‌کنند فرض نادرست است.

۷ کدام یک از اعداد زیر کلیت حکم «عددی که در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ی ۱ بیاورد مربع کامل است» را رد می کند؟

۱) ۲۵
۲) ۳۶
۳) ۱۲۰
۴) ۸۹

۸ کدام یک از گزاره‌های زیر مثال نقض ندارد؟

۱) به ازای تمام اعداد حقیقی برای c، b و a اگر $ac > bc$ آن‌گاه $a > b$.
۲) اگر p اول باشد آن‌گاه $p + ۱$ نمی‌تواند اول باشد.
۳) برای هر عدد حقیقی نامنفی برای x نابرابریِ $x \leq x^۳$ برقرار است.
۴) برای هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از ۱ برای x، نابرابری $x < \frac{۱}{x}$ برقراراست.

۹ برای اثبات درستی گزاره‌ی «مربع هیچ عدد طبیعی‌ای به‌فرم $۵k + ۲$ نیست» به شیوه‌ی اشباع، برای n چند حالت مختلف در نظر گرفته می‌شود؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۵

۱۰ چه تعداد از گزاره‌های زیر، ارزش درستی دارند؟

- مجموع مکعبات دو عدد متوالی، فرد است.
- مجموع مکعبات سه عدد متوالی، مضرب ۹ است.
- مجموع معکوس‌های شش عدد طبیعی فرد، می‌تواند ۱ باشد.
- اگر عددی فرد باشد، مکعب آن نیز فرد است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۱ کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی (بیش از یک عدد) متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۶ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

۱۲ اثبات کدام قضیه‌ی زیر احتیاج به استدلال به روش برهان خلف <u>ندارد</u>؟[1]

۱) عدد $\sqrt{5}$ گنگ است.

۲) از یک نقطه بیرون یک خط فقط یک خط موازی خط مفروض می‌توان رسم کرد.

۳) در یک صفحه از نقطه‌ی مفروض فقط یک خط می‌توان بر خط مفروض عمود کرد.

۴) مربع هر عدد طبیعی فرد، از مضرب ۸ یک واحد بیش‌تر است.

۱۳ برای کدام یک از گزاره های زیر مثال نقض وجود دارد؟

۱) مجموع دو عددگنگ، گنگ است.
۲) مجموع دو عدد گویا، گویا است.
۳) حاصل ضرب دو عدد گویا، گویا است.
۴) حاصل ضرب عددی گویای غیر صفر در گنگ، گنگ است.

۱۴ در اثبات نابرابری $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ به ازای a و bهای مثبت به شیوه‌ی بازگشتی، رابطه‌ی بدیهی که در پایان حاصل می‌شود کدام است؟

۱) $(a+b)^2\geq 0$ ۲) $(a-b)^2\geq 0$ ۳) $a+b\geq 0$ ۴) $|a-b|\geq 1$

۱۵ با فرض این که n^2 مضرب ۶ است می‌خواهیم ثابت کنیم n نیز مضرب ۶ است. در این صورت کدام روش مناسب‌تر است؟

۱) مثال نقض ۲) برهان خلف ۳) روش اشباع ۴) استدلال بازگشتی

۱۶ برای اثبات درستی چه تعداد از گزاره‌های زیر برهان خلف مناسب‌تر است ؟

- مجموع دو عدد گویا، عددی گویاست.
- حاصل ضرب دو عدد زوج، مضرب ۴ است.
- مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۷ چه تعداد از گزاره‌های زیر ارزش درستی دارند؟

- اعداد گنگ و گویایی وجود دارد که در هم ضرب شده و حاصل گویا شود.
- اعداد گنگی مانند a و b موجودند که قرینه‌ی هم نبوده و مجموعشان گویا شود.
- مجموع یک عدد گنگ و یک عدد گویا همیشه گنگ می‌شود.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸ درستی چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان، با مثال نقض رد کرد.

- مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.
- برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$
- حاصل‌ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی مضرب ۶ است.
- مربع هر عدد فرد، فرد است.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱) این پرسش، سؤال کنکور سال ۸۶ بوده و ابهاماتی نظیر این‌که گزاره‌ی اشاره شده در گزینه‌ی ۲، اصل است و قضیه نیست، به این خاطر عوض نشده است که سؤال عیناً ذکر شده باشد.

۱۹ اگر α و β هر دو گنگ بوده ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، آنگاه چه تعداد از اعداد $\alpha - \beta$، $\alpha + 2\beta$ و $2\beta + 3\alpha$ حتماً گنگ هستند؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰ درستیِ کدام یک از گزاره‌های زیر را با مثال نقض نمی‌توان رد کرد؟

۱) اعداد طبیعی x و y وجود دارد که $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

۲) حاصل‌ضرب پنج عدد متوالی، بر ۱۲۰ بخش‌پذیر است.

۳) اگر برای سه مجموعه‌ی A، B و C تساوی $A \cup B = A \cup C$ برقرار باشد، آنگاه $B = C$ است.

۴) مجموع ۶ عدد متوالی مضرب ۶ است.

۲۱ چه تعداد از ترکیب‌های شرطی زیر درست هستند؟ $(a, b \in \mathbb{R})$

• $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$ • $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ • $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ • $a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۲ کدام یک از گزاره های زیر صحیح است؟

۱) عدد گنگی وجود دارد که به توان گنگ رسیده و گویا شود.

۲) عدد گویایی وجود دارد که در عدد گویایی ضرب و حاصل گنگ شود.

۳) عدد گنگی وجود ندارد که به توان گویا رسیده و گویا شود.

۴) عدد گویایی وجود ندارد که در عدد گنگ ضرب شده و حاصل گویا شود.

۲۳ درستی کدام یک از گزاره‌های زیر را می‌توان با استفاده از مثال نقض رد کرد؟

۱) هر چهار ضلعی‌ای که قطرهایش هم‌دیگر را نصف کنند متوازی الاضلاع است.

۲) مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ی ۱ دارد.

۳) هر عدد اول فردی به یکی از دو صورت $2^n - 1$ یا $2^n + 1$ است. $(n \in \mathbb{N})$

۴) مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده ی ۱ دارد

۲۴ کدام عدد کلیت حکم «عدد $p^{p+1} + 2$ به‌ازای تمام مقادیر اول p عددی مرکب است» را نقض می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۵ برای کدام یک از احکام زیر نمی‌توان مثال نقض آورد:

۱) برای هر عدد حقیقی x نابرابری $x \leq x^2$ برقرار است.

۲) اگر $y \geq x$ آنگاه $\frac{y}{x} \geq 1$

۳) اگر n عدد صحیح زوج باشد آنگاه $n^2 + 1$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

۴) برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$، برابریِ $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \cdots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ برقرار است.

۲۶ اثبات درستی چه تعداد از گزاره‌های زیر به شیوه‌ی برهان خلف مناسب‌تر است.

ـ اگر x عدد گنگ باشد آنگاه $\frac{1}{x}$ هم گنگ است.

ـ میانگین پنج عدد طبیعی متوالی عدد وسطی است.

ـ اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.

ـ حاصل‌ضرب عددی به فرمِ $6k + 4$ در عدد دیگری به فرم $6k' + 5$ به‌صورت $6k'' + 2$ می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۷ در چه تعداد از حالات زیر دو گزاره‌ی P و Q هم ارزند:

P : n زوج است Q : n^2 زوج است	P : n مضرب ۴ است Q : n^2 مضرب ۸ است	P : x برابر ۱ است Q : x^2 برابر ۱ است

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۸ درستیِ کدام‌یک از گزاره‌های زیر را با مثال نقض می‌توان رد کرد؟

۱) مجموع ۱۳۹۸ عدد طبیعی متوالی بر ۱۳۹۸ بخش‌پذیر است.

۲) مجموع هر ۱۳۹۷ عدد فرد، عددی فرد است.

۳) اگر حاصل‌ضرب چهار عدد طبیعی متوالی k باشد، آن‌گاه $k+1$ مربع کامل است.

۴) حاصل‌ضرب سه عدد زوج متوالی، بر ۴۸ بخش‌پذیر است.

۲۹ درستیِ چه تعداد از گزاره‌های زیر را نمی‌توان با مثال نقض رد کرد؟

- حاصل‌ضرب چهار عدد طبیعی متوالی بزرگ‌تر از ۱، بر ۱۲۰ بخش‌پذیر است.
- برای هر عدد اول p، عدد 2^p-1 اول است.
- اگر حاصل‌ضرب چهار عدد صحیح، فرد باشد، آن‌گاه مجموع مربعات آن‌ها زوج است.
- مجموع سه عدد زوج متوالی، بر ۶ بخش‌پذیر است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۰ درستیِ چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان با مثال نقض رد کرد؟

- مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.
- برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد 2^n-1 اول است.
- اگر a گنگ باشد، آن‌گاه a^2+3a+7 نیز گنگ است.
- میانگین شش عدد طبیعی متوالی، برابر میانگین دو عدد وسط است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۱ درستیِ چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان با مثال نقض رد کرد؟

- عبارت $8k^2+1$ به ازای هیچ مقدار طبیعی k بزرگ‌تر از ۱ مربع کامل نیست.
- اگر حاصل‌ضرب ۶ عدد حقیقی برابر ۰ شود، آن‌گاه حداقل یکی از آن شش عدد، صفر است.
- اگر a_1، a_2 و a_3 اعدادی صحیح و b_1، b_2 و b_3 همان اعداد ولی با ترتیبی دیگر باشند، آن‌گاه حاصل $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج است.
- اختلاف مربعات دو عدد فرد، بر ۸ بخش‌پذیر است.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۲ اگر گزاره‌ی $\frac{x}{2(3n+2)}=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}+\cdots+\frac{1}{8\times 11}+\frac{1}{5\times 8}+\frac{1}{2\times 5}$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی n برقرار باشد، آن‌گاه x کدام است؟

۱) n ۲) ۱

۳) $2n-2$ ۴) $2n-1$

۳۳ برای . . . گزاره‌ی «n^2+n+41 برای همه‌ی اعداد طبیعی n که مضرب ۴۱ نیستند، عددی اول است» از . . . می‌توان استفاده کرد.

۱) رد ـ برهان خلف ۲) رد ـ مثال نقض

۳) اثبات ـ در نظر گرفتن همه‌ی حالات ۴) اثبات ـ برهان خلف

۳۴ درستیِ چه تعداد از گزاره‌های زیر را نمی‌توان با برهان خلف اثبات کرد؟

- اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی تابع g در $x=a$ ناپیوسته باشد، آن‌گاه $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.
- حاصل‌ضرب دو عدد گنگ متمایز، عددی گنگ است.
- حاصل‌جمع دو عدد گنگ که قرینه‌ی هم نیستند، گنگ است.

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۳۵ چند زوج مرتب مانند (a,b) از اعداد حقیقی و ناصفر وجود دارد به‌طوری که تساوی $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ برقرار باشد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳۶ برای اثبات این‌که از بین اعداد n، $n+1$ و $n+2$ یکی بر ۳ بخش‌پذیر است، از کدام رابطه‌ی هم‌ارزی استفاده می‌کنیم؟

۱) $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

۲) $(p \vee q \vee r) \Rightarrow s \equiv (p \Rightarrow s) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge (r \Rightarrow s)$

۳) $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$

۴) $(p \vee q \vee r) \Rightarrow s \equiv (p \Rightarrow s) \vee (q \Rightarrow s) \vee (r \Rightarrow s)$

۳۷ اگر $x^2+y^2+1=xy+x+y$، آن‌گاه حاصل x^3+y^3 کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) عددی گنگ

۳۸ برای اثبات درستیِ گزاره‌ی «اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه $a^2+ab+b^2 \geq 0$» در آخرین مرحله به چه تعداد از گزاره‌های زیر می‌توانیم برسیم؟

- $(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4} \geq 0$
- $(a+b)^2+a^2+b^2 \geq 0$
- $(\frac{a}{2}+b)^2+\frac{3a^2}{4} \geq 0$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۹ برای اثبات درستیِ گزاره‌ی «اگر $a>0$ آن‌گاه $a+\frac{1}{a} \geq 2$» در آخرین مرحله به کدام گزاره می‌رسیم؟

۱) $(a+1)^2 \geq 0$ ۲) $a^2 \geq 0$ ۳) $(a-1)^2 \geq 0$ ۴) $a^2+1 \geq 0$

۴۰ فرض کنید می‌خواهیم با در نظر گرفتن همه‌ی حالات اثبات کنیم که عدد n^2-5n+7 عددی فرد است. اگر $n=2k-1$ باشد، آن‌گاه باید نشان دهیم کدام‌یک از عبارات زیر عددی فرد است؟

۱) $4k^2-10k+7$ ۲) $4k^2-14k+13$ ۳) $4k^2-12k+9$ ۴) $4k^2-6k+3$

۴۱ فرض کنید a عددی گویا و b عددی گنگ باشد به طوری‌که ab عددی گویا باشد. حاصل ab^2+a^3+3 کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۳

۳) به‌طور یکتا به‌دست نمی‌آید. ۴) چنین چیزی امکان ندارد

۴۲ در مورد حاصل k^3-k چه تعداد از موارد زیر همواره ارزش درستی دارند؟

- اگر k فرد باشد آن‌گاه آن عبارت مضرب ۱۲ بوده ولی ممکن است مضرب ۲۴ نباشد.
- اگر k زوج بوده و بزرگ‌تر از ۲ باشد، آن‌گاه آن عبارت مضرب ۱۲ است.
- اگر k مضرب ۴ باشد آن‌گاه آن عبارت مضرب ۱۲ است.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۳ چه تعداد از زوج مرتب‌هایی مانند (a,b) از اعداد صحیح با شرایط $-10 \leq a,b \leq 10$ وجود دارد به‌طوری که تساوی $(a+b)^2=a^2+b^2$ برقرار باشد؟

۱) ۳۹ ۲) ۴۰ ۳) ۴۱ ۴) ۴۲

۴۴ به ازای چند مقدار طبیعی n در بازه‌ی $[1397, 1401]$ مجموع n عدد طبیعی متوالی حتماً مضرب n می‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۴۵ گزاره‌ی «عدد $۱ + ۲^{۲^n}$ به ازای همه‌ی عددهای طبیعی برای n، عددی اول است» در مجموعه اعداد طبیعی از ۱ تا ۵ چند مثال نقض دارد؟

۱) ۳   ۲) ۲   ۳) ۱   ۴) ۰

پرسش‌های خیلی دشوار! درس جلسه‌ی اول*

۴۶ چند عدد طبیعی مانند n در بازه‌ی $[۲۰۱۸, ۱۳۹۷]$ وجود دارد که $\dfrac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ عددی زوج شود؟

۱) ۳۰۹   ۲) ۳۱۰   ۳) ۳۱۱   ۴) ۳۱۲

۴۷ اگر $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $C = \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ و $A \subseteq \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$، آنگاه چند مجموعه برای A وجود دارد که مثال نقض گزاره‌ی «اگر برای سه مجموعه‌ی A، B و C تساوی $A \cup C = A \cup B$ برقرار باشد آنگاه تساوی $B = C$ نیز برقرار است» باشد؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۴   ۴) ۸

۴۸ چند سه‌تایی مرتب (a, b, c) از اعداد صحیح و ناصفر $-۵ \leq a, b, c \leq ۵$ وجود دارد که تساوی $\dfrac{۱}{a} + \dfrac{۱}{b} + \dfrac{۱}{c} = \dfrac{۱}{a+b+c}$ برقرار باشد؟

۱) ۲۴۰   ۲) ۲۷۰   ۳) ۳۰۰   ۴) ۳۳۰

۴۹ فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، $\dots a_n$ اعدادی صحیح بوده و $b_۱$، $b_۲$، $\dots b_n$ هم همان اعداد بوده ولی با ترتیبی دیگر. به ازای چند مقدار طبیعی در بازه‌ی $[۱۳۹۷, ۱۴۰۰]$ حاصل $(a_۱ - b_۱)(a_۲ - b_۲)\cdots(a_n - b_n)$ حتماً زوج است؟

۱) ۴   ۲) ۳   ۳) ۲   ۴) ۱

۵۰ چند عدد صحیح n در بازه‌ی $[۱۳۶۵, ۱۳۹۷]$ وجود دارد که تساوی زیر برقرار باشد:

$$a_۱a_۲ + a_۲a_۳ + \cdots + a_{n-۱}a_n + a_na_۱ = ۰, \quad a_i \in \{-۱, ۱\}$$

۱) ۸   ۲) ۱۶   ۳) ۱۷   ۴) ۳۳

پاسخ کلیدی پرسش‌های فصل ۰

۱)	۴	۱۱)	۴	۲۱)	۳	۳۱)	۲	۴۱)	۲
۲)	۲	۱۲)	۴	۲۲)	۱	۳۲)	۱	۴۲)	۲
۳)	۴	۱۳)	۱	۲۳)	۳	۳۳)	۲	۴۳)	۳
۴)	۳	۱۴)	۲	۲۴)	۳	۳۴)	۲	۴۴)	۲
۵)	۲	۱۵)	۲	۲۵)	۴	۳۵)	۱	۴۵)	۳
۶)	۱	۱۶)	۱	۲۶)	۱	۳۶)	۲	۴۶)	۲
۷)	۴	۱۷)	۴	۲۷)	۳	۳۷)	۳	۴۷)	۴
۸)	۴	۱۸)	۲	۲۸)	۱	۳۸)	۴	۴۸)	۲
۹)	۴	۱۹)	۴	۲۹)	۳	۳۹)	۳	۴۹)	۳
۱۰)	۲	۲۰)	۲	۳۰)	۳	۴۰)	۲	۵۰)	۱

*) این سؤالات در سطح سؤالات کنکور نیستند، فقط قصد برآن است که با تعدادی استدلال آشنا شوید.

۱ ‏ ۱ ۲ ۳ ✓

توان دوم و سوم عدد ۱ با هم مساوی بوده و مثال نقضی برای درستی گزینه‌ی ۴ است.

۲ ‏ ۱ ✓ ۳ ۴

اول $۵^۲ + ۳^۲ = ۲۵ + ۹ = ۳۴ \neq$

۳ ‏ ۱ ۲ ۳ ✓

$۳^n - ۱$ همیشه زوج بوده و اگر $n \geq ۲$ آن‌گاه مخالف ۲ بوده و مرکب است.

۴ ‏ ۱ ۲ ✓ ۴

مجموع ارقام ۵۶ بر ۱۱ بخش‌پذیر است ولی ۵۶ بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست.

۵ ‏ ۱ ✓ ۳ ۴

ممکن است مرحله‌ای برگشت‌پذیر نباشد، مثلاً از گزاره‌ی «$x = ۲$» گزاره‌ی «$x^۲ = ۴$» نتیجه می‌شود ولی عکس آن درست نیست. بنابراین برای تکمیل اثبات لازم است ثابت شود که تمام مراحل برگشت پذیرند.

۶ ‏ ✓ ۲ ۳ ۴

در اثبات یک مسأله به شیوه‌ی برهان خلف، فرض می‌کنیم حکم درست باشد، سپس با استفاده از آن و با بهره‌گیری از یک سری منطق و استدلال درست، به خلافِ فرض یا خلاف یک جمله‌ی بدیهی و یا خلاف یک گزاره‌ی اثبات شده‌ی قبلی می‌رسیم که در این صورت معلوم می‌شود این تناقض از جایی ناشی شده است که «خلافِ حکم را درست در نظر گرفته‌ایم» و معلوم می‌شود خلافِ حکم نادرست و خودِ حکم درست است.

۷ ‏ ۱ ۲ ۳ ✓

عدد ۸۹ به فرم $۸k + ۱$ است ولی مربع کامل نیست.

بر روی این موضوع خیلی مسلط شوید که:

- مربع هر عدد فردی در تقسیم بر ۸ باقی مانده‌ی ۱ دارد ولی عکس آن درست نیست یعنی اگر عددی در تقسیم بر ۸ باقی مانده‌ی ۱ داشته باشد دلیلی ندارد که مربع کامل باشد.

۸ ‏ ۱ ۲ ۳ ✓

برای گزاره‌ی ۱ مثال نقض $b = ۴$، $a = ۲$ و $c = -۱$ وجود دارد.

برای گزاره‌ی ۲ مثال نقض $p = ۲$ وجود دارد.

برای گزاره‌ی ۳ مثال نقض $x = \frac{۱}{۲}$ وجود دارد.

۹ ‏ ۱ ۲ ۳ ✓

کافی است n را $۵k$، $۵k+۱$، $۵k+۲$، $۵k+۳$ و $۵k+۴$ در نظر گرفته و مسأله را حل کنید.

اگر $n = ۵k$ آن‌گاه $n^۲ = ۵k'$

اگر $n = ۵k + ۱$ آن‌گاه

$$n = ۲۵k^۲ + ۱۰k + ۱$$

اگر $n = ۵k + ۲$ آن‌گاه

$$n = ۲۵k^۲ + ۲۰k + ۴ = ۵k' + ۴$$

اگر $n = ۵k + ۳$ آن‌گاه

$$n = ۲۵k^۲ + ۳۰k + ۹ = ۵k' + ۴$$

اگر $n = ۵k + ۴$ آن‌گاه

$$n = ۲۵k^۲ + ۴۰k + ۱۶ = ۵k' + ۱$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود مربع یک عدد صحیح هرگز به فرم $۵k + ۲$ یا $۵k + ۳$ نمی‌شود.

۱۰ ‏ ۱ ✓ ۳ ۴

فقط گزاره‌ی سوم ارزش نادرستی دارد. آن‌را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. آن ۶ عدد را a، b، c، d، e و f در نظر بگیرید:

$$\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{d} + \frac{۱}{e} + \frac{۱}{f} = ۱$$

$$bcdef + acdef + abdef + abcef + abcdf + abcde = abcdef$$

هر ۶ عبارت نوشته شده در سمت چپ تساوی فوق، فرد بوده و درنتیجه حاصل جمع آن‌ها زوج است در حالی که سمت راست تساوی عددی فرد است.

اثبات درستیِ سه گزاره دیگر به‌صورت زیر است.

$$?_۱ = k^۳ + (k+۱)^۳ = ۲k^۳ + ۳k^۲ + ۳k + ۱$$
$$= ۲k^۳ + ۳\underbrace{k(k+۱)}_{\text{زوج}} + ۱$$
$$= \text{فرد} = \text{زوج} + ۱$$

$$?_۲ = k^۳ + (k+۱)^۳ + (k-۱)^۳$$
$$= k^۳ + k^۳ + ۳k^۲ + ۳k + ۱ + k^۳ - ۳k^۲ + ۳k - ۱$$
$$= ۳k^۳ + ۶k = ۳k(k^۲ + ۲)$$

اگر k مضرب ۳ باشد، آن‌گاه حاصل مضرب ۹ می‌شود و اگر k در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ی ۱ یا ۲ داشته باشد، آن‌گاه $k^۲ + ۲$ مضرب ۳ شده و باز حاصل آن عبارت، مضرب ۹ خواهد شد. (شیوه‌ی اخیر در نظرگرفتن تمام حالات است.)

$$?_۴ = (۲k+۱)^۳ = ۸k^۳ + ۱۲k^۲ + ۶k + ۱ = \text{فرد}$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ✓

فقط اعداد به فرم ۲^i را نمی‌توان به‌صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی نوشت، ولی بقیه‌ی اعداد را به اشکال زیر می‌توان نوشت:

$$۴۰ = ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$$
$$۴۶ = ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳$$
$$۵۶ = ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱$$

این سؤال استاندارد نیست، فقط قصد آن است که به عنوان اطلاعات عمومی در نظر داشته باشید که فقط اعداد به فرم ۲^i را نمی‌توان به‌صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی نوشت (اثبات این موضوع در المپیاد ریاضی سال ۱۳۶۶ مطرح شده بود).

۱۲ ۱ ۲ ۳ ✓

اثبات گزاره‌ی موجود در گزینه‌ی ۴ بدون برهان خلف و به‌صورت مستقیم انجام‌پذیر است.

برای اثبات گنگ بودن $\sqrt{۵}$ به شیوه‌ی برهان خلف به موارد زیر توجه کنید:

- عدد گویا عددی است که بتوان آن را به صورت $\frac{a}{b}$ $(b \neq ۰)$ که در این صورت a و b اعداد صحیحی هستند نوشت در غیر این صورت آن عدد را گنگ گویند. بنابراین هر عدد حقیقی یا گویاست و یا گنگ.
- دو عدد n و n^k در تجزیه به حاصل‌ضرب عوامل اول پایه‌های یکسانی دارند بنابراین اگر عددی مانند n را به توان طبیعی k برسانید پایه‌های اول آن تغییر نکرده و فقط توان هر یک از پایه‌های آن k برابر می‌شود.
- اثبات: اگر $\sqrt{۵}$ گویا باشد آنگاه به صورت $\frac{a}{b}$ است $(a, b \in \mathbb{Z})$. a و b را آنقدر ساده می‌کنیم تا به کسر $\frac{a'}{b'}$ برسیم که در آن صورت a' و b' نسبت به هم اول باشند، پس:

$$\sqrt{۵} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow a' = \sqrt{۵}b' \Rightarrow a'^۲ = ۵b'^۲ = ۵k$$

چون مربع a' مضرب ۵ است پس خود a' نیز مضرب ۵ می‌شود:

$$a' = ۵q \Rightarrow (۵q)^۲ = ۵b'^۲ \Rightarrow ۲۵q^۲ = ۵b'^۲ \Rightarrow ۵q^۲ = b'^۲$$

چون مربع b' مضرب ۵ است پس خود b' نیز مضرب ۵ خواهد بود و اینکه هم a' و هم b' مضرب ۵ شده‌اند با نسبت به هم اول بودنشان در تضاد است و این به آن معناست که گویا بودن $\sqrt{۵}$ غلط و گنگ بودن آن درست است.

۱۳ ✓ ۲ ۳ ۴

۱. مجموع دو عدد گنگ $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ برابر صفر است.

درستی سایر گزاره‌ها را اثبات می‌کنیم:

۲. $r + r' = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{q}{k} =$ گویا

لازم به ذکر است که حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیحی صحیح است و نیز حاصل جمع هر دو عدد صحیحی عدد صحیح است.

۳. $r.r' = \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{q}{k} =$ گویا

۴. $r.\alpha = \beta \quad (r =$ گویا $, \ \alpha =$ گنگ$)$

با برهان خلف ثابت می‌کنیم. اگر β گویا باشد آنگاه آن را $\frac{c}{d}$ درنظر گرفته و خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b}.\alpha = \frac{c}{d} \Rightarrow \alpha = \frac{c}{d}.\frac{b}{a} = \frac{bc}{ad} = \frac{q}{k} = \text{گویا}$$

چون عدد گنگ α با عدد گویای $\frac{q}{k}$ برابر شده است و این تناقض است یعنی گویا بودن β غلط و گنگ بودن آن درست است.

۱۴ ۱ ✓ ۳ ۴

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow \frac{a^۲ + b^۲}{ab} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲ + b^۲ \geq ۲ab$$
$$\Leftrightarrow a^۲ + b^۲ - ۲ab \geq ۰ \Leftrightarrow (a - b)^۲ \geq ۰$$

۱۵ ۱ ✓ ۳ ۴

اگر n مضرب ۶ نباشد آنگاه حداقل یکی از دو عاملِ ۲ یا ۳ را ندارد، بنابراین $n^۲$ نیز حداقل یکی از دو عامل ۲ یا ۳ را نداشته و در نتیجه مضرب ۶ نخواهد بود.

۱۶ ✓ ۲ ۳ ۴

همه‌ی گزاره‌ها به راحتی به شیوه‌ی مستقیم قابل اثبات هستند.

۱۷ ۱ ۲ ۳ ✓

هر سه گزاره ارزش درستی دارد. برای درستی گزاره‌ی اول، مثال $\alpha = ۰$ و $\beta = \sqrt{۲}$ وجود دارد. برای درستی گزاره‌ی دوم مثال $\alpha = ۱ + \sqrt{۲}$ و $\beta = ۳ - \sqrt{۲}$ وجود دارد. گزاره‌ی سوم نیز با شیوه‌ی برهان خلف به راحتی اثبات شدنی است.

۱۸ ۱ ✓ ۳ ۴

فقط گزاره‌ی دوم مثال نقض دارد و به‌صورت $x = ۴$ و $y = ۹$.

۱۹ ۱ ۲ ۳ ✓

هرسه گنگ هستند و همگی به راحتی با برهان خلف ثابت می‌شوند که به نمایندگی آخری را اثبات می‌کنیم:

فرض می‌کنیم $۳\alpha + ۲\beta$ گویا باشد، چون $۳\alpha + ۳\beta$ نیز گویاست، پس تفاضل آن‌ها یعنی β نیز گویا می‌شود که تناقض است.

۲۰ ۱ ✓ ۳ ۴

گزاره‌ای را باید انتخاب کنیم که همیشه درست بوده و مثال نقضی نداشته باشد.

گزاره‌ی ۱ همیشه نادرست است.

گزاره‌ی ۲ همیشه درست است و به عنوان اطلاعات عمومی، بدانید که حاصل‌ضرب هر m عدد طبیعی متوالی مضرب $m!$ است (اثبات آن‌را لازم نیست بدانید).

گزاره‌ی ۳ مثال نقض دارد، به عنوان مثال:

$$A=\{۱,۲\},\ \ B=\{۲,۳\},\ \ C=\{۳\}$$

گزاره‌ی ۴ مثال نقض دارد، به عنوان مثال:

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶=۲۱\neq ۶k$$

۲۱ ۱ ۲ ✓ ۴

برای گزاره‌ی دوم و سوم از سمت چپ به ترتیب مثال نقضِ «$a=۲,\ b=-۲$» و «$a=۲,\ b=-۳$» وجود دارد.

۲۲ ✓ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم $\sqrt{۲}$ گنگ است (از طریق برهان خلف اثبات می‌شود.) اگر $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ گویا شود مثال مورد نظر همین است و اما اگر $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ گنگ باشد، مثال مورد نظر به‌صورت $(\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}}$ می‌شود که حاصل آن $(\sqrt{۲})^{۲}$ یعنی ۲ است.

عدم درستی گزینه‌ی ۲. عدد اول را $\frac{p}{q}$ و عدد دوم را $\frac{p'}{q'}$ در نظر می‌گیریم که حاصل‌ضرب آن دو عدد $\frac{pp'}{qq'}$ شده و عددی گویا می‌شود و هرگز نمی‌تواند گنگ باشد.

عدم درستی گزینه ۳. مثال نقض مورد نظر $(\sqrt{۲})^{۲}$ است که در آن $\sqrt{۲}$ گنگ و ۲ گویا است.

عدم درستی گزینه‌ی ۴. عدد گویای مورد نظر برای مثال نقض را برابر ۰ و عدد گنگ را $\sqrt{۲}$ در نظر بگیرید.

۲۳ ۱ ۲ ✓ ۴

عدد ۲۳ اول است ولی نه به صورت $۲^n-۱$ است و نه به صورت $۲^n+۱$.

اثبات گزینه‌ی ۲ به حالت درنظرگرفتن تمام حالات:

I. اگر عدد اول به فرم $۳k+۱$ باشد آنگاه مربع آن به فرم $۹k^۲+۶k+۱$ شده و به صورت $۳q+۱$ قابل نگارش است.

II. اگر عدد اول به فرم $۳k+۲$ باشد آنگاه مربع آن به فرم $۹k^۲+۱۲k+۴$ یا به فرم $۹k^۲+۱۲k+۳+۱$ شده و باز به فرم $۳q+۱$، قابل نگارش است.

۲۴ ۱ ۲ ✓ ۴

عدد $۲+۳^۴$ عدد مرکبی نیست.

۲۵ ۱ ۲ ۳ ✓

برای گزینه‌ی ۱ مثال نقض $x=\frac{۱}{۲}$ وجود دارد.

برای گزینه‌ی ۲ مثال نقض $y=-۲$ و $x=-۱$ وجود دارد.

برای گزینه‌ی ۳ مثال نقض $n=۴$ وجود دارد.

گزینه‌ی ۴ به صورت زیر اثبات می‌شود:

$$\text{سمت راست}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times\cdots\times\frac{n-۱}{n}=\frac{۱}{n}=\text{سمت چپ}$$

(صورت هرکسر (به غیر از اولی) با مخرج کسر قبل خودش ساده شده است)

۲۶ ✓ ۲ ۳ ۴

فقط اثبات گزاره‌ی اول به شیوه‌ی برهان خلف مناسب‌تر است.

اثبات گزاره‌ی سوم به صورت مستقیم:

$$k=n(n+۱)$$
$$\Rightarrow ۴k+۱=۴n(n+۱)+۱$$
$$=۴n^۲+۴n+۱$$
$$=(۲n+۱)^۲=\text{مربع کامل}$$

اثبات گزاره‌ی چهارم به صورت مستقیم:

$$?=(۶k+۴)(۶k'+۵)$$
$$=۳۶kk'+۳۰k+۲۴k'+۲۰$$
$$=۳۶kk'+۳۰k+۲۴k'+۱۸+۲$$
$$=۶k''+۲$$

۲۷ ۱ ۲ ✓ ۴

فقط در حالت آخر دو گزاره هم ارز نیستند چون ممکن است $x^۲$ برابر ۱ باشد ولی x برابر ۱ نباشد.

۲۸ ✓ ۲ ۳ ۴

- مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۳۹۸ برابر

$$\frac{۱۳۹۸\times ۱۳۹۹}{۲}=۶۹۹\times ۱۳۹۹$$

است که مضرب ۱۳۹۸ نیست. در واقع اگر n فرد باشد، مجموع n عدد متوالی بر n بخش‌پذیر است. ولی اگر n زوج باشد، مجموع n عدد متوالی بر n بخش‌پذیر نیست.

- حاصل‌جمع فرد تا عدد فرد، عددی فرد می‌شود.
- اگر چهار عدد طبیعی را $n-۱$، n، $n+۱$ و $n+۲$ در نظر بگیریم، آنگاه:

$$k+۱=(n-۱)n(n+۱)(n+۲)+۱$$
$$=n^۴+۲n^۳-n^۲-۲n+۱=(n^۲+n-۱)^۲$$

- در بین هر سه عدد زوج متوالی، حتماً یکی مضرب ۳ است. در بین هر سه عدد زوج متوالی، حداقل یکی مضرب ۴ است. بنابراین حاصل‌ضرب هر سه عدد زوج متوالی مضرب $۲^۱\times ۲^۳\times ۳$ یعنی ۴۸ است.

۲۹ ۱ ۲ ✓ ۴

- برای گزاره‌ی اول مثال نقضِ $۹\times ۸\times ۷\times ۶$ وجود دارد که مضرب ۱۲۰ نیست.

- برای گزاره‌ی دوم مثال نقضِ $p = 11$ وجود دارد، چون $2^{11} - 1$ یعنی ۲۰۴۷ بر ۲۳ بخش‌پذیر است.
- اگر حاصل‌ضرب چهار عدد صحیح، عددی فرد باشد، آنگاه هر چهار عدد فرد بوده و مربع هر کدام نیز فرد می‌شود و مجموع چهار عدد فرد، عددی زوج می‌شود.
- اگر سه عدد زوج متوالی را $2k - 2$، $2k$ و $2k + 2$ در نظر بگیریم، مجموعشان $6k$ شده و مضرب ۶ بودن آن همیشگی است.

۳۰ ۱ ۲ ✓ ۴

- اگر آن اعداد را $k - 1$، k و $k + 1$ در نظر بگیریم، آنگاه مجموع آن‌ها $3k$ شده، و مضرب ۳ بودن آن همیشگی است.
- گزاره‌ی داده شده به ازای $n = 4$ برقرار نیست.
- اگر عبارت داده شده را به‌صورت $(a + \frac{3}{2})^2 + \frac{19}{4}$ در نظر بگیریم، آنگاه حاصل آن عبارت به ازای $a = \sqrt{2} - \frac{3}{2}$ که عددی گنگ است، گویا می‌شود.
- اگر اعداد را $k - 2$، $k - 1$، k، $k + 1$، $k + 2$ و $k + 3$ در نظر بگیرید، به درستیِ گزاره‌ی داده شده پی خواهید برد.

۳۱ ۱ ✓ ۳ ۴

- عبارت داده شده به ازای $k = 6$ برابر ۲۸۹ می‌شود که مربع ۱۷ است.
- ✓
- با برهان خلف به راحتی ثابت می‌کنیم:

اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ فرد باشد آنگاه حاصل هر سه عبارت $(a_1 - b_1)$، $(a_2 - b_2)$ و $(a_3 - b_3)$ فرد خواهد شد:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 - b_1 = \text{فرد} \\ a_2 - b_2 = \text{فرد} \\ a_3 - b_3 = \text{فرد} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = \text{فرد}$$

$$\Rightarrow 0 = \text{فرد}$$

تساوی به‌دست آمده تناقض است، بنابراین فرد بودن عبارت داده شده، غلط و زوج بودن آن صحیح است. لازم به ذکر است که در تساوی‌های فوق از این دو مطلب استفاده شده است که اولاً مجموع سه عدد فرد عددی فرد می‌شود و ثانیاً $a_1 + a_2 + a_3$ با $b_1 + b_2 + b_3$ برابر است.

- چون مربع هر عدد فردی به فرم $8k + 1$ است، بنابراین

$$? = a - b = (8k + 1) - (8k' + 1) = 8q$$

۳۲ ✓ ۲ ۳ ۴

اگر $n = 1$ آنگاه تساوی به‌صورت $\frac{x}{10} = \frac{1}{10}$ در می‌آید، یعنی $x = 1$ که در این صورت گزینه‌ی ۳ رد می‌شود. اگر $n = 2$ آنگاه تساوی به‌صورت $\frac{x}{16} = \frac{1}{8}$ در می‌آید یعنی $x = 2$ که در این‌صورت نیز گزینه‌های ۲ و ۴ رد می‌شوند.

۳۳ ۱ ✓ ۳ ۴

عبارت $n^2 + n + 41$ به ازای $n = 40$ به‌صورت $40^2 + 40 + 41$ یا $41 + (40 + 1)40$ یا 41^2 در می‌آید که مرکب بوده و اول نیست، یعنی گزاره‌ی داده شده ارزش نادرستی دارد و با مثال نقض مشخص می‌شود.

۳۴ ۱ ✓ ۳ ۴

گزاره‌های دوم و سوم ارزش نادرستی دارند.

۳۵ ✓ ۲ ۳ ۴

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b}$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = ab \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + (a+b)^2 = 0$$

معادله‌ی به‌دست آمده در مجموعه اعداد حقیقی غیر صفر، جوابی ندارد.

۳۶ ۱ ✓ ۳ ۴

به عنوان مثال فرض کنید بخواهیم ثابت کنیم که عدد $n^3 - n$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی n، مضرب ۳ است. با در نظرگرفتن تمام حالات می‌خواهیم ثابت کنیم «اگر $n = 3k$ یا $n = 3k + 1$ یا $n = 3k + 2$ آنگاه $n^3 - n$ مضرب ۳ است». ولی یاد گرفتید به جای اثبات آن گزاره، به شیوه‌ی زیر عمل کنید:

- اگر $n = 3k$ آنگاه $n^3 - n$ مضرب ۳ است و اگر $n = 3k + 1$ آنگاه $n^3 - n$ مضرب ۳ است و بالاخره اگر $n = 3k + 2$ آنگاه $n^3 - n$ مضرب ۳ است.

استدلال‌های فوق هم ارز یکدیگرند که در گزینه‌ی ۲ بیان شده است.

۳۷ ۱ ۲ ✓ ۴

$$x^2 + y^2 + 1 = xy + x + y$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2 = 2xy + 2x + 2y$$

$$(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = y = 1$$

۳۸ ۱ ۲ ۳ ✓

هر سه گزاره به راحتی قابل حصولند. زیرا ساده شده‌ی هر سه، همان عبارت اولیه می‌شود و همه‌ی نتیجه‌گیری‌ها نیز برگشت‌پذیرند.

۳۹ ۱ ۲ ✓ ۴

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Rightarrow (a - 1)^2 \geq 0$$

۴۰ ۱ ✓ ۳ ۴

$$n = 2k - 1$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n + 7 = (2k - 1)^2 - 5(2k - 1) + 7$$

$$= 4k^2 - 14k + 13$$

۴۱ ۱ ✓ ۳ ۴

اگر a گویا، b گنگ و ab گویا باشد، آنگاه a حتماً صفر است، پس:

$$? = ab^۲ + a^۳ + ۳ = ۰ + ۰ + ۳ = ۳$$

۴۲ ۱ ✓ ۳ ۴

عبارت داده شده به‌صورت $(k-۱)k(k+۱)$ است که حاصل‌ضرب سه عدد متوالی است که در این‌صورت به ازای k فرد، آن عبارت حتماً مضرب ۲۴ است، زیرا $k-۱$ و $k+۱$ دو عدد زوج متوالی می‌شوند که در بین دو عدد زوج متوالی حتماً یکی مضرب ۴ است. پس عبارت داده شده حداقل سه‌تا عامل ۲ و یک عامل ۳ را داشته و مضرب ۲۴ می‌شود. اگر k زوج باشد، برای عددی مانند $k = ۶$ حاصل آن عبارت مضرب ۱۲ نمی‌شود. و بالاخره، اگر k مضرب ۴ باشد، از آن‌جایی که از سه عدد متوالی حتماً یکی مضرب ۳ است، آن عبارت حتماًمضرب ۱۲ می‌شود.

۴۳ ۱ ۲ ✓ ۴

$$(a+b)^۲ = a^۲ + b^۲ \Rightarrow a^۲ + b^۲ + ۲ab = a^۲ + b^۲$$

$$\Rightarrow ۲ab = ۰ \Rightarrow a = ۰ \text{ یا } b = ۰$$

اگر $a = ۰$ آنگاه b تعداد ۲۱ مقدار به خود می‌پذیرد و اگر $b = ۰$ آنگاه a تعداد ۲۱ مقدار به خود می‌پذیرد که حالت $(۰,۰)$ در هر دو شمارش شده است.

۴۴ ۱ ✓ ۳ ۴

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲} = n \times \frac{n+۱}{۲}$$

بنابراین اگر $\frac{n+۱}{۲}$ صحیح باشد آنگاه حاصل به‌دست آمده، مضرب n خواهد بود. $\frac{n+۱}{۲}$ وقتی صحیح است که n عددی فرد باشد.

۴۵ ۱ ۲ ✓ ۴

به ازای $n = ۵$ عدد $۲^{۳۲} + ۱$ به‌دست می‌آید که در فصل همنهشتی می‌توانید ثابت کنید این عدد بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است.

این سؤال نیز استاندارد نبوده و برای افزایش اطلاعات عمومی داده شده است و آن این‌که $۲^{۳۲} + ۱$ عددی اول نیست. (اغلب $۲^{۲^n} + ۱$ها عددی اول هستند و اولین ۲^i که در توان ۲ قرارگیرد و حاصل مرکب شود ۳۲ است، یعنی $۲^۲ + ۱$، $۲^۴ + ۱$، $۲^۸ + ۱$، $۲^{۱۶} + ۱$ همگی اول هستند.)

۴۶ ۱ ✓ ۳ ۴

حاصل عبارات داده شده وقتی زوج است که n به‌صورت $۴k$ یا $۴k-۱$ باشد که ۳۱۰ تا از اعداد داده شده این خاصیت را دارند.

$$n = ۴k \Rightarrow ? = \frac{۱۶k^۲(۴k+۱)^۲}{۴} = ۴k^۲(۴k+۱)^۲ = \text{زوج}$$

$$n = ۴k+۱ \Rightarrow ? = \frac{(۴k+۱)^۲(۴k+۲)^۲}{۴}$$

$$= (۴k+۱)^۲(۲k+۱)^۲ = \text{فرد}$$

$$n = ۴k+۲ \Rightarrow ? = \frac{(۴k+۲)^۲(۴k+۳)^۲}{۴}$$

$$= (۲k+۱)^۲(۴k+۳)^۲ = \text{فرد}$$

$$n = ۴k+۳ \Rightarrow ? = \frac{(۴k+۳)^۲(۴k+۴)^۲}{۴}$$

$$= ۴(۴k+۳)^۲(k+۱)^۲ = \text{زوج}$$

لازم به یادآوری است که $۴k+۳$ همان $۴q-۱$ است و دو نمایش از یک عدد هستند.

۴۷ ۱ ۲ ۳ ✓

برای آن‌گاه تساوی $A \cup C = A \cup B$ برقرار باشد، باید A هر یک از اعضاء ۱، ۲، ۵، ۶ و ۷ را داشته باشد، ولی در مورد سه عضو دیگر هریک را می‌تواند داشته باشد و یا نه.

۴۸ ۱ ✓ ۳ ۴

$$\frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{۱}{a+b+c} \Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) = ۰$$

باید حداقل دو عدد از بین سه عدد a، b و c قرینه باشند:

$$? = \text{دقیقاً دو جفت قرینه باشند} + \text{دقیقاً یک جفت قرینه باشند}$$

$$= \binom{۳}{۲} \times ۱۰ \times ۱ \times ۸ + \binom{۳}{۲} \times ۱۰ \times ۱$$

$$= ۲۴۰ + ۳۰ = ۲۷۰$$

۴۹ ۱ ۲ ✓ ۴

با برهان خلف ثابت می‌شود که حاصل عبارت داده شده به ازای nهای فرد حتماً زوج است:

اگر حاصل فرد باشد، آنگاه تمام پرانتزها باید فرد باشند:

$$a_۱ - b_۱ = \text{فرد},\ a_۲ - b_۲ = \text{فرد},\ \cdots,\ a_n - b_n = \text{فرد}$$

$$\Rightarrow \sum (a_i - b_i) = \text{مجموع } n \text{تا عدد فرد} \Rightarrow ۰ = \text{فرد}$$

که تساوی به‌دست آمده تناقض است.

اگر n زوج باشد، می‌توان نصف اعداد را فرد و نصف دیگر را زوج در نظر گرفته و در هر پرانتز یکی از مؤلفه‌ها را فرد و دیگری را زوج بنویسید تا تمام پرانتزها فرد باشند.

۵۰ ✓ ۲ ۳ ۴

حاصل a_ia_j یا ۱ است یا -۱، بنابراین برای آن‌که حاصل داده شده برابر صفر شود، لازم است نصف a_ia_jها برابر ۱ و نصف دیگر -۱ شود و آن موقعی میسّر می‌شود که n زوج باشد (حواستان باشد که زوج بودن n، شرط لازم است نه شرط کافی!). از طرف دیگر، چون حاصل‌ضرب تمام عبارات موجود در سمت چپ تساوی برابر $(a_۱)^۲(a_۲)^۲\cdots(a_n)^۲$ است، بنابراین آن حاصل برابر ۱ می‌شود، به این معنا که در بین a_ia_jها باید تعداد زوجی (-۱) باشد. چون تعداد a_ia_jهایی که -۱ بودند $\frac{n}{۲}$ بود، بنابراین لازم است $\frac{n}{۲}$ زوج باشد و آن موقعی میسّر می‌شود که n مضرب ۴ باشد.

در بین اعداد ۱۳۶۵ تا ۱۳۹۷ به تعداد ۸ عدد مضرب ۴ وجود دارد.

فصل ۱

بخش‌پذیری و هم‌نهشتی

فهرست مطالب فصل

سخنی با دانش آموز

- به‌طور حتم از لحظه‌ای که شمارش را در دوران طفولیت یاد گرفتید آشناییتان با تئوری اعداد شکل گرفته است و در نتیجه قسمتی از مطالب این بخش برایتان آشنا بوده و تکراری است. در واقع در این بخش مطالبی از نظریه‌ی اعداد که از دوران ابتدایی به بعد خوانده‌اید جمع‌بندی شده و بعضاً به همان زبان قبل و بعضاً به زبان جدید مانند هم‌نهشتی برایتان معرفی خواهد شد.
- در طول فصل تمام پارامترهایی مانند a، b، c، d، k، m، d، n . . . که استفاده شده باشند عددی صحیح بوده و در اغلب اوقات صحیح بودنِ آن ذکر نمی‌شود ولی شما باید بنا را بر همین گذاشته و مساله را پیش ببرید. البته در بعضی اوقات آن اعداد خاص‌تر بوده و طبیعی هستند که در آن صورت حتماً ذکر می‌شود.

سخنی با دبیر

- همان‌طور که اطلاع دارید بحث نظریه‌ی اعداد از قدیم تا به حال در کتب درسی جاخوش کرده و با تغییر نظام‌های آموزشی، هرگز این بحث از کتب درسی حذف نشده است، از طرف دیگر دامنه‌ی این بحث بسیار وسیع بوده و نمی‌توان به درستی نقطه‌ی شروع و پایان این بحث را برای دانش‌آموزان نشانه‌گذاری کرد. بنابراین بسیار مشاهده شده است که در کنکور سراسری سوالاتی از این بحث مطرح شده است که آن را به هیچ عنوان به موضوع و یا صفحه‌ی خاصی از کتاب درسی نمی‌توان ارجاع داد. به عنوان مثال در نظام قبلی بحث «تقسیم» بسیار ساده و روان در حد دو صفحه در کتاب درسی مطالبی بیان شده بود در حالی که از همان بحث سوالات بسیار پیچیده‌ای در کنکور سراسری مطرح می‌شد و نیز در همان کتاب بدون تدریس «مبنا» در یکی از تمرین‌های کتاب تبدیل عددی از مبنای ۱۰ به غیر ۱۰ مطرح می‌شود و همین امر سبب می‌شود سوالات بسیار پیچیده‌ای در کنکور مطرح شود و یا این‌که تعداد صفرهای موجود در انتهای $n!$ چقدر است، در هیچ کجای کتاب درسی وجود نداشته است در حالی که در کنکور سراسری سال ۱۳۹۰ تعداد صفرهای انتهای عدد $۷۵!$ خواسته شده بود. لذا ایجاب می‌کند با تکیه بر تجربه این نقطه‌ی شروع و پایان را معلم و یا مولفی بر عهده بگیرد. این کار را ما در سال ۱۳۸٤ انجام دادیم و با نگارش و تالیف کتاب «ریاضیات گسسته و علوم پایه مرتبط با آن» (که تا سال ۱۳۹٦ بالغ بر ۵۰ بار تجدید چاپ شد) مطالب جامع و کامل در آن حوزه مخصوصاً تئوری اعداد، ارائه شد. در سال‌های اولیه و نیز آخریه! فروش کتاب به کندی پیش می‌رفت، اولی به خاطر آن‌که خیلی از همکاران محترم با دیدن مباحثی که به ظاهر در کتاب درسی نبوده‌اند (همانند بحث تعداد صفرهای موجود در انتهای $n!$ که برای اولین بار در کتاب ما بیان شد و پس از آن‌که در کنکور آزاد یا سراسری سوالی به میان آمد همکاران دیگر این بحث را نیز به کتابشان افزودند)، علیه کتاب گارد مخالف گرفتند و پس از دو سه سالی،با مطرح شدن خیلی از مباحث موجود در کتاب کمک آموزشی ما در کنکور، خوشبختانه این گارد منفی برداشته شده و تبدیل به تبلیغ و خوش‌گویی از کتاب شد. اما دلیل کندی فروش در سال‌های اخیر هم باز همکاران گرامی بودند، خیلی از آن‌ها با لطفی که به بنده داشتند ابراز می‌کردند که چرا علی‌رغم گذشت بیش از یک دهه از تالیف کتاب آن را بازنویسی نمی‌کنید؛ جوابی که برای این عزیزان داشتم تا به صورت مستند و سوال به سوال از سال ۱۳۸٤ تا آن تاریخ را برایشان تشریح کردم و موجود بودن تک‌تک آن‌ها (عیناً و یا با تشابه‌های بالای ۹۰%) در کتاب را یادآور می‌شدم. آن بزرگواران قانع شده و از تبلیغ منفی دست می‌کشیدند ولی چون تعداد همکارانی که در این مورد با ما ارتباط برقرار کرده و تبادل نظر می‌کردند بسیار کم بود، طبیعتاً عده‌ی زیادی از آنان با همان تفکر که کتاب از سال ۱۳۸٤ تا به حال بازنویسی نشده است متاسفانه گارد منفی گرفته و کتاب را برای دانش‌آموزان توصیه نمی‌کردند. البته لازم به ذکر اسست که آخرین این سوالات که عیناً در کنکور ذکر شده سال ۱۳۹٦ بود (در لحظه‌ی نوشتن این متن به تاریخ ۹۷/۳/۸ هنوز کنکور ۹۷ برگزار نشده است) که به شرح ذیل است:

خوشخوان (مثال ۹ صفحه‌ی ۹۰): اگر $۵|۲n+۱$ آن‌گاه ثابت کنید $۲۵|۱۴n^۲+۱۹n+۶$.

سوال کنکور سراسری خارج ۹٦: اگر عدد طبیعی به‌صورت $۲n+۱$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده‌ی عدد طبیعی به‌صورت $۱۴n^۲+۱۹n+۶$ بر عدد ۲۵، کدام است؟

در مورد تشابه فوق یکی از نظرات زیر وجود دارد:

۱. اعداد انتخابی طراح محترم به‌صورت اتفاقی با اعداد ما مطابقت پیدا کرده است!
۲. کتاب خوشخوان بر خلاف نظر عده‌ای از همکاران گرامی هنوز معتبر بوده و مورد توجه است!
۳. مولف خوشخوان و طراح کنکور هر دو از یک مرجع سوال انتخاب کرده‌اند که اگر چنین باشد نیز واقع‌بینی مولف را نشان می‌دهد.
٤. . . .

- در هم‌نهشتی به قضایای فرما، اویلر و ویلسون اشاره شده است خواهشمند است به این موضوع توجه کنید که هدف ارائه‌ی مطالب خارج از کتاب نیست بلکه با این قضایا بعضی از سوالات هم‌نهشتی به صورت میان‌بر حل می‌شوند.

عدد صحیح a را بر عدد صحیح b بخش‌پذیر گویند هرگاه عدد صحیحی مانند q چنان یافت شود که $a = b \times q$. بخش‌پذیری a بر b را به‌صورت $b|a$ نمایش داده و آن را به یکی از صورت‌های زیر می‌خوانند.

- عدد b عدد a را می‌شمارد.
- عدد b عدد a را عاد می‌کند.
- عدد b مقسوم‌علیهی از a است.
- عدد a مضربی از عدد b است.

قرارداد. چون بی‌شمار عدد صحیح مانند q یافت می‌شود که در تساویِ $q \times ۰ = ۰$ صدق کند بنابراین می‌پذیریم که عدد صفر خودش را عاد می‌کند یعنی $۰|۰$. این قرارداد با تعریف بخش‌پذیری سازگار است.

اگر عدد صحیح b مقسوم‌علیهی از عدد صحیح a نباشد آن را به‌صورت $b \nmid a$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱

مجموعه مقسوم‌علیه های مثبت عدد ۹۰ را بنویسید.

حل. مجموعه مقسوم‌علیه‌های مثبت ۹۰ به شکل زیر هستند که الگوریتم نوشتار آن در ادامه توضیح داده شده است:

$D_{۹۰}=\{۱و۲و۳و۵و۶و۹و۱۰و۱۵و۱۸و۳۰و۴۵و۹۰\}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید مقسوم‌علیه‌های مثبت هر عددی از جمله ۹۰ دوبه‌دو جفت هم شده و حاصل ضربشان ۹۰ می‌شود. بنابراین با تشخیص مقسوم‌علیه‌های کوچکِ یک عدد، مقسوم‌علیه‌های بزرگِ آن خودبه‌خود به‌دست می‌آید.

نکته ۱

می‌دانیم $n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$ بنابراین اگر عدد n مانند تساوی $n = a \cdot b$ به‌صورت حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متمایز a و b نوشته شود آن‌گاه یکی از آن دو عدد از $\sqrt{n}$ بیش‌تر و دیگری از $\sqrt{n}$ کم‌تر است. در مثال قبل چون $\sqrt{۹۰} \simeq ۹/۵$ بنابراین در هر جفت مورد اشاره‌ای یکی از اعداد از ۹/۵ بیش‌تر و دیگری از ۹/۵ کم‌تر است، یعنی برای پیدا کردن مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد n اگر مقسوم‌علیه‌های کوچک‌تر یا مساوی $\sqrt{n}$ یافت شوند مقسوم‌علیه‌های بزرگ‌تر از $\sqrt{n}$ نیز به راحتی پیدا خواهند شد.

نکته ۲

اگر n مربع کامل باشد آن‌گاه چون یکی از مقسوم‌علیه‌ها $\sqrt{n}$ می‌شود که جفت ندارد آن‌گاه تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن عددی فرد، و در غیر این‌صورت تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن زوج خواهد بود.

مثال ۲

چند عدد طبیعی مانند k یافت می‌شود که $k|۹۶$ و $k|۱۸۰$؟

حل. به سبک اشاره شده در مثال ۱، $D_{۹۶}$ و $D_{۱۸۰}$ را می‌نویسیم:

$$D_{۹۶} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۴, ۳۲, ۴۸, ۹۶\}$$

$$D_{۱۸۰} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۲۰, ۳۰, ۳۶, ۴۵, ۶۰, ۹۰, ۱۸۰\}$$

$$\Rightarrow ? = D_{۹۶} \cap D_{۱۸۰} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲\}$$

لازم به ذکر است که بعد از بیان بحث ب.م.م و ک.م.م برای حل چنین سؤالاتی راه‌حل راحت‌تری بیان خواهد شد.

تست ۱

تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت کدام‌یک از اعداد زیر برابر ۱۵ است؟

۱) ۸۰۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۷۰۰

۱ ۲ ✓ ۴

در این سؤال هدف تأکید بر نکته‌ی ۲ است که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت اعداد مربع کامل، فرد است. در بین گزینه‌ها فقط ۴۰۰ مربع کامل است.

تست ۲

چند عدد طبیعی مانند k وجود دارد که $k|۱۰۸$ و $k \nmid ۲۴$؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

$$D_{۱۰۸} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۹, ۱۲, ۱۸, ۲۷, ۳۶, ۵۴, ۱۰۸\}$$

$$D_{۲۴} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۱۲, ۲۴\}$$

$$? = |D_{۱۰۸} \cap \overline{D}_{۲۴}| = |D_{۱۰۸} - D_{۲۴}| = |D_{۱۰۸}| - |D_{۱۰۸} \cap D_{۲۴}|$$

$$= ۱۲ - |\{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲\}| = ۱۲ - ۶ = ۶$$

تست ۳

تعداد ارقام عدد حاصل از حاصل‌ضرب تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۱۰۰۸ به کدام نزدیک‌تر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۲

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

تأکید این سؤال به این است که در مثال ۱ حاصل‌ضرب هر دو عدد موجود در یک جفت همان ۹۰ می‌شود. بنابراین در آن سؤال چون تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت برابر ۱۲ یعنی ۶ جفت به‌دست آمد بنابراین حاصل‌ضرب تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت ۹۰ برابر $۹۰^۶$ به‌دست می‌آید و به نکته‌ی زیر می‌رسیم:

نکته ۳

اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد n برابر k باشد آن‌گاه حاصل‌ضرب تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد n برابر $n^{\frac{k}{۲}}$ یا $\sqrt{n}^k$ خواهد شد (نگران این موضوع که k یعنی تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n فرد باشد، نباشید چون در این‌صورت n مربع کامل شده و $\sqrt{n}$ عددی طبیعی است).

مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۱۰۰۸ به شکل زیر است:

$$D_{۱۰۰۸} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸, ۲۱, ۲۴, ۲۸, ۳۶, ۴۲, ۴۸,$$
$$۵۶, ۶۳, ۷۲, ۸۴, ۱۱۲, ۱۲۶, ۱۴۴, ۱۶۸, ۲۵۲, ۳۳۶, ۵۰۴, ۱۰۰۸\}$$

همان‌طور که مشخص است عدد ۱۰۰۸ دارای ۳۰ مقسوم‌علیه مثبت است، بنابراین طبق نکته‌ی ۳ حاصل‌ضرب تمام آن مقسوم‌علیه‌ها برابر $۱۰۰۸^{۱۵}$ است که اگر ۱۰۰۸ را تقریباً ۱۰۰۰ در نظر بگیریم عدد حاصل $۱۰^{۴۵}$ خواهد شد که عددی ۴۶ رقمی است.

نکته ٤

اگر عدد n به‌صورت $n = P_۱^{\alpha_۱}.P_۲^{\alpha_۲}.\cdots.P_k^{\alpha_k}$ به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه شده باشد آن‌گاه تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن برابر $(\alpha_۱+۱).(\alpha_۲+۱).\cdots.(\alpha_k+۱)$ خواهد بود.

با توجه به نکته‌ی فوق در تست قبل تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۰۰۸ با توجه به تجزیه‌ی آن که به‌صورت $۷^۱ \times ۳^۲ \times ۲^۴$ است برابر $(۱+۱).(۱+۲).(۱+۴)$ یعنی ۳۰ به‌دست می‌آید و نیازی به نوشتن تمام مقسوم‌علیه‌های آن نیست.

با توجه به نکته‌ی ۴ درستیِ نکته‌ی ۲ را بار دیگر درک خواهید کرد به این صورت که اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n عددی فرد باشد آن‌گاه تمام $(\alpha_i+۱)$ها فرد شده و در نتیجه همه‌ی α_iها زوج خواهند شد و زوج بودن تمام توان‌ها در تجزیه‌ی عدد به حاصل‌ضرب عوامل اول به آن معناست که آن عدد مربع کامل است.