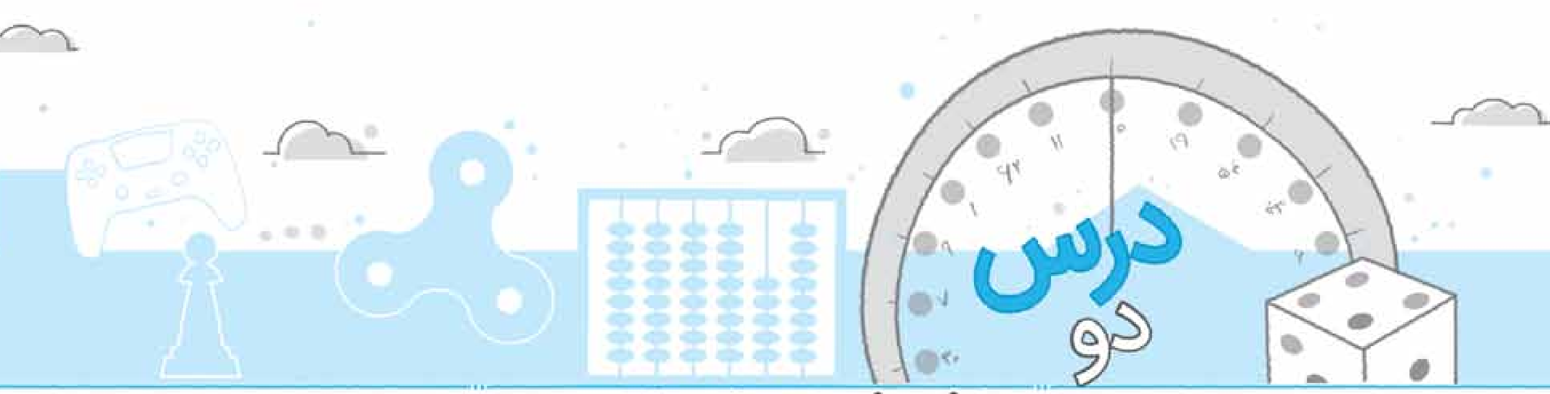

بخش‌پذیری در اعداد صحیح

با مفهوم بخش‌پذیری در اعداد صحیح همگی کم و بیش آشناییم. برای مثال ۴ بر ۲ بخش‌پذیر است، چون کسر $۲ = \frac{۴}{۲}$ عددی صحیح است ولی ۴ بر ۳ بخش‌پذیر نیست چون $\frac{۴}{۳}$ عددی صحیح نیست.

بنابراین یک جورهایی می‌توان گفت اگر $q = \frac{a}{b}$ عددی صحیح شود (a و b اعداد صحیح و $b \neq ۰$ است)، a بر b بخش‌پذیر است.

گفتیم یک جورهایی، چون دانشمندان! در تعریف بخش‌پذیری به دلایلی که کمی جلوتر به شما خواهیم گفت، تصمیم گرفته‌اند این کسر را طرفین‌وسطین‌شده بیاورند!

حواستون‌باشه! عدد صحیح a را بر عدد صحیح b بخش‌پذیر می‌گویند، اگر عدد صحیحی مثل q پیدا شود به طوری که: $a = bq$

تست **چند عدد دورقمی وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشد؟**

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۱

پاسخ **گزینهٔ «۱»** دیدیم که اگر a بر b بخش‌پذیر باشد، $a = bq$ است. بنابراین اگر x بر ۴ بخش‌پذیر باشد، می‌توان نوشت: $x = ۴q$

می‌خواهیم عدد دورقمی باشد، بنابراین: $۱۰ \leq x \leq ۹۹ \Rightarrow ۱۰ \leq ۴q \leq ۹۹ \Rightarrow ۲/۵ \leq q \leq ۲۴/۷۵$

پس q از ۳ تا ۲۴ می‌تواند باشد: $۲۴ - ۳ + ۱ = ۲۲$

نکته

۱ حتماً یادتان هست که تعداد عددهای طبیعی بزرگ‌تر مساوی a و کوچک‌تر مساوی b برابر است با: $b - a + ۱$

۲ تعداد مضارب طبیعی عدد a که کوچک‌تر مساوی n باشد، برابر است با: $[\frac{n}{a}]$

این نکتهٔ دوم یعنی این‌که اگر برای مثال بخواهیم پیدا کنیم چند عدد طبیعی کوچک‌تر مساوی ۲۰۰ وجود دارد که بر ۵ بخش‌پذیر باشد، به جای محاسبه‌ای که در سؤال قبل انجام دادیم، می‌توانیم خیلی راحت بنویسیم: $[\frac{۲۰۰}{۵}] = ۴۰$

این کار را در سؤال بعد تمرین می‌کنیم:

تست **چند عدد از مجموعهٔ {۲۳۴,۲۳۵,...,۴۳۲} بر ۶ بخش‌پذیر است؟**

۱) ۳۷ ۲) ۳۸ ۳) ۳۹ ۴) ۴۰

پاسخ **گزینهٔ «۲»** اول مضارب ۶ که کوچک‌تر مساوی عدد ۴۳۲ است را پیدا می‌کنیم: $[\frac{۴۳۲}{۶}] = ۷۲$

اساساً مضارب ۶ را در فاصلهٔ ۲۴۳,۲۳۵,...,۴۳۲ می‌خواهیم ولی مضارب ۶ را در فاصلهٔ ۱,۲,...,۴۳۲ پیدا کرده‌ایم.

پس یک سری مضارب ۶ را زیاد حساب کرده‌ایم که باید آن‌ها را پیدا کرده و کم کنیم:

$$\overbrace{\underbrace{۱,۲,۳,\ldots,۲۳۳}_{\text{نمی‌خواهیم}},\underbrace{۲۳۴,\ldots,۴۳۲}_{\text{می‌خواهیم}}}^{\text{کل}} \Rightarrow [\frac{۲۳۳}{۶}] = ۳۸ \Rightarrow ۷۲ - ۳۸ = ۳۴$$

عادکردن

برعکس رابطهٔ بخش‌پذیری ما یک رابطه‌ای داریم به نام عادکردن:

حواستون‌باشه! ۱ اگر $a = bq$ آن‌گاه b عاد می‌کند a را (یا این‌که b می‌شمارد a را). $a = b.q \Leftrightarrow b | a$

۲ از رابطهٔ $a = bq$ دو نتیجه می‌توان گرفت:

$$a = bq \Leftrightarrow \begin{cases} \text{a بر b بخش‌پذیر است.} \\ \text{b عاد می‌کند a را} \end{cases}$$

دقت کنید هرگاه ضرب چند عدد برابر عددی دیگر شود، هر کدام از آن چند عدد، عدد دیگر را عاد می‌کند. برای مثال:

$$۳۰=۲\times۳\times۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲|۳۰ \quad ۶|۳۰ \\ ۳|۳۰ \quad ۱۰|۳۰ \\ ۵|۳۰ \quad ۱۵|۳۰ \end{cases}$$

تست **اگر $a^۶-b=۱$ باشد، کدام گزینه همواره درست نیست؟**

۱) $a^۲-۱|b$ ۲) $a^۲+۱|b$ ۳) $a^۲-a+۱|b$ ۴) $a^۲+a+۱|b$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** **روش اول:**

$$a^۶-b=۱ \Rightarrow a^۶-۱=b \Rightarrow (a^۳-۱)(a^۳+۱)=b \Rightarrow (a-۱)(a^۲+a+۱)(a+۱)(a^۲-a+۱)=b$$

وقتی ضرب دو یا چند عدد برابر عددی مثل b شود، همهٔ آن عددها b را عاد می‌کند. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) درست است ولی گزینهٔ (۲) لزوماً درست نیست.

روش دوم: سعی می‌کنیم مقادیری برای a و b پیدا کنیم تا شرط سؤال برقرار شود.

اگر $a=۲$ و $b=۶۳$ باشد، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $a^۲-۱|b \Rightarrow ۳|۶۳$ ✓ ۲ $a^۲+۱|b \Rightarrow ۵|۶۳$ ×

۳ $a^۲-a+۱|b \Rightarrow ۳|۶۳$ ✓ ۴ $a^۲+a+۱|b \Rightarrow ۷|۶۳$ ✓

چند تا نکتهٔ مهم دربارهٔ عادکردن

۱ برای تشخیص درستی یا نادرستی یک رابطهٔ عادکردن کافی است آن را ۹۰ درجه خلاف عقربه‌های ساعت بچرخانید تا به یک کسر تبدیل شود. اگر حاصل کسر عدد صحیحی شد، رابطه درست است وگرنه رابطه نادرست است. برای مثال:

$۱۵|۵ \xrightarrow{۹۰^\circ} \frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$ × رابطه نادرست است.

$۸|۱۶ \xrightarrow{۹۰^\circ} \frac{۱۶}{۸}=۲$ رابطه درست است.

۲ اگر a عددی صحیح باشد و $x|a$ آن‌گاه x مقسوم‌علیه a است.

برای مثال اگر $x|۶$ آن‌گاه x می‌تواند هر یک از مقسوم‌علیه‌های ۶ یعنی عددهای $\pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۶$ باشد.

۳ اگر a عددی صحیح باشد و $a|x$ آن‌گاه x مضرب a است.

برای مثال اگر $۸|x$ آن‌گاه x می‌تواند هر یک از عددهای مقابل باشد: $۰,\pm۸,\pm۱۶,\pm۲۴,\dots$

تست **چند عدد طبیعی وجود دارد که مقسوم‌علیه ۱۲۰۰ و مضرب ۲۴ باشد؟**

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ **گزینهٔ «۲»** دنبال xهایی هستیم که مقسوم‌علیه ۱۲۰۰ باشند، این یعنی: $x|۱۲۰۰\ (I)$

همچنین می‌خواهیم x مضرب ۲۴ باشد، یعنی: $۲۴|x\ (II)$

ابتدا رابطهٔ (II) را به تساوی تبدیل می‌کنیم بعد در رابطهٔ (I) قرار می‌دهیم: $۲۴|x \Rightarrow x=۲۴q \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (I)}} ۲۴q|۱۲۰۰$

حالا اگر بخواهیم این رابطه برقرار باشد، باید کسر $\frac{۱۲۰۰}{۲۴q}$ عددی صحیح شود. این کسر را ساده می‌کنیم: $\frac{۱۲۰۰}{۲۴q}=\frac{۵۰}{q}$

بنابراین q باید مقسوم‌علیه ۵۰ باشد. مقادیر طبیعی قابل قبول این‌ها هستند: $q=۱,۲,۵,۱۰,۲۵,۵۰$

تست **اگر $۱۰۰۱|n!$ و $۱۰۲۴|m!$ کم‌ترین مقدار $m+n$ کدام است؟**

۱) ۲۳ ۲) ۲۵ ۳) ۲۹ ۴) ۲۰۲۵

پاسخ **گزینهٔ «۲»** عددها را تجزیه می‌کنیم:

$۱۰۰۱=۷\times۱۱\times۱۳$

$۱۰۲۴=۲^{۱۰}$

چون $۱۰۰۱|n!$ پس کسر $\frac{n!}{۷\times۱۱\times۱۳}$ باید عددی صحیح باشد. کوچک‌ترین عدد فاکتوریلی که هر سه عامل ۱۳,۱۱,۷ را دارد همان !۱۳ است. پس $n=۱۳$.

هم‌چنین می‌خواهیم کسر $\frac{m!}{۲^{۱۰}}$ عددی صحیح شود، پس m باید ۱۰تا عامل ۲ داشته باشد. شروع می‌کنیم می‌رویم جلو تا پیدا کنیم اولین عدد فاکتوریلی که ۱۰ عامل ۲ دارد چه عددی است:

عدد	$۱\times\underline{۲}\times۳\times\underset{}{\overset{۲^۲}{\underline{۴}}}\times۵\times\overset{۲\times۳}{\underline{۶}}\times۷\times\overset{۲^۳}{\underline{۸}}\times۹\times\overset{۲\times۵}{\underline{۱۰}}\times۱۱\times\overset{۲^۲\times۳}{\underline{۱۲}}$					
تعداد عوامل ۲	(۱)	(۲)	(۱)	(۳)	(۱)	(۲)

همان‌طور که می‌بینید کوچک‌ترین مقدار m برابر ۱۲ است؛ بنابراین: $\min(m+n)=۱۲+۱۳=۲۵$

چند ویژگی ابتدایی از بخش‌پذیری

۱ هر عددی بر خودش و قرینه‌اش بخش‌پذیر است: $a \mid \pm a$

۲ هر عددی بر ۱ و ۱− بخش‌پذیر است: $\pm۱ \mid a$

۳ صفر بر همهٔ عددها بخش‌پذیر است: $a \mid ۰$

(چون اگه تبدیلش کنی به کسر می‌شه $\frac{۰}{a}=۰$ که عددی صحیحه!)

۴ هیچ عدد مخالف صفری بر صفر بخش‌پذیر نیست: $۰ \nmid a , a\neq ۰$

(این هم واضحه دیگه. اگه تبدیل به کسرش کنی خیلی بد می‌شه! $\frac{a}{۰}$)

۵ صفر بر خودش بخش‌پذیر است! $۰ \mid ۰$

این را ممکن است به کسرش فکر کنید و بگویید نمی‌شود که!

اما اول درس یادتان هست گفتیم که دانشمندان به دلایلی تصمیم گرفته‌اند فرمول رابطهٔ عادکردن را طرفین‌وسطین‌شده بدهند. دلیلش همین‌هاست. چون دیدیم که: $a \mid b \Leftrightarrow b=aq$

بنابراین چون $۰=۰\times q \Leftrightarrow ۰ \mid ۰$

تست کدام‌یک از رابطه‌های زیر فقط به ازای یک مقدار صحیح a برقرار است؟

۱) $۰ \mid ۲a^۲-a+۱$
۲) $۰ \mid ۲a^۲+a-۱$
۳) $۰ \mid a^۲+a-۲$
۴) $۰ \mid a^۲-a-۲$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** دیدیم که تنها عددی که بر صفر بخش‌پذیر است خود صفر است پس باید دنبال معادله‌ای بگردیم که یک جواب صحیح داشته باشد.

۱ $۲a^۲-a+۱ \Rightarrow \Delta=۱-۸=-۷<۰ \Rightarrow$ همواره مثبت است. جواب ندارد.

۲ $۲a^۲+a-۱=(۲a-۱)(a+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ a=\frac{۱}{۲} \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$ یک جواب دارد.

۳ $a^۲+a-۲=(a+۲)(a-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ a=-۲ \end{cases}$ دو جواب دارد.

۴ $a^۲-a-۲=(a-۲)(a+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ a=-۱ \end{cases}$ دو جواب دارد.

نکته

این دو نکته خارج از کتاب است اما حتماً باید بلد باشید. *(چون تو کنکور میاد!)*

۱ **تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد:** برای پیداکردن تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد n اول آن را به عوامل اولش تجزیه می‌کنیم:

$$n=P_۱^{\alpha_۱}.P_۲^{\alpha_۲}\cdots P_k^{\alpha_k}$$

سپس از رابطهٔ مقابل تعداد مقسوم‌علیه‌ها را پیدا می‌کنیم: تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد n $=(\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)\cdots(\alpha_k+۱)$

۲ **توان عدد اول P در تجزیهٔ !n:** برای پیداکردن تعداد عوامل عدد اول P در تجزیهٔ !n از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$[\frac{n}{P}]+[\frac{n}{P^۲}]+[\frac{n}{P^۳}]+\cdots$$

تست **عدد ۱۸۰۰ چند مقسوم‌علیه طبیعی و چند مقسوم‌علیه مربع کامل دارد؟**

۱) ۱۸ ـ ۸ ۲) ۱۸ ـ ۴ ۳) ۳۶ ـ ۸ ۴) ۳۶ ـ ۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اول عدد را تجزیه می‌کنیم تا ببینیم چه خبر است:

$$۱۸۰۰ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۲$$

طبق آن‌چه گفتیم تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن برابر است با:

$$(۳+۱)(۲+۱)(۲+۱) = ۳۶$$

حالا بررسی می‌کنیم چند تا از این مقسوم‌علیه‌ها مربع کامل است.

فرض کنید x مقسوم‌علیه ۱۸۰۰ باشد، این یعنی این‌که کسر $\frac{۱۸۰۰}{x}$ عددی صحیح است. *(مفهوم مقسوم‌علیه همینه دیگه!)* حالا اگر x بخواهد مربع کامل هم باشد، باید توان تمام عوامل آن زوج باشد.

از طرفی واضح است که x فقط می‌تواند عوامل ۲،۳و۵ داشته باشد. *(وگرنه کسر ساده نمی‌شه.)*

$$\frac{۱۸۰۰}{x} = \frac{۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۲}{۲^\alpha \times ۳^\beta \times ۵^\gamma}$$

پس ما دوتا شرط داریم. اول این‌که توان عوامل صورت بزرگ‌تر مساوی توان عوامل مخرج باشد و دوم این‌که α، β و γ هر سه زوج باشند.

پس هر کدام از α، β و γ دو حالت می‌توانند داشته باشند، یا صفر باشند یا ۲. بنابراین:

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های مربع کامل: } \underset{\substack{۰\\۲}}{\overset{\alpha}{۲}} \times \underset{\substack{۰\\۲}}{\overset{\beta}{۲}} \times \underset{\substack{۰\\۲}}{\overset{\gamma}{۲}} = ۸$$

(برای مثال اگر $\alpha = ۲$، $\beta = ۰$ و $\gamma = ۲$ باشه، مقسوم‌علیه ما می‌شه $۲^۲ \times ۳^۰ \times ۵^۲ = ۱۰۰$ که همین‌جور که می‌بینید، مربع کامله)

تست **بزرگ‌ترین مقدار n از رابطهٔ $۸^n \mid ۱۰۰!$ کدام است؟**

۱) ۱۳ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اول از رابطه‌ای که گفتیم توان عدد ۲ را در تجزیهٔ !۱۰۰ پیدا می‌کنیم:

$$\left[\frac{۱۰۰}{۲}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۴}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۸}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۱۶}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۳۲}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۶۴}\right]$$

یک چیزی هم خوب است یادتان بدهیم. یک کار راحت‌تر این است که عدد را همین‌طور به ۲ تقسیم کنیم و بعد خارج قسمت‌ها را با هم جمع کنیم:

۱۰۰ ÷ ۲ → ۵۰ ÷ ۲ → ۲۵ ÷ ۲ → ۱۲ ÷ ۲ → ۶ ÷ ۲ → ۳ ÷ ۲ → ۱

$$\Rightarrow ۵۰+۲۵+۱۲+۶+۳+۱ = ۹۷$$

(حواستون باشه این فرموله مال اعداد اوله. یه وقت تو مخرج ۸ قرار ندین!)

خب الان فهمیدیم در تجزیهٔ !۱۰۰ توان عدد دو، ۹۷ است. حالا اگر قرار باشد $۸^n \mid ۱۰۰!$ داریم:

$$\frac{۱۰۰!}{۸^n} = \frac{۲^{۹۷} \times \cdots}{۲^{۳n}}$$

این کسر باید عددی صحیح باشد بنابراین توان ۲ در صورت باید بزرگ‌تر مساوی توان ۲ در مخرج باشد، بنابراین:

$$۳n \le ۹۷ \Rightarrow n_{max} = ۳۲$$

ویژگی‌های تکمیلی رابطهٔ عادکردن

یک رابطهٔ عادکردنی مثل $a \mid b$ را در نظر بگیرید. در این بخش می‌خواهیم بررسی کنیم از این $a \mid b$ چه نتایجی می‌شود گرفت و چه کارهایی با آن می‌شود کرد.

۱

$$a \mid b \Rightarrow \begin{cases} ma \mid mb \\ a^n \mid b^n \end{cases}$$

طرفین یک رابطهٔ عادکردن را می‌شود در هر عددی مثل m ضرب کرد یا به توان رساند.

(واضحه دیگه وقتی $a \mid b$ یعنی کسر $\frac{b}{a}$ عدد صحیحه و وقتی یه کسر عدد صحیح باشه وقتی صورت و مخرجش رو در یه عدد ضرب کنیم باز هم عدد صحیحه و وقتی هم به توان n برسونیمش باز هم عدد صحیحه.)

$$۲ \mid ۴ \xrightarrow{\text{به توان } ۳} ۸ \mid ۶۴ \checkmark \qquad ۲ \mid ۴ \xrightarrow{\text{طرفین} \times ۳} ۶ \mid ۱۲ \checkmark$$

۲

$$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$$

این خیلی رابطهٔ مهمی است و به زودی می‌بینید چه‌قدر کاربرد دارد. دلیلش هم خیلی واضح است. وقتی $a \mid b$ یعنی این‌که می‌دانیم $\frac{b}{a}$ عددی صحیح است و وقتی یک کسر عددی صحیح باشد، صورت کسر را در هر عدد صحیحی ضرب کنیم، باز هم حاصل عددی صحیح است.

$$۲ \mid ۴ \xrightarrow{\text{سمت راست} \times ۳} ۲ \mid ۱۲$$

پس یادتان باشد سمت راست رابطهٔ عادکردن را می‌شود در هر عدد صحیحی ضرب کرد.

۳

$a \mid b$ و c مقسوم‌علیه a باشد (یعنی $c \mid a$) $\Rightarrow c \mid b$

این هم درکش ساده است. $a \mid b$ یعنی b بر a بخش‌پذیر است. c مقسوم‌علیه a است، *یعنی a بر c بخش‌پذیره*. بنابراین مشخص است b بر c هم بخش‌پذیر است. این یعنی این‌که اگر یک رابطهٔ عادکردن دیدید *می‌توانید* سمت چپش را به هر کدام از مقسوم‌علیه‌هایش تقسیم کنید.

$$۱۸ \mid ۳۶ \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۳}} ۶ \mid ۳۶$$

۴ این رابطه را این‌جوری هم می‌توان گفت:

$$ab \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \end{cases}$$

۵ $a \mid b \Rightarrow |a| \le |b| , b \neq ۰$

وقتی کسر $\frac{b}{a}$ عدد صحیح است واضح است که باید قدرمطلق صورت از قدرمطلق مخرج بزرگ‌تر یا مساوی آن باشد. $۲ \mid -۴ \Rightarrow |۲| \le |-۴|$

تست اگر $۲a \mid ۳b$ کدام نتیجه‌گیری ممکن است درست نباشد؟

۱) $a \mid ۳b$ ۲) $۲a \mid ۳b^۲$ ۳) $a \mid ۶b$ ۴) $a \mid b$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** در ۱ سمت چپ را تقسیم بر ۲ کرده‌ایم:

$$۲a \mid ۳b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۲}} a \mid ۳b \checkmark$$

در ۲ سمت راست را در b ضرب کرده‌ایم:

$$۲a \mid ۳b \xrightarrow{\text{سمت راست} \times b} ۲a \mid ۳b^۲ \checkmark$$

در ۳ سمت راست را در ۲ ضرب و قسمت چپ را بر ۲ تقسیم کرده‌ایم:

$$۲a \mid ۳b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۲}} a \mid ۳b \xrightarrow{\text{سمت راست} \times ۲} a \mid ۶b \checkmark$$

اما ۴ ممکن است درست نباشد برای مثال به ازای $a = ۳$ و $b = ۲$ رابطهٔ صورت سؤال برقرار است اما: $۳ \nmid ۲$

تست اگر $a^۲ \mid ۲b$ آن‌گاه رابطهٔ $a \mid ۲$ .... و رابطهٔ $a \mid b$ ....

۱) درست است ـ درست است ۲) ممکن است درست نباشد ـ درست است

۳) ممکن است درست نباشد ـ ممکن است درست نباشد ۴) درست است ـ ممکن است درست نباشد

پاسخ **گزینهٔ «۲»** این‌که از $a^۲ \mid ۲b$ نمی‌توانیم همواره نتیجه بگیریم که $a \mid ۲$ واضح است، چون برای مثال کافی است $a = ۳$ و $b = ۱۸$ باشد.

اما تشخیص درستی یا نادرستی رابطهٔ دوم احتیاج به دقت بیشتری دارد. به کسر $\frac{۲b}{a^۲}$ توجه کنید، این دوتا a در مخرج باید ساده شود. اگر a فرد باشد، واضح است که $a^۲$ با ۲ ساده نمی‌شود و در نتیجه b باید بر $a^۲$ بخش‌پذیر باشد پس b بر a هم بخش‌پذیر است.

اما فرض کنید a زوج باشد، در این صورت $a = ۲k$ در این صورت:

$$\frac{۲b}{a^۲} = \frac{۲b}{۴k^۲} = \frac{b}{۲k^۲} = \frac{b}{(۲k) \times k}$$

می‌دانیم این کسر عددی صحیح است؛ بنابراین b باید یک جوری باشد که $۲k^۲$ در مخرج ساده شود. یعنی b هم باید بر ۲ بخش‌پذیر باشد و هم بر k و بنابراین باز هم بر a بخش‌پذیر است.

تست اگر $a^۷ \mid b^۵$ کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $a^۲ \mid b$ ۲) $a^۳ \mid b^۲$ ۳) $a^۴ \mid b^۳$ ۴) $a^{۱۰} \mid b^۷$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** یک راه برای پاسخ‌دادن این مدل سؤال‌ها پیداکردن مثال نقض برای ردکردن گزینه‌هاست. برای این کار باید تلاش کنیم a و b را جوری در نظر بگیریم که دو طرف رابطهٔ صورت سؤال برابر شود. یعنی الان می‌خواهیم $a^۷ = b^۵$ شود. اگر $a = b = ۱$ باشد، دو طرف برابر می‌شوند ولی این مثال نقض به دردمان نمی‌خورد چون به ازای آن هر ۴ گزینه درست می‌شود. پس باید یک مثال دیگر پیدا کنیم. کوچک‌ترین مقادیر a و b که دو طرف را برابر می‌کند $a = ۲^۵$ و $b = ۲^۷$ است. *(دقت کنید توان این رو داریم به اون، توان اون رو داریم به این!)* در این صورت $(۲^۵)^۷ = (۲^۷)^۵$ و رابطهٔ $a^۷ \mid b^۵$ به صورت $۲^{۳۵} \mid ۲^{۳۵}$ درمی‌آید که درست است. حالا اگر با همین عددها گزینه‌ها را بررسی کنیم داریم:

۱ $a^۲ \mid b \Rightarrow (۲^۵)^۲ \mid ۲^۷ \Rightarrow ۲^{۱۰} \mid ۲^۷$ ×

۲ $a^۳ \mid b^۲ \Rightarrow (۲^۵)^۳ \mid (۲^۷)^۲ \Rightarrow ۲^{۱۵} \mid ۲^{۱۴}$ ×

۳ $a^۴ \mid b^۳ \Rightarrow (۲^۵)^۴ \mid (۲^۷)^۳ \Rightarrow ۲^{۲۰} \mid ۲^{۲۱}$ ✓

۴ $a^{۱۰} \mid b^۷ \Rightarrow (۲^۵)^{۱۰} \mid (۲^۷)^۷ \Rightarrow ۲^{۵۰} \mid ۲^{۴۹}$ ×

حواستان باشد که اثبات تشریحی این نوع سؤال‌ها ساده نیست.

برای مثال اگر بخواهیم از درستی $a^۷ \mid b^۵$ به درستی $a^۴ \mid b^۳$ برسیم باید این کار را بکنیم:

$$a^۷ \mid b^۵ \xrightarrow{\text{به توان ۴}} a^{۲۸} \mid b^{۲۰} \xrightarrow{\text{سمت راست} \times b} a^{۲۸} \mid b^{۲۱} \xrightarrow{\text{ریشهٔ هفتم می‌گیریم}} a^۴ \mid b^۳$$

نکته اگر بخواهیم رابطهٔ $a^m \mid b^n \Rightarrow a^p \mid b^q$ درست باشد، باید $np \le mq$ باشد.

برای درک بهتر:

$$a^m \mid b^n \Rightarrow a^p \mid b^q \Rightarrow$$ نزدیک × نزدیک $\le$ دور × دور

یک ویژگی مهم دیگر از بخش‌پذیری

$$\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a \mid b+c \\ a \mid b-c \\ a \mid bc \\ a \mid mb \pm nc \end{cases}$$

این ویژگی خیلی کاربرد دارد و برای مثال در بخش بعد که معادله‌های عادکردنی است، کاربردهایش را می‌بینید.

یعنی اگر عددی مثل a هر دو عدد b و c را عاد کند، a هر مضربی از b به علاوه یا منهای هر مضربی از c را عاد می‌کند. خوب است این یکی را برایتان اثبات کنیم تا با اثبات این نوع رابطه‌ها آشنا شوید:

$$\left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid mb+nc$$

$$\begin{cases} a \mid b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times m} mb = maq \\ a \mid c \Rightarrow c = aq' \xrightarrow{\times n} nc = naq' \end{cases} \xrightarrow{\oplus} mb+nc = maq+naq' = a\underbrace{(mq+nq')}_{q''}$$

$$\Rightarrow mb+nc = aq'' \Rightarrow a \mid mb+nc$$

تست مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که هر دو عدد $۶n+۵$ و $۷n+۳$ بر آن بخش‌پذیرند، کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۶　　۳) ۸　　۴) ۱۰

پاسخ **گزینهٔ «۳»** عدد را a می‌نامیم. هر دو عدد $۶n+۵$ و $۷n+۳$ بر a بخش‌پذیرند، بنابراین:

$$\begin{matrix} a \mid ۷n+۳ \xrightarrow{\text{سمت راست } \times ۶} a \mid ۴۲n+۱۸ \\ a \mid ۶n+۵ \xrightarrow{\text{سمت راست } \times ۷} a \mid ۴۲n+۳۵ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} a \mid ۱۷$$

در این مدل سؤال‌ها باید با ضرب‌کردن سمت راست‌ها، متغیر را حذف کنیم. پس بزرگ‌ترین مقدار a برابر ۱۷ است که مجموع ارقام آن برابر $۸ = ۱ + ۷$ است.

تست از رابطهٔ $۷ \mid ۵۳m-۱۱$ کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $۷ \mid m-۱$　　۲) $۷ \mid m-۲$　　۳) $۷ \mid m+۱$　　۴) $۷ \mid m+۲$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** با توجه به گزینه‌ها باید از شرط ضریب m یعنی ۵۳ و ۱۱− راحت شویم. از ویژگی‌های عادکردن استفاده می‌کنیم.

سعی می‌کنیم دوروبر عدد ۵۳ و ۱۱− مضرب ۷ پیدا کنیم:

$$۷ \mid ۴۹ \Rightarrow \begin{matrix} ۷ \mid ۴۹m \\ \text{از طرفی: } ۷ \mid ۵۳m-۱۱ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} ۷ \mid ۴m-۱۱$$

دیدیم وقتی سمت چپ در رابطهٔ عادکردن یکسان است می‌توانیم سمت راست‌ها را از هم کم کنیم. حالا می‌رویم سراغ ۱۱−. داریم:

$$\begin{matrix} ۷ \mid ۴m-۱۱ \\ ۷ \mid ۷ \end{matrix} \xrightarrow{\oplus} ۷ \mid ۴m-۴ \Rightarrow ۷ \mid ۴(m-۱)$$

اگر این رابطه را به کسر تبدیل کنیم، به صورت $\frac{۴(m-۱)}{۷}$ درمی‌آید. این یعنی $۴(m-۱)$ بر ۷ بخش‌پذیر است و چون ۴ نمی‌تواند بر ۷ بخش‌پذیر باشد، پس $m-۱$ باید بر ۷ بخش‌پذیر باشد و در نتیجه:

$$۷ \mid m-۱$$

یک ویژگی دیگر این است که از $a \mid b$ و $c \mid d$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $ac \mid bd$.

تست اگر $۳m+۱$ بر ۵ و $۹m+۱$ بر ۷ بخش‌پذیر باشد، کدام‌یک از عبارات زیر بر ۳۵ بخش‌پذیر است؟

۱) $۸m^۲+۱۲m+۱$　　۲) $۸m^۲-۱۲m+۱$　　۳) $۸m^۲+۱۲m-۱$　　۴) $۸m^۲-۱۲m-۱$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** همان‌طور که در بالا گفتیم اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ باشند، می‌توانیم طرفین این دو رابطه را در هم ضرب کنیم:

$$\left.\begin{matrix} a \mid b \\ c \mid d \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac \mid bd$$

بنابراین:

$$\begin{matrix} ۵ \mid ۳m+۱ \\ ۷ \mid ۹m+۱ \end{matrix} \xrightarrow{\times} ۳۵ \mid (۳m+۱)(۹m+۱) \Rightarrow ۳۵ \mid ۲۷m^۲+۱۲m+۱$$

اما در هیچ‌کدام از گزینه‌ها ضریب $m^۲$ برابر ۲۷ نیست؛ بنابراین:

$$\begin{matrix} ۳۵ \mid ۲۷m^۲+۱۲m+۱ \\ ۳۵ \mid ۳۵m^۲ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} ۳۵ \mid ۸m^۲-۱۲m-۱$$

تست اگر $۶|۱۱n-۱$ و $۳۶|۵n^۲+۴n+a$ کوچک‌ترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۱۱   ۳) ۲۵   ۴) ۳۵

پاسخ **گزینهٔ «۴»** **روش اول:** این مدل سؤال‌ها در تمرین‌های کتاب درسی آمده و یک مقدار سخت است. فکر کردم بد نیست یک نمونه این‌جا برایتان حل کنیم:

$$\begin{matrix} ۶|۱۱n-۱ \\ ۶|۱۲n \end{matrix} \xrightarrow{(-)} ۶|n+۱ \quad (II) \qquad \begin{matrix} ۶|۱۱n-۱ \\ ۶|۶n \end{matrix} \xrightarrow{(-)} ۶|۵n-۱ \quad (I)$$

با ضرب‌کردن دو رابطهٔ (I) و (II) در هم داریم:

$$۳۶|(۵n-۱)(n+۱) \Rightarrow ۳۶|۵n^۲+۴n-۱$$

پس $۵n^۲+۴n-۱$ بر ۳۶ بخش‌پذیر است اما مشکل این‌جاست که ۱− طبیعی نیست؛ بنابراین:

$$\begin{matrix} ۳۶|۵n^۲+۴n-۱ \\ ۳۶|۳۶ \end{matrix} \xrightarrow{(+)} ۳۶|۵n^۲+۴n+۳۵$$

پس کوچک‌ترین مقدار a برابر ۳۵ است.

روش دوم: یک عدد کوچک n پیدا می‌کنیم که رابطهٔ $۶|۱۱n-۱$ به ازای آن برقرار باشد. با کمی دقت متوجه می‌شویم به ازای $n=-۱$ رابطه برقرار است. حالا اگر در رابطهٔ $۳۶|۵n^۲+۴n+a$ به جای n عدد ۱− را قرار دهیم، داریم:

$$۳۶|۵-۴+a \Rightarrow ۳۶|۱+a$$

مشخص است که کوچک‌ترین مقدار طبیعی a برابر ۳۵ است.

معادله‌های عادکردنی

یک مدل بسیار پرتکرار در سؤال‌های بخش‌پذیری سؤال‌هایی مثل این است:

«به ازای چند عدد صحیح رابطهٔ $x-۲|۵x+۱$ برقرار است؟»

این مدل سؤال‌ها را معادله‌های عادکردنی می‌نامیم. *(چون به جای تساوی علامت عادکردن داره!)*

روش اصلی پاسخ‌گویی به این نوع سؤال‌ها ضرب‌کردن سمت راست رابطه در یک عدد و یکسان‌کردن ضریب‌هاست. الان بیشتر توضیح می‌دهیم منظورمان چیست. بیایید همین سؤال بالا را با هم حل کنیم:

۱ می‌دانیم هر عددی خودش را عاد می‌کند. پس عبارت سمت چپ هم خودش را می‌شمارد.

$$x-۲|x-۲$$

۲ از طرفی دیدیم که می‌توانیم سمت راست هر عبارت عادکردنی را در هر عدد صحیحی که بخواهیم ضرب کنیم. سمت راست این رابطه را در ۵ ضرب می‌کنیم. چرا در ۵؟ صورت سؤال را ببینید، ضریب x در عبارت $۵x+۱$ عدد ۵ است. به همین خاطر این را هم در ۵ ضرب می‌کنیم تا بعداً ضریب‌ها ساده شود:

$$x-۲|x-۲ \xrightarrow{\text{سمت راست}\times ۵} x-۲|۵x-۱۰$$

۳ حالا از رابطهٔ $\begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix} \Rightarrow a|b-c$ استفاده می‌کنیم و ضریب x را حذف می‌کنیم.

$$\begin{matrix} x-۲|۵x-۱۰ \\ \underbrace{x-۲|۵x+۱}_{\text{رابطهٔ صورت سؤال}} \end{matrix} \xrightarrow{(-)} x-۲|۱۱$$

۴ حالا که سمت راست یک عدد ثابت است، عبارت سمت چپ (عبارت xدار) می‌تواند هر کدام از مقسوم‌علیه‌های آن عدد ثابت باشد:

$$x-۲|۱۱ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۱ \Rightarrow x=۳ \\ x-۲=-۱ \Rightarrow x=۱ \\ x-۲=۱۱ \Rightarrow x=۱۳ \\ x-۲=-۱۱ \Rightarrow x=-۹ \end{cases}$$

تست مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در رابطهٔ $۵x-۲|۹x+۷$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۱»**

$$\begin{matrix} ۵x-۲|۵x-۲ \xrightarrow{\text{سمت راست}\times ۹} ۵x-۲|۴۵x-۱۸ \\ ۵x-۲|۹x+۷ \xrightarrow{\text{سمت راست}\times ۵} ۵x-۲|۴۵x+۳۵ \end{matrix} \Rightarrow ۵x-۲|۵۳ \Rightarrow ۵x-۲=۵۳$$

$$\Rightarrow ۵x=۵۵ \Rightarrow x=۱۱ \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} ۱+۱=۲$$

چون بزرگ‌ترین عدد را خواسته، خود ۵۳ را در نظر گرفتیم.

تست به ازای چند عدد صحیح رابطهٔ $yx+8=x^2+3y$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

پاسخ **گزینهٔ «۳»** ابتدا رابطه را مرتب می‌کنیم:

$$yx+8=x^2+3y \Rightarrow yx-3y=x^2-8 \Rightarrow y(x-3)=x^2-8 \Rightarrow y=\frac{x^2-8}{x-3}$$

حالا اگر قرار باشد y عددی صحیح باشد، باید کسر $\frac{x^2-8}{x-3}$ عددی صحیح باشد؛ یعنی صورت آن بر مخرجش بخش‌پذیر باشد یا به بیان دیگر $x-3\mid x^2-8$.

$$x-3\mid x-3 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times(x+3)} \left.\begin{matrix}x-3\mid x^2-9\\ x-3\mid x^2-8\end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} x-3\mid 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x-3=1 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=8\\ x-3=-1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=4\end{cases}$$

نکته تستی

یک راه ساده‌تر برای پاسخ‌دادن به این سؤال‌ها این است که اگر عبارت سمت چپ ریشه داشت، ریشهٔ آن را در عبارت سمت راست قرار دهیم تا به یک عدد ثابت برسیم. عبارت سمت چپ آن عدد ثابت را می‌شمارد.

برای مثال در مثالی که حل کردیم یعنی $x-2\mid 5x+1$ اگر $x-2=0$ باشد، $x=2$ است که اگر آن را در عبارت $5x+1$ قرار دهیم می‌شود $5\times 2+1=11$ و عبارت سمت چپ یعنی $x-2$ عاد می‌کند ۱۱ را و سؤال خیلی ساده‌تر حل می‌شود یا در این تست آخر داشتیم:

$$x-3\mid x^2-8$$
$$x-3=0 \Rightarrow x=3 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } x^2-8} 9-8=1$$
$$\Rightarrow x-3\mid 1$$

حواستون باشه! حتی اگر عبارت سمت چپ ریشهٔ صحیح نداشت، باز هم می‌شود از نکتهٔ قبلی سؤال را حل کرد. کافی است ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار دهیم و عبارت را ساده کنیم، در این صورت عبارت سمت چپ صورت کسر عبارت سمت راست را عاد می‌کند.

برای مثال به تست اولی که حل کردیم نگاه کنید:

$$5x-2\mid 9x+7$$
$$5x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{5}$$

ریشه را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم و مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$9x+7 \xrightarrow{x=\frac{2}{5}} 9\times\frac{2}{5}+7=\frac{18}{5}+7=\frac{18+35}{5}=\frac{53}{5}$$

حالا عبارت سمت چپ صورت کسر را عاد می‌کند:

$$5x-2\mid 53$$

اما گاهی اوقات این معادله‌های عادکردنی از روش‌های معمول حل نمی‌شوند.

تست به ازای چند عدد صحیح n رابطهٔ $2^n-1\mid n^2-1$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ **گزینهٔ «۳»** می‌دانیم به ازای nهای بزرگ، رشد 2^n-1 از رشد n^2-1 بیشتر است؛ یعنی اگر کسر $\frac{n^2-1}{2^n-1}$ را در نظر بگیریم، از یک جایی به بعد مخرج کسر از صورت کسر بزرگ‌تر می‌شود و رابطه دیگر برقرار نیست. پس فقط در nهای کوچک رابطه برقرار است.

$n=1 \Rightarrow \frac{0}{1}=0$ ✓ $\quad n=2 \Rightarrow \frac{3}{3}=1$ ✓ $\quad n=3 \Rightarrow \frac{8}{7}$ ×

$n=4 \Rightarrow \frac{15}{15}=1$ ✓

$n=-1 \Rightarrow \frac{0}{-\frac{1}{2}}$ غیر قابل قبول؛ چون بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$ تعریف می‌شود. پس برای اعداد صحیح منفی رابطه برقرار نیست.

و از $n\geq 5$ مخرج از صورت بیشتر می‌شود.

$n=5 \Rightarrow \frac{24}{31}$ ×

باقی‌ماندهٔ مربع عدد فرد در تقسیم به ۸

در درس قبل دیدیم که اگر x عددی فرد باشد، مربع آن را می‌توان به صورت $8k+1$ نوشت. از این ایده سؤال‌هایی در این بخش می‌آید که بد نیست با آن‌ها آشنا شویم.

$$x=2q+1 \Rightarrow x^2=4q^2+4q+1=4\underbrace{q(q+1)}_{\text{حاصل‌ضرب دو عدد متوالی همواره زوج است.}}+1=4(2k)+1=8k+1$$

تست اگر x و y دو عدد طبیعی باشند به طوری که $xy+x=7^{17}$ باشد، باقی‌ماندهٔ $3x^2+2y^3+1$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ **گزینهٔ «۳»** می‌دانیم 7^{17} عددی فرد است. حاصل‌ضرب دو عدد برابر عددی فرد شده ولی هر دو فردند:

$$xy+x=7^{17} \Rightarrow x(y+1)=7^{17} \Rightarrow \begin{cases} \text{x فرد است.} \\ \text{y+1 فرد است.} \Rightarrow \text{y زوج است.} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} x^2=8q+1 \\ y=2q' \Rightarrow y^3=8q'^3 \end{array} \Rightarrow 3x^2+2y^3+1=3(8q+1)+2(8q'^3)+1=24q+3+16q'^3+1=\underbrace{24q+16q'^3}_{\text{مضرب ۸}}+4$$

تست اگر $a\,|\,2^n+1$ و $b\,|\,m^2+m+1$ باقی‌ماندهٔ $a^4+b^4+a^2b^2$ بر ۸ کدام است؟ (m و n اعداد طبیعی‌اند.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ **گزینهٔ «۴»** 2^n+1 عددی فرد است. همچنین $m^2+m+1=\underbrace{m(m+1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی زوج است.}}+1=2q+1$ پس m^2+m+1 نیز فرد است.

بنابراین عدد فرد $a|$ و عدد فرد $b|$ پس a و b هیچ‌کدام نمی‌توانند عددی زوج باشند پس a و b هر دو فردند، بنابراین هر سه عبارت a^4 و b^4 و a^2b^2 مربع‌های عددهایی فردند، $(a^2)^2$، $(b^2)^2$ و $(ab)^2$ بنابراین:

$$a^4+b^4+a^2b^2=8q+1+8q'+1+8q''+1=\underbrace{8(q+q'+q'')}_{\text{مضرب ۸}}+3$$

سه اتحاد مهم در بخش‌پذیری

به این اتحاد نگاه کنید: $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+b^{n-1})$

۱ از اینجا می‌توان نوشت: $a-b\,|\,a^n-b^n$

۲ همچنین اگر n فرد باشد می‌توان نوشت: $a+b\,|\,a^n+b^n$

۳ و اگر n زوج باشد: $a+b\,|\,a^n-b^n$

به بیان دیگر:

۱ a^n+b^n زمانی بر $a+b$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد.

۲ a^n-b^n همواره بر $a-b$ بخش‌پذیر است اما اگر n زوج باشد a^n-b^n بر $a+b$ نیز بخش‌پذیر است.

تست به ازای چند مقدار $n\le 300$ رابطهٔ $33\,|\,2^n+1$ برقرار است؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۰ ۳) ۵۹ ۴) ۶۰

پاسخ **گزینهٔ «۲»** با توجه به 2^n+1 در سمت راست رابطه، عدد ۳۳ شما را یاد چه توانی از ۲ می‌اندازد؟ بله: $33=32+1=2^5+1$

حالا به اتحادهایی که گفتیم فکر کنیم، کدامشان ساختاری شبیه صورت سؤال داده‌شده دارد؛ چون در هر ۲ طرف رابطه + داریم، پس باید از اتحاد مقابل کمک بگیریم: $a+b\,|\,a^n+b^n$ n فرد است

خب اگر $a=2^5$ و $b=1$ باشد، داریم: $2^5+1\,|\,(2^5)^{2k+1}+1^{2k+1} \Rightarrow 2^5+1\,|\,2^{10k+5}+1$

چون n باید فرد باشد آن را به صورت $2k+1$ در نظر گرفتیم.

با مقایسه با صورت سؤال می‌توان فهمید $n=10k+5$ است. اما گفته $n\le 300$ بنابراین:

$$0\le 10k+5\le 300 \Rightarrow 0\le 10k\le 295 \Rightarrow 0\le k\le 29/5 \Rightarrow k=0,1,2,\dots,29$$

تست: عدد $۲^{۲۸} - ۳^{۵۶}$ بر کدام‌یک از عددهای زیر بخش‌پذیر **نیست**؟

۱) ۳۵ ۲) ۹۱ ۳) ۱۱۹ ۴) ۱۸۷

پاسخ: **گزینهٔ «۲»** اگر بخواهیم از اتحادهای گفته‌شده استفاده کنیم، توان‌ها باید برابر باشند. بنابراین سعی می‌کنیم آن‌ها را برابر کنیم:

$۲۸ = ۲^۲ \times ۷$ $\quad$ $۵۶ = ۲^۳ \times ۷$

$۳^{۵۶} - ۲^{۲۸} = (۳^۴)^{۱۴} - (۲^۲)^{۱۴} = ۸۱^{۱۴} - ۴^{۱۴}$

۱۴ زوج است پس $۸۱^{۱۴} - ۴^{۱۴}$ هم بر $۸۱ - ۴ = ۷۷$ بخش‌پذیر است. (یعنی هم بر ۷ و هم بر ۱۱) و هم بر $۸۱ + ۴ = ۸۵$ بخش‌پذیر است (یعنی هم بر ۵ و هم بر ۱۷).

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$۳۵ = ۵ \times ۷$ ✓

$۳^{۵۶} - ۲^{۲۸}$ بر ۷ بخش‌پذیر است اما بر ۱۳ نه. $۹۱ = ۷ \times ۱۳$ ✗

$۱۸۷ = ۱۱ \times ۱۷$ ✓ $\quad$ $۱۱۹ = ۷ \times ۱۷$ ✓

قضیهٔ بالا را به صورت زیر نیز می‌توان گفت که اگر n و t اعدادی صحیح باشند:

۱ اگر $\frac{n}{t}$ صحیح باشد: $a^t - b^t \mid a^n - b^n$

۲ اگر $\frac{n}{t}$ فرد باشد: $a^t + b^t \mid a^n + b^n$

۳ اگر $\frac{n}{t}$ زوج باشد: $a^t + b^t \mid a^n - b^n$

تست: **به ازای چند عدد n از مجموعهٔ $A = \{۳, ۶, ۹, \dots, ۹۹\}$، $a^n + b^n$ به $a^۵ + b^۵$ بخش‌پذیر است؟**

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: **گزینهٔ «۱»** طبق نکتهٔ گفته‌شده رابطهٔ $a^۵ + b^۵ \mid a^n + b^n$، هنگامی برقرار است که $\frac{n}{۵}$ عددی فرد باشد، پس n مضرب فردی از ۵ است که عضو مجموعهٔ A نیز هست، یعنی n هم مضرب فرد ۵ است هم مضرب ۳، پس n به صورت زیر است:

$n = ۳۰k + ۱۵ \Rightarrow n = ۱۵, ۴۵, ۷۵ \rightarrow$ ۳ مقدار

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی دو عدد ۳۰ و ۴۵ را ببینید:

مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۳۰ $= \{۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۱۰, ۱۵, ۳۰\}$

مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۴۵ $= \{۱, ۳, ۵, ۹, ۱۵, ۴۵\}$

حالا مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مشترک این دو عدد را نگاه کنید:

مقسوم‌علیه‌های مشترک ۳۰ و ۴۵ $= \{۱, ۳, ۵, \overbrace{۱۵}^{\text{ب.م.م}}\}$

که در میان آن‌ها ۱۵ بزرگ‌ترین است.

اما خب برای عددهای بزرگ نمی‌شود این کار را کرد. اما پیش از آن خوب است با تعریف ب.م.م که آن را در ریاضیات با d نشان می‌دهند، آشنا شویم:

حواستون باشه! عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم و می‌نویسیم: $(a, b) = d$

هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ $d \mid a, d \mid b$ *(این یعنی d مقسوم‌علیه هردوئه!)*

۲ $c \mid a, c \mid b \Rightarrow \begin{cases} c \le d \\ c \mid d \end{cases}$ *(این ویژگی تضمین می‌کنه d کوچک‌ترینه!)*

۱ راه بهتر برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد کافی است هر دو عدد را تجزیه کرده، عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در هم ضرب کنیم:

$(۳۶۰, ۲۸۸) = (۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵, ۲^۵ \times ۳^۲) = ۲^۳ \times ۳^۲ = ۷۲$

۲ اگر ب.م.م دو عدد برابر ۱ باشد، آن دو عدد را نسبت به هم اول می‌گویند. $(۳۵, ۲۴) = (۵ \times ۷, ۲^۳ \times ۳) = ۱$

تست: **اگر $(۳۶۰, ۲^\alpha \times ۳^\beta) = ۳۶$ باشد، کدام گزینه در مورد α و β درست است؟**

۱) $\alpha = \beta = ۲$ ۲) $\alpha = ۲$ و $\beta \ge ۲$

۳) $\alpha \ge ۲, \beta = ۲$ ۴) $\alpha \ge ۲, \beta \ge ۲$

پاسخ گزینهٔ «۲» گفتیم برای پیداکردن ب.م.م دو عدد باید هر دو عدد را تجزیه کرده عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب کنیم. داریم: $(2^{\alpha}\times 3^{\beta}, 2^3\times 3^2\times 5)=2^2\times 3^2$

α باید حتماً ۲ باشد وگرنه در ب.م.م دو عدد 2^2 دیده نمی‌شود. *(چون اون یکی 2^3 داره!)*

در توان‌های ۳ باید $\min\{\beta,2\}=2$ باشد، بنابراین β حداقل برابر ۲ است اما هر مقداری می‌تواند داشته باشد یعنی $\beta\geq 2$.

تست اگر $(x,600)=100$ باشد، حاصل $(x^2,100000)$ کدام است؟

۱) همواره ۱۰۰۰۰ ۲) همواره ۲۰۰۰۰ ۳) ۱۰۰۰۰ یا ۵۰۰۰۰ ۴) ۲۰۰۰۰ یا ۵۰۰۰۰

پاسخ گزینهٔ «۳» اول عددها را تجزیه می‌کنیم تا بفهمیم چه خبر است: $(x,600)=100 \Rightarrow (x,2^3\times 3\times 5^2)=2^2\times 5^2$

پس x عامل ۳ ندارد *(وگرنه تو ب.م.م می‌اومد)* دارای دو عامل ۲ است *(چون اگه بیشتر داشت تو ب.م.م 2^3 می‌اومد)* و دارای دست کم دو عامل ۵ است. *(چون اون یکی دو تا ۵ داره، تو ب.م.م هم ۲تا ۵ ئه) (پس این می‌تونه هر عدد بیشتر از ۲ باشه.)*

پس فرم کلی x به صورت روبه‌رو است: $x=2^2\times 5^{\alpha}, \alpha\geq 2$

(البته ممکن است x عامل‌های دیگری هم داشته باشد ولی چون ۱۰۰۰۰۰ فقط عامل ۲ و ۵ دارد بقیه مهم نیستند.)

حالا ب.م.م $(x^2,100000)$ را پیدا می‌کنیم: $(x^2,100000)=(2^4\times 5^{2\alpha},2^5\times 5^5)$

خب در توان‌های ۲ که کار مشخص است چون 2^4 و 2^5 داریم که مینیمم 2^4 می‌شود. اما در مورد توان‌های ۵ باید ۲ حالت در نظر بگیریم.

$$\alpha=2 \Rightarrow (2^4\times 5^{2\alpha},2^5\times 5^5)=(2^4\times 5^4,2^5\times 5^5)=2^4\times 5^4=10000$$

$$\alpha=3 \Rightarrow (2^4\times 5^{2\alpha},2^5\times 5^5)=(2^4\times 5^6,2^5\times 5^5)=2^4\times 5^5=50000$$

تست اگر $(n,21)=7$ باشد، فرم کلی n برحسب متغیر $k\in\mathbb{Z}$ کدام است؟

۱) $n=7k$ ۲) $n=21k+7$

۳) $n=21k+14$ یا $n=21k+7$ ۴) $n=14k+7$ یا $n=21k+7$

پاسخ گزینهٔ «۳» با توجه به این‌که $(n,3\times 7)=7$ پس n عامل ۳ ندارد ولی بر ۷ بخش‌پذیر است؛ یعنی $n=7q$ ولی q بر ۳ بخش‌پذیر نیست بنابراین q یا به صورت $3k+1$ است یا به صورت $3k+2$، پس: $n=7(3k+2)=21k+14$ یا $n=7(3k+1)=21k+7$

تست به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۵۰ مانند n دو عدد $n-3$ و n^2+3n+1 نسبت به هم اول‌اند؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) ۱۴۲ ۲) ۱۴۳ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۴۹

پاسخ گزینهٔ «۱» **روش اول:** ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم. با توجه به ویژگی اول ب.م.م داریم:

$$d\mid n-3 \xrightarrow{\times n} d\mid n^2-3n \xrightarrow{(-)} d\mid 6n+1$$

رابطهٔ صورت سؤال: $d\mid n^2+3n+1$

حالا دوباره:

$$d\mid n-3 \xrightarrow{\times 6} d\mid 6n-18 \xrightarrow{(-)} d\mid 19 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 19$$

$$d\mid 6n+1 \Rightarrow d\mid 6n+1$$

می‌خواهیم ب.م.م ۱ باشد؛ بنابراین حالت‌هایی که ب.م.م ۱۹ است قابل قبول نیست. بنابراین باید حالت‌هایی که عددها بر ۱۹ بخش‌پذیرند را پیدا کرده از کل عددها کم کنیم.

$$n-3=19k \Rightarrow n=19k+3<150 \Rightarrow 0\leq 19k<147 \Rightarrow 0\leq k<7/\ldots \Rightarrow k=0,1,2,\ldots,7$$

یعنی به ازای ۸ عدد ب.م.م برابر ۱۹ می‌شود پس به ازای $149-7=142$ عدد ب.م.م برابر ۱ است و دو عدد نسبت به هم اول‌اند.

(حواستون باشه: $[a,0]=|a|$*)*

روش دوم: در این نوع سؤال‌ها هم می‌شود ریشهٔ یکی از عبارت‌ها را در دیگری قرار داد. در این صورت d آن مقدار را عاد می‌کند:

$$n-3=0 \xrightarrow{\text{جاگذاری در عبارت دیگر}} 3^2+3\times 3+1=19 \Rightarrow d\mid 19$$

و بقیهٔ پاسخ مثل روش اول است.

روش نردبانی برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد: گفتیم بهترین روش پیداکردن ب.م.م تجزیهٔ دو عدد و ضرب‌کردن عوامل مشترک با توان کوچک‌تر در هم است. اما گاهی عددها خوب تجزیه نمی‌شوند. در این صورت می‌توانیم از روش نردبانی ب.م.م دو عدد را پیدا کنیم. در این روش از جدول زیر استفاده می‌کنیم. سطر اول مربوط به خارج قسمت‌ها، سطر دوم مربوط به دو عدد و سطر سوم مخصوص باقی‌مانده‌هاست. عددها را به ترتیب نزولی در سطر وسط قرار می‌دهیم و بر هم تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت را در سطر بالایی و باقی‌مانده را در سطر پایینی می‌گذاریم. اگر باقی‌مانده صفر بود، عدد آخر ب.م.م است وگرنه باقی‌مانده را به سطر وسط منتقل می‌کنیم و دوباره الگوریتم را تکرار می‌کنیم.

برای درک بهتر به تست زیر نگاه کنید:

تست **مجموع ارقام بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک دو عدد ۴۳۷ و ۲۵۳ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ **گزینهٔ «۲»** چون تجزیهٔ عددها آسان نیست، برای پیداکردن ب.م.م از روش نردبانی استفاده می‌کنیم:

۱) اول ۴۳۷ را بر ۲۵۳ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۴۳۷ & ۲۵۳ \\ ۲۵۳ & ۱ \\ \hline ۱۸۴ & \end{array}$$

→ باقی‌مانده می‌رود سطر وسط

q	۱	۱	۲	۱	۲
۴۳۷	۲۵۳	۱۸۴	۶۹	۴۶	۲۳
r	۱۸۴	۶۹	۴۶	۲۳	۰

۲) حالا ۲۵۳ را بر ۱۸۴ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۲۵۳ & ۱۸۴ \\ -۱۸۴ & ۱ \\ \hline ۶۹ & \end{array}$$

→ باقی‌مانده دوباره می‌رود سطر وسط

۳) حالا ۱۸۴ را بر ۶۹ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۱۸۴ & ۶۹ \\ -۱۳۸ & ۲ \\ \hline ۴۶ & \end{array}$$

→ باقی‌مانده دوباره می‌رود سطر وسط

۴) ۶۹ را بر ۴۶ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۶۹ & ۴۶ \\ -۴۶ & ۱ \\ \hline ۲۳ & \end{array}$$

۵) ۴۶ بر ۲۳ بخش‌پذیر است پس ب.م.م ۲۳ است.

$۲+۳=۵$

کوچک‌ترین مضرب‌مشترک

c را کوچک‌ترین مضرب‌مشترک دو عدد a و b می‌گوییم و می‌نویسیم: $[a,b]=c$

هرگاه:

۱) $a|c$ و $b|c$ *(یعنی c بر هر دوتا عددها بخش‌پذیره!)*

۲) $\forall m>۰;a|m,b|m \Rightarrow \begin{cases} c\le m \\ c|m \end{cases}$ *(این ویژگی تضمین می‌کنه c کوچک‌ترینه!)*

یادتان هست کمی قبل ب.م.م دو عدد ۳۰ و ۴۵ را پیدا کردیم؟ الان ک.م.م‌شان را پیدا می‌کنیم:

مجموعهٔ مضارب طبیعی ۳۰ $=\{۳۰,۶۰,۹۰,۱۲۰,۱۵۰,۱۸۰,۲۱۰,...\}$

مجموعهٔ مضارب طبیعی ۴۵ $=\{۴۵,۹۰,۱۳۵,۱۸۰,۲۲۵,...\}$

مجموعهٔ مضارب مشترک ۳۰ و ۴۵ $=\{۹۰,۱۸۰,۲۷۰,...\}$

اما خب واضح است که این راه خوبی نیست. برای پیداکردن ک.م.م دو یا چند عدد بهتر است از روش زیر استفاده کنیم.

حواستون‌باشه! برای پیداکردن ک.م.م دو یا چند عدد، عددها را تجزیه می‌کنیم، سپس عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم.

برای مثال:

$$[۳۰,۴۵]=[۲\times۳\times۵,۳^۲\times۵]=۲\times۳^۲\times۵=۹۰$$

$$[۵۴,۶۰]=[۲\times۳^۳,۲^۲\times۳\times۵]=۲^۲\times۳^۳\times۵=۵۴۰$$

تست **اگر $[a,۲۰]=۱۲۰$ باشد، کدام گزینه درست نیست؟**

۱) a بر ۸ بخش‌پذیر است اما بر ۱۶ بخش‌پذیر نیست.
۲) a بر ۳ بخش‌پذیر است اما بر ۹ بخش‌پذیر نیست.
۳) a بر ۵ بخش‌پذیر است اما بر ۲۵ بخش‌پذیر نیست.
۴) کوچک‌ترین مقدار طبیعی a دورقمی است.

پاسخ **گزینهٔ «۳»** داریم: $[a,۲^۲\times۵]=۲^۳\times۳\times۵$

در ک.م.م $۲^۳$ داریم پس a حتماً بر $۲^۳$ بخش‌پذیر است اما بر $۲^۴$ بخش‌پذیر نیست به دلیل این‌که در آن صورت در ک.م.م هم $۲^۴$ می‌آمد پس گزینهٔ (۱) درست است.

a حتماً عامل ۳ دارد چون ۳ در ک.م.م آمده اما بر ۹ نمی‌تواند بخش‌پذیر باشد. چون در آن صورت در ک.م.م هم $۳^{۲}$ می‌آمد پس گزینهٔ (۲) درست است.
چون $۵ \times ۲^{۲} = ۲۰$ و در ک.م.م هم فقط یک عامل ۵ وجود دارد، پس a ممکن است اصلاً بر ۵ بخش‌پذیر نباشد پس گزینهٔ (۳) درست نیست.
(البته ممکنه یه ۵ داشته باشه اما نمی‌تونیم بگیم حتماً ۵ داره!)
a دارای دست کم ۳ عامل ۲ و یک عامل ۳ است پس $a_{min} = ۲^{۳} \times ۳ = ۲۴$ پس گزینهٔ (۴) درست است.

ویژگی‌های ب.م.م و ک.م.م

(اگه دوتا عدد داشته باشیم که یکی اون یکی رو عاد می‌کنه ب.م.م می‌شه اونی که قدرمطلقش کوچک‌تره و ک.م.م می‌شه اون یکی.)

۱ $a \mid b \Rightarrow \begin{cases}(a,b) = |a| \\ [a,b] = |b|\end{cases}$

۲ $\begin{cases}(a,b) = (a,-b) = (-a,b) = (-a,-b) \\ [a,b] = [a,-b] = [-a,b] = [-a,-b]\end{cases}$ *(علامت منفی تو ب.م.م و ک.م.م هیچ تأثیری نداره.)*

۳ $\begin{cases}(ka,kb) = |k|(a,b) \\ [ka,kb] = |k|[a,b]\end{cases}$ *(هرجا تونستی فاکتور بگیری بگیر!)*

۴ $(a,b) = d \Rightarrow (a, b \pm ak) = d$
(اگه هر مضربی از یکی از عددها رو به اون یکی اضافه و یا ازش کم کنیم ب.م.م تغییری نمی‌کنه.)
برای مثال $[۳۰,۴۵] = [۳۰, ۴۵ + ۲ \times ۳۰] = [۳۰ - ۳ \times ۴۵, ۴۵] = ۹۰$

۵ $(a,b)[a,b] = |ab|$
(ضرب ب.م.م دوتا عدد تو ک.م.م‌شون می‌شه قدرمطلق حاصل‌ضرب دو عدد.)
برای مثال: $\begin{matrix}(۳۰,۴۵) = ۱۵ \\ [۳۰,۴۵] = ۹۰\end{matrix} \Rightarrow ۳۰ \times ۴۵ = ۱۵ \times ۹۰$

تست حاصل $((a,[a,b]),[a^{۲},(a,b)])$ کدام است؟

۱) (a,b) ۲) a ۳) $[a,b]$ ۴) $|a|$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** یک چیزی را همیشه یادتان باشد، ک.م.م دو تا عدد بر هر دو عدد بخش‌پذیر است و هر دو عدد بر ب.م.م‌شان بخش‌پذیرند. حالا برویم سراغ حل سؤال:

$$\left.\begin{matrix} a \mid [a,b] \Rightarrow (a,[a,b]) = |a| \\ (a,b) \mid a, a \mid a^{۲} \Rightarrow (a,b) \mid a^{۲} \Rightarrow [a^{۲},(a,b)] = a^{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (|a|,a^{۲}) = |a|$$

حواستان باشد ممکن است a منفی باشد، پس گزینهٔ (۲) همیشه درست نیست.

تست اگر دو عدد a و b نسبت به هم اول باشند، حاصل $(۷a+۴b, ۵a+۳b)$ کدام است؟

۱) همواره ۱ ۲) ۱ یا ۲ ۳) ۱ یا ۳ ۴) ۱ یا ۷

پاسخ **گزینهٔ «۱»** برای پاسخ‌گویی از آن ویژگی از ب.م.م استفاده می‌کنیم که $(a,b) = d \Rightarrow (a, b \pm ak) = d$.
یعنی هر مضربی از یکی را می‌توان به دیگری اضافه یا از آن کم کرد.
۱) عبارت سمت راست را نگه می‌داریم و عبارت سمت چپ را منهای عبارت سمت راست می‌کنیم.

$$(۷a+۴b, ۵a+۳b) = ((۷a+۴b)-(۵a+۳b), ۵a+۳b) = (۲a+b, ۵a+۳b)$$

۲) حالا عبارت سمت چپ را نگه می‌داریم و عبارت سمت راست را منهای دو برابر عبارت سمت چپ می‌کنیم:

$$= (۲a+b, (۵a+۳b) - ۲(۲a+b)) = (۲a+b, a+b)$$

۳) حالا راستی را نگه می‌داریم و چپی را منهای راستی می‌کنیم: $(۲a+b-(a+b), a+b) = (a, a+b)$

۴) و بالأخره a را نگه می‌داریم و $a+b$ را منهای a می‌کنیم: $(a, a+b) = (a, a+b-a) = (a,b) = ۱$

روش دوم: این سؤال را می‌توان با نکتهٔ زیر نیز حل کرد:

- اگر a و b دو عدد صحیح باشند به طوری که $(a,b) = d$ باشد، آن‌گاه اگر x، y، z و t اعداد صحیح باشند، داریم:

$$(xa+yb, za+tb) \,\Big|\, \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} d$$

حال برای حل سؤال داریم:

$$(۷a+۴b, ۵a+۳b) \,\Big|\, \begin{vmatrix} ۷ & ۴ \\ ۵ & ۳ \end{vmatrix} \times ۱ \Rightarrow (۷a+۴b, ۵a+۳b) \mid ۱ \Rightarrow (۷a+۴b, ۵a+۳b) = ۱$$

تست حاصل $(20m+2, 30m+8)$ کدام است؟

۱) همواره ۲ ۲) ۱ یا ۲ ۳) ۲ یا ۱۰ ۴) همواره ۱۰

پاسخ **گزینهٔ «۱»** اول از همه خوب است از یک ۲ فاکتور بگیریم:

$$(20m+2, 30m+8) = 2(10m+1, 15m+4)$$

حالا فرض می‌کنیم $d = (10m+1, 15m+4)$ باشد، در این صورت:

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 10m+1 \xrightarrow{\times 3} d \mid 30m+3 \\ d \mid 15m+4 \xrightarrow{\times 2} d \mid 30m+8 \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} d \mid 5 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 5$$

اما دقت کنید d نمی‌تواند برابر ۵ باشد چون $10m+1$ و $15m+4$ نمی‌توانند بر ۵ بخش‌پذیر باشند پس فقط $d=1$ قابل قبول است و چون از یک ۲ فاکتور گرفته بودیم پاسخ همواره ۲ است.

متباین‌سازی

در سؤال‌های متباین‌سازی معمولاً دو رابطه (گاهی هم یک رابطهٔ ترکیبی) از ب.م.م، ک.م.م، مجموع یا حاصل‌ضرب دو عدد داده می‌شود و باید عددها را پیدا کنیم.

نکتهٔ کلیدی پاسخ‌گویی به این سؤال‌ها نکتهٔ زیر است:

$$(a, b) = d \xrightarrow{\div d} \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

$\frac{a}{d}$ را a' و $\frac{b}{a}$ را b' می‌نامیم، بنابراین:

۱ $\frac{a}{d} = a' \Rightarrow a = a'd$

۲ $\frac{b}{d} = b' \Rightarrow b = b'd$

۳ $(a', b') = 1$

حالا در این سؤال‌ها هر چیزی به ما بدهند را برحسب d، b' و a' بازنویسی می‌کنیم:

۴ $[a, b] = [a'd, b'd] = d[a', b'] = a'b'd$

۵ $a + b = a'd + b'd = d(a' + b')$

۶ $ab = (a'd)(b'd) = a'b'd^2$

حالا سؤال‌های زیر را حل کنید تا با ایده‌های متباین‌سازی بیشتر آشنا شوید:

تست اگر $(a,b) = 7$ و $a+b = 56$ باشد، حداکثر $[a,b]$ کدام است؟

۱) ۴۹ ۲) ۸۴ ۳) ۱۰۵ ۴) ۱۱۲

پاسخ **گزینهٔ «۳»**

$$(a, b) = 7 \Rightarrow d = 7$$

$$a + b = 56 \Rightarrow d(a' + b') = 56 \Rightarrow a' + b' = 8$$

۱	۷	✓
۲	۶	×
۳	۵	✓
۴	۴	×

دقت کنید $(a', b') = 1$ است پس دو حالت قابل قبول نیست. حالا می‌خواهیم $[a,b]$ حداکثر شود پس باید حالتی را در نظر بگیریم که حاصل‌ضرب $a'b'$ بیشتر شود، پس ۵ و ۳ را در نظر می‌گیریم:

$$[a, b] = a'b'd = 5 \times 3 \times 7 = 105$$

تست اگر $a+b = 117$ و $[a,b] = 260$ باشد، کدام گزینه درست است؟ $(a > b)$

۱) $a-b$ زوج است. ۲) $a-b$ مضرب ۳ است. ۳) $a-b$ عددی اول است. ۴) a و b دو عدد متوالی‌اند.

پاسخ **گزینهٔ «۳»**

$$a + b = 117 \Rightarrow d(a' + b') = 117 \quad (I)$$

$$[a, b] = 260 \Rightarrow a'b'd = 260 \quad (II)$$

با تقسیم دو رابطه داریم:

$$\frac{(I)}{(II)} = \frac{(a'+b')d}{a'b'd} = \frac{117}{260}$$

d را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم:

$$\frac{a'+b'}{a'b'} = \frac{9}{20} \Rightarrow \begin{cases} a' + b' = 9 \\ a'b' = 20 \end{cases} \xrightarrow{\text{وقتی } a>d \text{ پس } a'>b' \text{ می‌شود.}} a' = 5, b' = 4$$

با جای‌گذاری در یکی از رابطه‌ها d هم پیدا می‌شود. هر چند وقتی طرفین $\frac{117}{260}$ را به ۱۳ ساده کردیم، معلوم بود $d = 13$ است، ولی با این حال:

$$a'b'd = 260 \Rightarrow 5 \times 4 \times d = 260 \Rightarrow d = 13 \Rightarrow a = 65, b = 52 \Rightarrow a - b = 13$$

اعداد اول

اعداد اول را که همه می‌دانند چیست! عددهایی هستند که در میان اعداد طبیعی فقط بر خودشان و ۱ بخش‌پذیر باشند. همین اول کار دوتا تست ببینید تا بعد نکته‌هایش را با هم مرور کنیم:

تست **اگر a,b,c سه عدد اول باشند به طوری که $a<b<c$ و $a+b+c=۲۰۶$ باشد، مجموع ارقام $a^۲b+a^۲c$ کدام است؟**

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

پاسخ **گزینهٔ «۴»** می‌دانیم همهٔ عددهای اول به‌جز ۲ فردند. از طرفی مربع سه عدد فرد، عددی فرد می‌شود اما این‌جا $a+b+c$ زوج است. پس یکی از آن‌ها حتماً زوج است و چون هر سه اول‌اند، کوچک‌ترین آن‌ها یعنی $a=۲$ است. حالا:

$$a+b+c=۲۰۶ \Rightarrow ۲+b+c=۲۰۶ \Rightarrow b+c=۲۰۴$$

$$a^۲b+a^۲c=a^۲(b+c)=۴\times(۲۰۴)=۸۱۶ \Rightarrow \text{مجموع ارقام}=۸+۱+۶=۱۵$$

تست **اگر a و b دو عدد طبیعی و p عددی اول باشد به طوری که $a^۲=p+b^۲$ و $ab=۴۲۰$ باشد، $۲a+۳b$ کدام است؟**

۱) ۱۰۱ ۲) ۱۰۲ ۳) ۱۰۳ ۴) ۱۰۴

پاسخ **گزینهٔ «۲»**

$$a^۲=p+b^۲ \Rightarrow a^۲-b^۲=p \Rightarrow (a-b)(a+b)=p$$

حاصل‌ضرب دو عدد برابر عددی اول شده پس یکی ۱ و دیگری p است.

$$\begin{cases} a-b=۱ \\ a+b=p \end{cases} \Rightarrow a=\frac{p+۱}{۲}, b=\frac{p-۱}{۲} \Rightarrow ab=\frac{p^۲-۱}{۴}=۴۲۰$$

$$\Rightarrow p^۲-۱=۱۶۸۰ \Rightarrow p^۲=۱۶۸۱ \Rightarrow p=۴۱$$

$$\Rightarrow a=\frac{۴۱+۱}{۲}=۲۱, b=\frac{۴۱-۱}{۲}=۲۰ \Rightarrow ۲a+۳b=۲\times۲۱+۳\times۲۰=۱۰۲$$

چند نکته در مورد اعداد اول

۱ هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۵ دارد.

$$\left.\begin{array}{l} ۶k \Rightarrow \text{زوج} \\ ۶k+۱ \\ ۶k+۲ \Rightarrow \text{زوج} \\ ۶k+۳ \Rightarrow \text{مضرب ۳} \\ ۶k+۴ \Rightarrow \text{زوج} \\ ۶k+۵ \end{array}\right\} \Rightarrow p=۶k+۱ \text{ یا } ۶k+۵$$

یا برای راحتی کار $p=۶k\pm۱$.

۲ مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۲۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

$$p>۳ \Rightarrow p^۲=۲۴k+۱$$

۳ هیچ‌کدام از عددهای بزرگ‌تر از $n!+۱$ و کوچک‌تر یا مساوی $n!+n$ اول نیستند. برای مثال همهٔ عددهای بزرگ‌تر از $۲۰!+۱$ و کوچک‌تر یا مساوی $۲۰!+۲۰$ مرکب‌اند. برای مثال $۲۰!+۱۳=۲۰\times۱۹\times\cdots\times۱۳\times\cdots\times۲\times۱+۱۳$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

۴ اگر $a\,|\,bc$ و $(a,c)=۱$ باشند آن‌گاه $a\,|\,b$. این هم واضح است؛ فرض کنید $a\,|\,۳b$ و $(a,۳)=۱$ باشد. الان باید کسر $\frac{۳b}{a}$ عددی صحیح شود، a را که با ۳ نمی‌شود ساده کرد، پس b باید بر a بخش‌پذیر باشد یا $a\,|\,b$.

۵ تعداد اعداد اول نامتناهی است.

تست **حاصل کدام‌یک از عبارت‌های زیر به ازای هیچ مقدار $n\in\mathbb{N}$ عدد اول نمی‌شود؟**

۱) $۵n+۱$ ۲) $n^۳-۸$ ۳) $n^۲-۵n+۸$ ۴) $n^۳+۲۷$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** $۵n+۱$ که مشخص است به ازای عددهای زیادی اول می‌شود، برای مثال اگر $n=۲$ باشد، $۵n+۱=۱۱$ می‌شود. پس گزینهٔ (۱) پاسخ سؤال نیست.

$$n^۳-۸=(n-۲)(n^۲+۲n+۴)$$

این عبارت حاصل‌ضرب دو عدد مختلف است و به نظر می‌رسد ضرب دو عدد هیچ‌گاه عدد اول نمی‌شود اما اگر $n=۳$ باشد، $n-۲=۱$ و $n^۲+۲n+۴=۱۹$ می‌شود و حاصل اول است. پس گزینهٔ (۲) نیز پاسخ سؤال نیست.

اگر n فرد باشد، $n^۲$ و $۵n$ هر دو فرد می‌شوند؛ پس $n^۲-۵n+۸$ زوج می‌شود. اگر n زوج باشد نیز $n^۲-۵n+۸$ همواره زوج است؛ اما ممکن است حاصل برابر ۲ شود که یک عدد اول است.

اگر بررسی کنیم، داریم:

$$n^۲-۵n+۸=۲ \Rightarrow n^۲-۵n+۶=۰ \Rightarrow (n-۳)(n-۲)=۰ \Rightarrow n=۳$$

یعنی به ازای $n=۳$ حاصل برابر ۲ می‌شود که عددی اول است. پس گزینهٔ (۳) نیز پاسخ سؤال نیست.

حاصل $n^۳+۲۷$ ولی هیچ‌گاه عدد اول نمی‌شود زیرا:

$$n^۳+۲۷=(n+۳)(n^۲-۳n+۹)$$

حاصل‌ضرب دو عدد است که هیچ‌کدام به ازای هیچ مقدار طبیعی n برابر ۱ نمی‌شود. بنابراین ضرب دو عدد بزرگ‌تر از ۱ است که هیچ‌گاه اول نیست.

تست اگر p عددی اول باشد، به ازای چند مقدار p عبارت $p^۴+p^۲+۱$ عددی اول می‌شود؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

پاسخ **گزینهٔ «۱»** گفتیم مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را می‌توان به صورت $۲۴k+۱$ نوشت، بنابراین:

$p=۲ \Rightarrow p^۴+p^۲+۱=۱۶+۴+۱=۲۱$ اول نیست.

$p=۳ \Rightarrow p^۴+p^۲+۱=۸۱+۹+۱=۹۱$ اول نیست.

$p>۳ \Rightarrow (۲۴k+۱)^۲+۲۴k+۱+۱=(۲۴k)^۲+۷۲k+۳$ همواره مضرب ۳ است بنابراین اول نیست.

قضیهٔ تقسیم و کاربردها

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b اگر q خارج قسمت و r باقی‌مانده باشد، داریم:

$$\begin{array}{l|l} \text{مقسوم} \leftarrow a & b \rightarrow \text{مقسوم‌علیه} \\ \hline & q \rightarrow \text{خارج قسمت} \\ r \longrightarrow \text{باقی‌مانده} & \end{array}$$

$a=bq+r$ و $۰\le r<b$

تست در تقسیم عدد a بر b اگر ۲۲۱ واحد به a اضافه شود، خارج قسمت و باقی‌مانده هر کدام m واحد اضافه می‌شوند، b کدام است؟ $(m>۱)$

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۶ ۴) نمی‌توان گفت.

پاسخ **گزینهٔ «۳»**

$a=bq+r \quad (I)$ و $۰\le r<b$

$a+۲۲۱=b(q+m)+(r+m) \quad (II)$ و $۰\le r+m<b$

حالا اگر دو رابطه را از هم کم کنیم داریم: $(II)-(I): ۲۲۱=mb+m \Rightarrow ۲۲۱=m(b+۱) \Rightarrow ۱۳\times ۱۷=m(b+۱)$

با توجه به شرط باقی‌مانده می‌دانیم $b>m$ است، پس $m=۱۳$ و $b+۱=۱۷$ و در نتیجه $b=۱۶$ است.

تست چند عدد دورقمی طبیعی وجود دارد که در تقسیم به ۹ خارج قسمت آن مضرب ۴ و باقی‌ماندهٔ آن مضرب ۵ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۲

پاسخ **گزینهٔ «۱»** عدد را a فرض می‌کنیم، چون خارج قسمت مضرب ۴ است، آن را $۴q$ فرض می‌کنیم. داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & ۹ \\ \hline & ۴q \\ r & \end{array} \Rightarrow a=۳۶q+r, ۰\le r<۹$$

باقی‌مانده مضرب ۵ است، پس باقی‌مانده یا صفر است یا ۵. در هر دو حالت عددهای دورقمی را پیدا می‌کنیم:

$\Rightarrow a=۳۶q \Rightarrow a=۳۶,۷۲$ یا $a=۳۶q+۵ \Rightarrow a=۴۱,۷۷$

تست در تقسیم عددهای a و b بر ۱۴ باقی‌مانده‌ها به ترتیب برابر ۲ و ۱۱ و خارج قسمت‌ها q و q' اند. باقی‌ماندهٔ تقسیم $۶a+۳b$ بر ۲۱ برابر .... و خارج قسمت آن برابر .... است.

۱) ۱ و $۲q+q'+۱$ ۲) ۱ و $۴q+۲q'+۲$ ۳) ۳ و $۲q+q'+۱$ ۴) ۳ و $۴q+۲q'+۲$

پاسخ **گزینهٔ «۴»**

$a=۱۴q+۲ \xrightarrow{\times ۶} ۶a=۸۴q+۱۲$

$b=۱۴q'+۱۱ \xrightarrow{\times ۳} ۳b=۴۲q'+۳۳$

$\xrightarrow{+} ۶a+۳b=۸۴q+۴۲q'+۴۵$

$=۲۱(۴q+۲q')+\underbrace{۴۵}_{۲۱\times ۲+۳}=۲۱(۴q+۲q'+۲)+۳$

در سؤال‌های بخش‌پذیری گاهی لازم می‌شود باقی‌ماندهٔ یک عدد منفی را بر یک عدد مثبت پیدا کنیم. دو روش برای انجام این کار وجود دارد.

فرض کنید a عددی منفی است و می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ آن را بر عدد b به دست آوریم:

۱ می‌توانیم اول خارج قسمت را با دستور $q=[\frac{a}{b}]$ پیدا کنیم و سپس باقی‌مانده را از رابطهٔ $r=a-bq$ به دست آوریم.

۲ باقی‌ماندهٔ $|a|$ را بر b پیدا کنیم و آن را r' می‌نامیم. در این صورت باقی‌ماندهٔ a بر b برابر است با: $r=b-r'$

برای مثال اگر بخواهیم باقی‌ماندهٔ ۲۸− را بر ۵ به دست آوریم داریم:

روش اول:

$$q=\left[\frac{-۲۸}{۵}\right]=[-۵/۶]=-۶ \Rightarrow r=-۲۸-۵\times -۶=۲$$

روش دوم:

$$\begin{array}{r|l} ۲۸ & ۵ \\ \hline -۲۵ & ۵ \\ \hline ۳ & \end{array} \Rightarrow r'=۳ \Rightarrow r=۵-۳=۲$$

تست **اگر $a = 15q + 13$ باشد، باقی‌مانده و خارج قسمت $4a - 93$ بر ۲۰ کدام است؟**

۱) ۱ و $3q-2$ ۲) ۱ و $3q-3$ ۳) ۱۹ و $3q-2$ ۴) ۱۹ و $3q-3$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** $a = 15q + 13 \Rightarrow 4a - 93 = 4(15q+13) - 93 = 60q - 41$

برای پیداکردن باقی‌مانده توجه کنید $60q$ بر ۲۰ بخش‌پذیر است، پس باید باقی‌ماندهٔ -41 را بر ۲۰ پیدا کنیم:

برای این کار از روش دوم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} 41 & 20 \\ \hline \underline{40} & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow r = 20 - 1 = 19$$

و برای خارج قسمت: $[\frac{60q-41}{20}] = [3q - 2/05] = 3q - 3$

تست **اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵ برابر ۱ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $2a+1$ بر ۳۰ حداکثر برابر چند است؟**

۱) ۲۱ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

پاسخ **گزینهٔ «۲»** باقی‌ماندهٔ a در تقسیم به ۵ برابر ۱ است؛ بنابراین: $a = 5q + 1 \Rightarrow 2a + 1 = 10q + 3$

حالا می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ $2a+1$ را بر ۳۰ به دست آوریم، بنابراین باید q را در سه حالت بررسی کنیم:

$q = 3k \Rightarrow 2a+1 = 30k + 3 \Rightarrow r = 3$

$q = 3k' + 1 \Rightarrow 2a + 1 = 10(3k'+1) + 3 = 30k' + 13 \Rightarrow r = 13$

$q = 3k'' + 2 \Rightarrow 2a + 1 = 10(3k''+2) + 3 = 30k'' + 23 \Rightarrow r = 23$

تست **مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم به ۴۲ باقی‌ماندهٔ آن $\frac{3}{4}$ مربع خارج قسمت آن باشد، کدام است؟**

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

پاسخ **گزینهٔ «۴»**

$$\begin{array}{r|l} a & 42 \\ \hline - & q \\ \frac{3}{4}q^2 & \end{array} \Rightarrow a = 42q + \frac{3}{4}q^2, 0 \le \frac{3}{4}q^2 < 42 \Rightarrow 0 \le q^2 < 56 \Rightarrow q_{max} = 7$$

اما q باید زوج باشد وگرنه باقی‌مانده عدد صحیح نمی‌شود پس $q_{max} = 6$.

بنابراین: $a_{max} = 42 \times 6 + \frac{3}{4} \times 6^2 = 252 + 27 = 279 \Rightarrow$ مجموع ارقام $= 2 + 7 + 9 = 18$

تست **باقی‌ماندهٔ a بر ۱۲ و ۷ به ترتیب برابر ۱۱ و ۵ است. باقی‌ماندهٔ a بر ۴۲ کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ **گزینهٔ «۳»** باید دو رابطه را در عددهایی ضرب کنیم که خارج قسمت جدید مضرب ۴۲ باشد و وقتی آن دو را از هم کم می‌کنیم اختلاف یکی شود:

$a = 12q + 11 \xrightarrow{\times 7} 7a = 84q + 77$

$a = 7q' + 5 \xrightarrow{\times 6} 6a = 42q' + 30$

$\xrightarrow[\text{دو رابطه را از هم کم می‌کنیم.}]{(-)} 7a - 6a = 84q + 77 - 42q' - 30 \Rightarrow a = 42(2q - q') + \underbrace{47}_{42+5}$

واضح است که باقی‌ماندهٔ عبارت بر ۴۲ برابر ۵ است.

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک تقسیم

عددهای صحیح در تقسیم به ۲، دو حالت دارند: یا زوجاند یا فرد. بنابراین مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ در تقسیم به ۲ به دو مجموعه افراز می‌شود:

$\mathbb{Z}$

عددهای فرد یا $2k+1$	عددهای فرد یا $2k$

با همین استدلال در تقسیم به m مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به m مجموعه افراز می‌شود.

$\mathbb{Z}$

mk	mk+1	mk+2	...	mk+m−1

برای مثال در تقسیم به ۵ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۵ دستهٔ زیر افراز می‌شود:

$\mathbb{Z}$

5k	5k+1	5k+2	5k+3	5k+4
مضرب ۵	عددهایی که در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند.	عددهایی که در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند.	عددهایی که در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۳ دارند.	عددهایی که در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ دارند.

تست **باقی‌ماندهٔ یک عدد اول بزرگ‌تر از ۱۱ در تقسیم به ۱۲ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟**

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

پاسخ **گزینهٔ «۳»** در تقسیم به ۱۲ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۱۲ مجموعهٔ زیر افراز می‌شود. بررسی می‌کنیم در کدام حالت‌ها عدد نمی‌تواند اول باشد.

$12k+8$	زوج	$12k+4$	زوج	$12k$	زوج
$12k+9$	مضرب ۳	$12k+5$		$12k+1$	
$12k+10$	زوج	$12k+6$	زوج	$12k+2$	زوج
$12k+11$		$12k+7$		$12k+3$	مضرب ۳

پس باقی‌ماندهٔ یک عدد اول در تقسیم به ۱۲ می‌تواند برابر ۱ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ باشد.

تست **چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۳۰ وجود دارد به طوری که وقتی در تقسیم به ۳ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۳ دسته افراز می‌شود، این عددها در دستهٔ $3k+1$ و وقتی در تقسیم به ۴ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۴ دسته افراز می‌شود، این عددها در دستهٔ $4k+2$ قرار گیرند؟**

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۲»** عددهای کوچک‌تر از ۳۰ دستهٔ $3k+1$ و $4k+2$ را مشخص کرده اشتراک آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\{x=3k+1 : k\in\mathbb{Z}, x<30\}=\{1,4,7,10,13,16,19,22,25,28\}$$

$$\{x=4k+2 : k\in\mathbb{Z}, x<30\}=\{2,6,10,14,18,22,26\}$$

همان‌طور که می‌بینید تنها عددهای مشترک ۱۰ و ۲۲ هستند.

تست **اگر a مضرب ۵ نباشد، باقی‌ماندهٔ $3a^2+1$ در تقسیم به ۵ کدام است؟**

۱) ۱ یا ۲   ۲) ۱ یا ۴   ۳) ۳ یا ۴   ۴) ۲ یا ۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»** می‌دانیم در تقسیم به ۵ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۵ دسته افراز می‌شود، چون عدد a مضرب ۵ نیست پس آن را به یکی از حالت‌های زیر می‌توان نوشت:

$a=5k+1$ $a=5k+2$ $a=5k+3$ $a=5k+4$

در هر حالت $3a^2+1$ را پیدا کرده باقی‌ماندهٔ آن را به ۵ به دست می‌آوریم:

$$a=5k+1 \Rightarrow 3a^2+1=3(5k+1)^2+1=\underbrace{75k^2+30k}_{\text{مضرب ۵}}+4 \Rightarrow r=4$$

$$a=5k+2 \Rightarrow 3a^2+1=3(5k+2)^2+1=\underbrace{75k^2+60k}_{\text{مضرب ۵}}+13 \Rightarrow r=3$$

$$a=5k+3 \Rightarrow 3a^2+1=3(5k+3)^2+1=\underbrace{75k^2+90k}_{\text{مضرب ۵}}+28 \Rightarrow r=3$$

$$a=5k+4 \Rightarrow 3a^2+1=3(5k+4)^2+1=\underbrace{75k^2+120k}_{\text{مضرب ۵}}+49 \Rightarrow r=4$$

پس باقی‌مانده برابر ۳ یا ۴ است.

این سؤال را در فصل بعد و با هم‌نهشتی خیلی راحت‌تر می‌شود حل کرد اما اگر در همین فصل هم می‌خواهید ساده‌تر به سؤال پاسخ دهید به جای کل عبارت می‌توانید فقط باقی‌مانده‌ها را جای‌گذاری کنید:

$r=2 \Rightarrow 3\times2^2+1=13 \Rightarrow r=3$ $r=1 \Rightarrow 3\times1^2+1=4$

$r=4 \Rightarrow 3\times4^2+1=49 \Rightarrow r=4$ $r=3 \Rightarrow 3\times3^2+1=28 \Rightarrow r=3$

تست **اگر a مضرب ۵ باشد و زوج نباشد، باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم به ۲۰ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟**

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۲»** a مضرب ۵ است پس $a=5k$ است. می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ آن را بر ۲۰ به دست آوریم. پس مجبوریم k را در ۴ حالت فرض کنیم که عامل ۲۰ به وجود بیاید. اما چون گفته k زوج نیست پس k یا به صورت $4q+1$ است یا $4q+3$ بنابراین:

$k=4q+3 \Rightarrow a=20q+15 \Rightarrow r=15$ $k=4q+1 \Rightarrow a=20q+5 \Rightarrow r=5$

پس باقی‌مانده برابر ۵ یا ۱۵ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

عادکردن

۴۱- چند عدد از مجموعهٔ $\{31,32,33,\ldots,88,89\}$ مضرب ۳ و زوج است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۴۲- به ازای چند مقدار صحیح a، روابط $a \mid (b+5)^2$ و $a \mid (b+6)(b+4)$ برقرارند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

۴۳- اگر $a \mid b$، کدام‌یک از نتایج زیر در حالت کلی برقرار نیست؟

۱) $a^2 \mid b^4 - 2a^2$ ۲) $a^2 \mid (a-b)^2$ ۳) $ab \mid 7b^2 - 5ab$ ۴) $a^2 \mid b - a^5$

۴۴- برای سه عدد طبیعی a، b و c، اگر $abc \mid 2ab + 3ac$، آن‌گاه کدام گزینه لزوماً درست نیست؟

۱) $b \mid 12c$ ۲) $c \mid 8b$ ۳) $a \mid 2b+3c$ ۴) $bc \mid 2b+3c$

۴۵- از رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $a-b \mid c^2$ ۲) $c \mid a+b$ ۳) $a+b \mid c^2$ ۴) $c \mid a^4 - b^4$

۴۶- اگر $a \mid 12$ و $b \mid 12$، آن‌گاه کدام رابطه درست نیست؟ $(a,b \in \mathbb{N})$

۱) $4 \mid b$ ۲) $a \mid 2b$ ۳) $a \mid 84$ ۴) $2a \mid b$

۴۷- اگر $a \mid 25$ و $a \mid 550$، آن‌گاه a چند مقدار صحیح می‌تواند بپذیرد؟

۱) ۱۶ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۴۸- به ازای چند عدد طبیعی n هر دو رابطهٔ $12 \mid n^2$ و $n \mid 3600$ برقرار است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۳۶

۴۹- تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $x = 2^n \times 3^m$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $\frac{x}{18}$، ۱۴ واحد بیشتر است. تعداد مقسوم‌علیه‌های $3x$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های $\frac{x}{6}$ چه‌قدر بیشتر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۵۰- اگر n عددی طبیعی باشد که دارای ۳۰ مقسوم‌علیه طبیعی است، n^2 حداکثر چند مقسوم‌علیه دارد؟

۱) ۵۹ ۲) ۸۷ ۳) ۹۹ ۴) ۱۳۵

۵۱- عدد $10! + 24$ بر چند عدد طبیعی یک‌رقمی بخش‌پذیر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۲- عدد $24! + 25!$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۱۶۹ ۲) ۱۹۶ ۳) ۲۸۹ ۴) ۳۲۴

۵۳- به ازای چند عدد صحیح n، هر دو رابطهٔ $n^3+2 \mid 2n^2+n$ و $2n^2+n \mid n^3+2$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۴- به ازای چند مقدار صحیح x، $a \mid x^2-6x+9$ و $|a| > |x^2-6x+9|$ است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۵۵- اگر $0 \mid x^3-3x^2+3x-28$ آن‌گاه x چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۶- اگر $3^n \mid 30!$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار n کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۵۷- برای هر عدد طبیعی n داریم $n! = 2^{a_1} \times 3^{a_2} \times 5^{a_3} \times \cdots$، مقدار $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ به ازای $n = 24$ کدام است؟

۱) ۴۳ ۲) ۴۴ ۳) ۴۵ ۴) ۴۶

۵۸- کوچک‌ترین عدد طبیعی n به طوری که $7^{10} \mid n!$ باشد کدام است؟

۱) ۴۹ ۲) ۵۶ ۳) ۶۳ ۴) ۷۰

۵۹- به ازای چند عدد طبیعی n رابطهٔ $2^{n+9} \mid 8^{n-1}$ درست است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) بی‌شمار

۶۰- اگر $12 \mid x^2$، چند عدد سه‌رقمی x وجود دارد؟

۱) ۱۴۹ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۵۱ ۴) ۱۵۲

۶۱- اگر $189 \mid a^2$ و $512 \mid b^3$ در این صورت کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟ $(a,b \in \mathbb{N})$

۱) ۷۱ ۲) ۷۹ ۳) ۹۵ ۴) ۲۹

۶۲- تعداد اعداد ۴ و ۵ رقمی مضرب ۴۸ که مکعب کامل باشند کدام است؟ $(\sqrt[3]{100} = 4/6)$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶۳- برای دو عدد صحیح a و b $(a \neq 0)$، اگر $a \mid b^2$ آن‌گاه کدام رابطهٔ زیر لزوماً درست است؟

۱) $a^3 \mid b^5$ ۲) $a^2 \mid b^5$ ۳) $a^4 \mid b^7$ ۴) $a^7 \mid b^{12}$

۶۴- اگر $a^7 \mid b^{11}$ و $b^7 \mid c^{11}$ کدام گزینه غلط است؟

۱) $a^4 \mid c^{11}$ ۲) $a^3 \mid b^5$ ۳) $a \mid c^3$ ۴) $a^5 \mid c^{12}$

۶۵- به ازای چند عدد صحیح مانند a، دو عدد $4n+3$ و $5n+2$ همواره بر a بخش‌پذیرند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۶- دو عدد $11k+2$ و $7k+m$ به ازای مقادیر مختلف k بر عدد صحیح a بخش‌پذیرند. به ازای کدام m، عدد a فقط چهار مقدار صحیح دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۶

۶۷- دو عدد $2n^2+3$ و $3n^2+n+2$ به ازای برخی از مقادیر n بر عدد d بخش‌پذیرند. d کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۱ ۳) ۳۷ ۴) ۲۳

۶۸- اگر a عددی طبیعی و بزرگ‌تر از یک باشد، به گونه‌ای که $a \mid 4n-7$ و $a^2 \mid 2n-7$ آن‌گاه چند مقدار برای a وجود دارد؟ $(n \in \mathbb{N})$

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۹- اگر $11 \mid 2a+3b$، به ازای چند مقدار k از مجموعهٔ $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -11 \leq x \leq 11\}$، رابطهٔ $11 \mid 6a+kb$ لزوماً برقرار است؟ $(a,b \in \mathbb{Z})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۰- اگر $3a+4b \mid 5a+9b$ آن‌گاه کدام‌یک از اعداد زیر همواره مضرب $3a+4b$ است؟

۱) $83a$ ۲) $167b$ ۳) $167a$ ۴) $42b$

۷۱- عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ وجود دارد که $7 \mid 4k+1$. اگر $49 \mid 16k^2+36k+m$، m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۷۲- اگر $7 \mid 3n+1$، بزرگ‌ترین عددی که عبارت $30n^2+34n+8$ همواره بر آن بخش‌پذیر است کدام است؟

۱) ۱۹۶ ۲) ۴۹ ۳) ۹۸ ۴) ۲۸

۷۳- اگر $13 \mid 93m-25$ کدام گزینه درست است؟

۱) $13 \mid m-1$ ۲) $13 \mid m+1$ ۳) $13 \mid 2m+1$ ۴) $13 \mid 2m-1$

۷۴- اگر $7 \mid 5m+3$ و $11 \mid 3m+7$ کدام گزینه درست است؟

۱) $77 \mid 15m^2-44m+21$ ۲) $77 \mid 15m^2+44m-21$ ۳) $77 \mid 5m^2-11m+7$ ۴) $77 \mid 5m^2+11m-7$

۷۵- اگر $(x-1)(x-2)(x-3)$ مضرب ۷ باشد، آن‌گاه مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی دورقمی x کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۷۶- اگر x^3-7x^2+12x مضرب ۹ باشد، آن‌گاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی x مضرب ۵ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۹

معادلهٔ عادکردنی

۷۷- روی منحنی $y = \frac{7x-1}{3x-1}$ چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

۷۸- نقطهٔ (a,b) نقطه‌ای با مختصات طبیعی روی تابع $yx-y=5x+3$ است. b کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۷

۷۹- اگر $n+2 \mid n^3-4n+3$ آن‌گاه n چند مقدار طبیعی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۸۰- تعداد مقادیر x و y صحیح که در تابع $y=\frac{x^3+x+2}{x+1}$ صدق می‌کند، چندتاست؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۸۱- به ازای چند عدد صحیح n رابطهٔ $n^2-2 \mid 3n+2$ برقرار است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۸۲- به ازای چند عدد دورقمی n، $24 \mid n^3-n$ برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۴۵ ۳) ۵۶ ۴) ۹۰

۸۳- به ازای چند عدد طبیعی دو یا سه‌رقمی مانند n، داریم: $n^3 \mid 3^n$؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۴- اگر a عضوی از مجموعهٔ $A=\{3^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ باشد، آن‌گاه به ازای چند مقدار a عدد طبیعی مانند k می‌توان یافت به گونه‌ای که رابطهٔ $a \mid k^2+3$ برقرار باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

باقی‌ماندهٔ مربع عدد فرد در تقسیم به ۸

۸۵- اگر a عددی صحیح و فرد باشد، آن‌گاه a^2+7 همواره بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۶ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۸۶- اگر x و y اعدادی صحیح از مجموعهٔ $A=\{1,2,3,\ldots,10\}$ باشند، چند نقطه با مختصات صحیح بر روی منحنی $8y-x^2=7$ قرار دارد؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۶ ۴) ۴

۸۷- اگر a عددی فرد و p عددی اول باشد و $a \mid p+2$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $2a^2+p^2+2$ به ۸ کدام است؟

۱) ۴ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۵

۸۸- اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab فرد باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $(a+2)^2+8(b-2)+12$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۹- اگر p یک عدد فرد باشد، عبارت $p^{16}-1$ همواره بر 2^n بخش‌پذیر باشد، حداکثر مقدار n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

سه اتحاد مهم در بخش‌پذیری

۹۰- عدد $3^{48}-2^{48}$ بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۱۹ ۲) ۳۵ ۳) ۴۳ ۴) ۶۵

۹۱- عدد $3^{21}+7^{14}$ بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۷ ۳) ۱۳ ۴) ۱۱

۹۲- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی m، $244 \mid 3^m+1$ برقرار است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۹۳- به ازای چند عدد طبیعی $n\le 1200$، $344 \mid 7^n-1$ برقرار است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) هیچ مقدار

۹۴- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی n، 3^n-2^n بر ۲۱۱ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹

۹۵- به ازای چند مقدار طبیعی دورقمی n، $3^n+5^n \mid 3^{\frac{n(n+1)}{7}}-5^{\frac{n(n+1)}{7}}$ برقرار است؟

۱) ۷ ۲) ۱۵ ۳) ۳۰ ۴) ۴۵

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

۹۶- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۳۷۸ و ۴۶۸ چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۴۸

۹۷- اگر m عددی صحیح باشد، حاصل $\dfrac{(۶m^{۲},۴m)}{|m|}$ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۸- اگر $۲ \mid a$ حاصل $(۳a^{۲},۴۲۰)$ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۹۹- اگر $(a,۱۸) \neq ۱$، مجموع مقادیر تک‌رقمی a کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۲ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۱۰۰- اگر $d=(۳n+۲,۳۶)$ باشد؛ بزرگ‌ترین مقدار d چند مقسوم‌علیه طبیعی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۰۱- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی، $(n-۸,۱۱)$ بزرگ‌تر از ۱ می‌شود؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۴۵ ۴) ۹۰

۱۰۲- به ازای چند مقدار دورقمی n، رابطهٔ $(n,۳۶)=۱۸$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰۳- اگر $(۱۵a,۲۱b)=۱۰۲$ باشد، حاصل (a,b) است؟

۱) ۱۷ ۲) ۳۴

۳) ۱۰۲ ۴) بسته به مقادیر مختلف a و b، هر ۳ گزینه می‌تواند صحیح باشد.

۱۰۴- اگر $(a,۹)=۳$ و $(b,۹)=۳$ کدام رابطهٔ زیر همواره درست است؟

۱) $(a+b,۹)=۳$ ۲) $(ab,۲۷)=۹$ ۳) $(a+b,۹)=۹$ ۴) $(ab,۲۷)=۲۷$

۱۰۵- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰، رابطهٔ $(n,۷۰)=۲$ برقرار است؟

۱) ۴۷ ۲) ۳۳ ۳) ۴۹ ۴) ۳۴

۱۰۶- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰، رابطهٔ $(n,۱۸۰)=۶$ برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۰۷- اگر a و b اعدادی طبیعی باشند به طوری که $(a,۷^{۳}\times۳)=۴۹$ باشد و $(b,۳^{۴}\times۷)=۲۷$ باشد، اگر حاصل $(a^{۲}b^{۳},۲۱^{۵})$ به صورت $۳^{x}\times۷^{y}$ باشد، حاصل xy کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۷۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۵

۱۰۸- اگر یک عدد طبیعی دلخواه باشد به گونه‌ای که $(a,۱۸)=۶$ و $(a,۱۲۱)=۱۱$، آن‌گاه $(a,۲^{۲}\times۳^{۲}\times۷^{۲}\times۱۱^{۲})$ به ازای مقادیر مختلف a، چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۰۹- کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(۵a+۱,۵a+۶)=۱$ ۲) $(۷a+۲,۷a+۹)=۱$ ۳) $(۳a-۱,۳a+۲)=۱$ ۴) $(۲a-۲,۲a+۱)=۱$

۱۱۰- اعداد صحیح a و b به گونه‌ای هستند که $۳ \mid a$ و $۳ \mid b+۱$. کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

۱) $(a,b)=۱$ ۲) $(a,b+۱)=۳$ ۳) $(a+b+۱,۳)=۳$ ۴) $(a+b-۱,۳)=۳$

۱۱۱- اگر $(a,b)=d>۱$ و $d \mid ۴a^{۲}-b+۱۳$، آن‌گاه a کدام مقدار می‌تواند باشد؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۹ ۳) ۷۲ ۴) ۲۵

۱۱۲- اگر b عددی فرد باشد به طوری که $(a,b)=۷$، $c \mid ۲a-۳b$، حاصل (b,c) کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۷ یا ۱ ۴) $|c|$

۱۱۳- به ازای چند مقدار طبیعی و سه‌رقمی n، دو عدد $۱۳n+۶$ و $۱۵n+۷$ نسبت به هم اول‌اند؟

۱) ۹۰۰ ۲) ۴۵۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۲۲۵

۱۱۴- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد $۱۳n+۵$ و $۷n-۲$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۱) ۱۰۱ ۲) ۶۱ ۳) ۹ ۴) ۸۱

۱۱۵- به ازای چند عدد دورقمی n، دو عدد $۲۱n+۱$ و $۱۴n+۳$ نسبت به هم اول‌اند؟

۱) ۷۷ ۲) ۸۳ ۳) ۸۴ ۴) ۹۰

۱۱۶- اگر دو عدد $3n+7$ و $4n+5$ نسبت به هم اول نباشند، کدام نتیجه درست است؟

۱) $11 \mid 7n+12$ ۲) $13 \mid 7n+12$ ۳) $17 \mid 7n+12$ ۴) $19 \mid 7n+12$

۱۱۷- به ازای کدام مقدار a، دو عدد صحیح $3n+2$ و $an+7$ همواره نسبت به هم اول نیستند؟ $(n\in\mathbb{Z})$

۱) ۱۵ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۶

۱۱۸- به ازای چند عدد دورقمی دو عدد $n+3$ و $5n-2$ نسبت به هم اول‌اند؟

۱) ۸۵ ۲) ۵ ۳) ۸۴ ۴) ۸۳

۱۱۹- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $2n^2+3n$ و $3n+2$، برای مقادیر مختلف طبیعی n، چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۲۰- دو عدد $B=2^2\times3^6\times5^7\times7^n\times13^2$ و $A=2^5\times3^2\times5^m\times7^3\times17$ دارای ۵۳ مقسوم‌علیه مشترک مثبت و غیر یک هستند. حاصل AB چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۲۱- اگر برای دو عدد طبیعی a و b داشته باشیم $(a,b)=7$، حاصل $(2a+3b,3a+4b)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۱۴ ۴) ۲۱

۱۲۲- اگر $(a^2,b^2)-(20a,20b)+100=0$ باشد، به ازای چند عدد طبیعی x هر دو رابطهٔ $a \mid x$ و $x \mid b$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

کوچک‌ترین مضرب مشترک

۱۲۳- کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{N}: 28\mid x, 21\mid x\}$ چند مقسوم‌علیه غیر اول دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۱۲۴- حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $([385,186],341)$

۱) ۷۷ ۲) ۲۱۷ ۳) ۳۴۱ ۴) ۳۳

۱۲۵- به ازای چند عدد طبیعی مانند n، ک.م.م و ب.م.م دو عدد n^2-7n+9 و ۳ برابر است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

۱۲۶- به ازای چند عدد صحیح m رابطهٔ $[(m,m^2),m^3]=64$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۲۷- حاصل $((3a^2,6a^4),[12a^3,4a])$ کدام است؟

۱) $3a^2$ ۲) $12a^3$ ۳) $|4a|$ ۴) $|3a|$

۱۲۸- حاصل عبارت $((a,b)[a,b],(a^2,b^2))$ کدام است؟

۱) (a,b) ۲) (a^2,b^2) ۳) $[a,b]$ ۴) $[a^2,b^2]$

۱۲۹- حاصل $[18!,17!-16!-15!]$ کدام است؟

۱) $18!\times15$ ۲) $|5!\times5|$ ۳) $18!\times5$ ۴) $18!\times255$

۱۳۰- به ازای کدام مقدار m رابطهٔ $[(24,18),m]=90$ درست است؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۳۶ ۴) ۴۵

۱۳۱- به ازای چند عدد طبیعی m رابطهٔ $[m,180]=900$ برقرار است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

متباین‌سازی

۱۳۲- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=7$ و $ab=1764$ باشد، حاصل‌جمع بیشترین و کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲۲۴ ۲) ۲۳۱ ۳) ۳۵۰ ۴) ۳۴۳

۱۳۳- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=d$ باشد، حاصل $([a^2,b^2],\frac{a^2b^2}{d^2})$ کدام است؟

۱) $|ab|$ ۲) d^2 ۳) $[a^2,b^2]$ ۴) $\frac{a^2b^2}{d}$

۱۳۴- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۱۱ و کوچک‌ترین مضرب‌مشترک آن‌ها ۳۳۰ است. مجموع دو عدد کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱۲۱ ۲) ۱۸۷ ۳) ۳۴۱ ۴) ۳۵۲

۱۳۵- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=۹$ و $a+b=۱۲۶$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار $[a,b]$ کدام است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۰۵ ۳) ۴۳۲ ۴) ۴۴۱

۱۳۶- اگر $۲ab=۳(a,b)^۲+۱$ حاصل $a^۲+b^۲$ چیست؟ $(a,b\in\mathbb{N})$

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۱۷ ۴) چنین چیزی غیرممکن است.

۱۳۷- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)\neq ۱$ و $۲[a,b]=۴۱(a,b)+۱۳$ باشد، مقدار $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۱۷ ۲) ۱۳۰ ۳) ۱۴۳ ۴) ۱۵۶

۱۳۸- چند زوج عدد طبیعی a و b وجود دارد، به طوری که $a+b=۴۲$ و $\frac{[a,b]}{(a,b)}=۱۲$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۳۹- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، به طوری که $۲a=۷b$ و $۳ab+\frac{[a^۲,b^۲]}{۱۴}=۵۰۴$، آن‌گاه حاصل (a,b) کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۹

۱۴۰- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $۲a+۳b=۹۱$ و $[a,b]=۴۲$ باشد، مجموع ارقام $۳a+۴b$ کدام است؟ $((a,b)>۱)$

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

اعداد اول

۱۴۱- هر عدد اول بزرگ‌تر از ۵ به کدام صورت نمی‌تواند نوشته شود؟

۱) $۱۰k+۱$ ۲) $۱۰k+۳$ ۳) $۱۰k+۵$ ۴) $۱۰k+۷$

۱۴۲- اگر p عدد اول و $p\,|\,۳۰۸$ باشد، p چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۱۴۳- اگر a عددی صحیح و p عددی اول باشد به طوری که $\frac{۲a-۴p}{a}=\frac{۹}{۱۳}$ باشد، حاصل $a+p$ بر کدام عدد اول بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۳ ۳) ۲۹ ۴) ۶۹

۱۴۴- به ازای چند عدد دورقمی بزرگ‌تر از ۸۰ مانند n رابطهٔ $n\,|\,۸۰!$ برقرار نیست؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۴۵- اگر عدد صحیح a دارای دو مقسوم‌علیه طبیعی و b دارای ۳ مقسوم‌علیه طبیعی باشد و $(a,b)=۱$ باشد، ba دارای چند مقسوم‌علیه طبیعی است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) نمی‌توان گفت.

۱۴۶- اگر p عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ $p^۲$ بر ۶ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱ و ۵

۱۴۷- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ p بر ۱۸ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۸- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، چه تعداد از اعداد زیر حتماً مرکب هستند؟

الف) $\frac{p^۲+۱}{۲}$ ب) $\frac{p^۲+۳}{۲}$ پ) $\frac{p^۲+۵}{۲}$ ت) $\frac{p^۲+۷}{۲}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۹- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۲ باشد، کدام‌یک از عبارات زیر همواره عددی مرکب است؟

۱) $۷p-۶$ ۲) $۲^p-۱$ ۳) $۲^p+۱$ ۴) $p^۳+۲$

۱۵۰- اگر $n=(۲\times۳\times۵\times۷\times۱۱\times\cdots\times۹۷)+۱$ باشد، به ازای چند مقدار طبیعی دورقمی کوچک‌تر از ۱۰۰ برای x، $x\,|\,n$ ؟ (n برابر حاصل‌ضرب اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰ به علاوهٔ ۱ است.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶

۱۵۱- به ازای چند مقدار طبیعی n، هر ۵ عدد n، $n+۲$، $n+۶$، $n+۸$ و $n+۱۴$ اول هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۵۲- بزرگ‌ترین عدد اول p که $p^۳\,|\,۵۰!$ باشد، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱۳ ۳) ۱۷ ۴) ۴۷

۱۵۳- به ازای چند مقدار صحیح a، حاصل $a^۲-۷a+۱۲$ عددی اول است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۵۴- اگر a، b و c اعدادی اول متمایز باشند به طوری که $a+b+c=۱۴$ باشد، $a^۲+b^۲+c^۲$ بر کدام عدد بخش‌پذیر نیست؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۱۵۵- چند عدد اول مانند p وجود دارد که عدد $۱۶+۱۱p$ مربع کامل باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۵۶- چند عدد اول مانند p وجود دارد که عدد $۲۷+p$ مکعب کامل باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۵۷- اگر x، y و z اعداد اول متمایز و رابطهٔ $x=y^۲-z^۲$ برقرار باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $\overline{xyz}$ بر ۷ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۵۸- اگر a، b و c اعداد اول متمایز و رابطهٔ $a=b^۲+c^۲$ برقرار باشد، چند مقدار دورقمی برای a وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۵۹- اگر a، b و c اعداد اول متمایز و رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ برقرار باشد، چند مقدار برای a وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

قضیهٔ تقسیم و کاربردها

۱۶۰- در تقسیم چند عدد سه‌رقمی به ۷، باقی‌مانده برابر با ۲ می‌شود؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۱۲۹ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۳۱

۱۶۱- اگر در تقسیمی ۵۰ واحد به مقسوم و ۶ واحد به مقسوم‌علیه اضافه شود، خارج قسمت تغییری نکرده و باقی‌مانده ۴ واحد کم شود، خارج قسمت کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۶۲- فرض کنید مجموع خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۷، عدد ۹ باشد. کدام عدد زیر بر ۱۶ بخش‌پذیر است؟

۱) $a+۳$ ۲) $a+۵$ ۳) $a+۷$ ۴) $a+۹$

۱۶۳- در تقسیم عدد a بر ۱۷، باقی‌مانده برابر ۷ می‌باشد. حداقل چند واحد از مقسوم کم کنیم تا باقی‌مانده برابر ۱۳ شود؟

۱) ۱۱ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۴

۱۶۴- در یک تقسیم، خارج قسمت برابر ۵ و باقی‌مانده ۲۴ می‌باشد. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد به شرطی که مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۶۵- در تقسیم عدد a بر ۱۲، باقی‌مانده ۷ است. اگر ۷۰ واحد به مقسوم اضافه کنیم، خارج قسمت m واحد زیاد و باقی‌مانده n واحد کم می‌شود. $m+n$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۱۶۶- خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی a بر b به ترتیب ۳۱ و ۲۴ می‌باشد. تعداد عددهای طبیعی سه‌رقمی a که بر ۵ بخش‌پذیر باشد کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۶۷- چند عدد سه‌رقمی طبیعی وجود دارد که در تقسیم بر ۱۱، خارج قسمت مضرب ۵ و باقی‌مانده مضرب ۷ باشد؟

۱) ۶۸ ۲) ۱۷ ۳) ۸۵ ۴) ۳۴

۱۶۸- باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۱۱۷ برابر ۲۸ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۱۳ برابر کدام گزینه است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۱۶۹- اگر $a=۹۱k+۲۳$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^۳-۲a^۲-۹$ بر ۷ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۷۰- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم دو عدد a و b بر ۱۷ به ترتیب برابر ۳ و ۵ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲a+۳b+ab$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۱- باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد طبیعی $۲a$ و $۳a$ بر عدد طبیعی x، $(x>۱)$ به ترتیب ۵ و ۲۳ است. x کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۵۸ ۴) ۵۹