۱

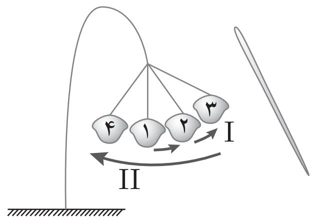
بار الکتریکی، قانون کولن، میدان الکتریکی

بار الکتریکی

حتماً تا به حال برایتان پیش آمده است که پس از راه رفتن با جوراب پشمی بر روی فرش، دست‌تان را به یک جسم فلزی بزنید و جرقه‌ای بین دست‌تان و فلز احساس کنید. یا این‌که در تولد دوست‌تان، برای این‌که بادکنک را به دیوار بچسبانید، آن را به موی سرتان بمالید و چسبیدن آن را به دیوار مشاهده کنید! آیا شده که به علت این پدیده‌ها فکر کنید؟

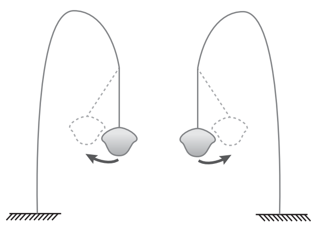
پدیده‌هایی از قبیل این‌ها، به شاخه‌ای از علم فیزیک مربوط هستند که آن را الکتریسیته می‌نامیم. ما در این بخش قصد پرداختن به این شاخه را داریم.

در ابتدا بیایید با آزمایشی شروع کنیم: جسمی سبک مثل یک گلوله کاغذی را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۱ـ۱ از یک نخ ابریشمی آویزان شده است (وضعیت ۱) حال یک میله‌ی شیشه‌ای را به پارچه‌ای ابریشمی بمالید و به آرامی به گلوله نزدیک کنید. خواهید دید که گلوله به میله نزدیک می‌شود (وضعیت ۲) و پس از تماس با آن (وضعیت ۳)، از آن جدا شده و دور می‌شود (وضعیت ۴).

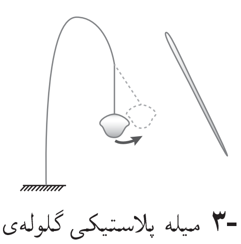


شکل ۱-۱ I) حرکت گلوله‌ی کاغذی قبل از تماس با میله‌ی شیشه‌ای.
II) حرکت گلوله‌ی کاغذی بعد از تماس با آن.

حال همین کار را با گلوله‌های دیگری انجام دهید. با نزدیک کردن این دو گلوله به یکدیگر، مشاهده می‌کنید که از هم دور می‌شوند؛ در صورتی که اگر این گلوله‌ها را قبل از تماس با میله‌ی شیشه‌ای به هم نزدیک می‌کردیم به حالت قائم می‌ماندند و انحرافی نداشتند. بنابراین به نظر می‌رسد که نیروی دیگری به جز نیروی گرانش و نیروی کشش نخ باعث شده است که این دو گلوله همدیگر را دفع کنند. ما این نیروی جدید را "نیروی الکتریکی" می‌نامیم (شکل ۱ـ۲).


شکل ۱-۲ دو گلوله‌ی کاغذی مشابه، یکدیگر را دفع می‌کنند.

حال بیایید آزمایش دیگری انجام دهیم. آزمایش قبل را تکرار می‌کنیم و بعد از مالش گلوله‌ی کاغذی به پارچه‌ی ابریشمی، میله را به گلوله تماس می‌دهیم. میله‌ی دیگری را هم که مثلاً از جنس پلاستیک انتخاب می‌کنیم به پارچه پشمی، مالش می‌دهیم و آن را به گلوله‌های کاغذی نزدیک می‌کنیم. طوری که با آن تماس پیدا نکند. می‌بینیم که میله مطابق شکل ۱ـ۳ گلوله را جذب می‌کند.

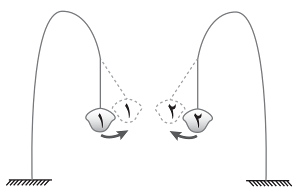

شکل ۱-۳ میله پلاستیکی گلوله‌ی کاغذی آزمایش قبل را جذب می‌کند.

به نظر می‌رسد که نیروی الکتریکی که از آن نام بردیم، این جا نیز وجود دارد. معلوم شده است که نیروی الکتریکی از وجود چیزی به نام «بار الکتریکی» ناشی می‌شود. حال می‌خواهیم بدانیم که این بار الکتریکی چیست و از کجا می‌آید؟ برای درک منشأ بار الکتریکی باید بدانیم که در ماده

چه می‌گذرد؟ همان طور که می‌دانیم اجسام از ذرات بسیار ریزی به نام «اتم» تشکیل شده‌اند که خود شامل دو قسمت هسته و الکترون است. الکترون‌ها به دور هسته در حال گردش‌اند و می‌توان آن‌ها را از اتم جدا کرد. بنابر مشاهدات انجام شده، الکترون‌ها دارای بار الکتریکی هستند.

با توجه به این‌که نیروی الکتریکی ناشی از وجود بار الکتریکی است، به نظر می‌رسد کم یا زیاد شدن تعداد الکترون‌های موجود در اجسام باید نیروی الکتریکی را به وجود بیاورد. یعنی باید اجسام باردار ــ یا اجسامی که کمبود بار یا زیادی بار دارند ــ باید به یکدیگر نیروی الکتریکی وارد کنند. با توجه به دو آزمایش اخیری که گفتیم، این جمله منطقی به نظر می‌رسد. در این دو آزمایش دیدیم که دو جسم باردار همدیگر را دفع یا جذب می‌کنند (به نظر شما چرا این طور است؟). برای درک این مطلب، بیایید آزمایش دیگری ترتیب دهیم.

یک گلوله کاغذی را با میله پلاستیکی که قبلاً به یک پارچه پشمی مالش داده شده است، تماس می‌دهیم. این گلوله را در مجاورت گلوله‌ی کاغذی آزمایش قبل قرار می‌دهیم، این دو گلوله همدیگر را جذب خواهند کرد (مطابق شکل ۱ـ۴).



شکل ۱-۴ گلوله‌ی ۱ با میله‌ی پلاستیکی مالیده به پارچه‌ی ابریشمی و گلوله‌ی ۲ با میله‌ی شیشه‌ای مالیده به پارچه‌ی پشمی تماس داده شده است.

حال اگر این دو گلوله را با هم تماس دهیم و بار دیگر آنها را در مجاورت هم قرار دهیم، می‌بینیم که در تعادل باقی می‌ماند (البته اگر در مالش دادن و تماس دادن با دقت عمل کرده باشیم، احتمال دارد که همچنان مقداری همدیگر را جذب کنند، نکته اینجاست که گلوله‌ها بعد از تماس با هم، دیگر هم را شدیداً جذب نکنند).

از بین رفتن ــ یا کم شدن ــ نیروی بین دو گلوله حاکی از آن است که عامل به وجود آورنده نیروی الکتریکی ــ که همان طور که گفتیم بار الکتریکی است ــ بین این دو گلوله از بین رفته است؛ یا به گونه‌ای خنثی شده است. همواره رسم بر این است که به کمیت‌هایی که در نتیجه جمع شدن با هم کم می‌شوند، علامت‌های مختلفی نسبت می‌دهند، مثلاً در اینجا دو گلوله‌ی باردار ــ کمیت بار الکتریکی ــ با تماس با هم، بر هم اثر کردند و بار هر کدام کمتر شد! بنابراین بنا به قرار داد، به بارهای الکتریکی نیز علامت‌های مختلفی نسبت می‌دهند، یعنی مثبت و منفی.

اگر در آزمایش‌های قبل دقت کنید، می‌بینید که گاهی از شیشه و پشم و گاهی از پلاستیک و ابریشم برای ایجاد بار الکتریکی استفاده شد. قرارداد بار مثبت و منفی به گونه‌ای است که بار ظاهر شده بر روی شیشه را مثبت و بر روی پلاستیک را منفی می‌نامیم.

بر اساس آزمایش‌هایی که انجام شده، مشخص شده است که در واقع این تفاوت بار، ناشی از تفاوت در تعداد الکترون‌هاست در واقع، در میله‌ی پلاستیکی، افزایش تعداد الکترون و در میله‌ی شیشه‌ای کاهش آن به وجود آمده است. بنابراین، طبق قراردادی که گفته شد ــ که بار پلاستیک، منفی و بار شیشه مثبت است ــ افزایش تعداد الکترون موجب ایجاد بار منفی می‌شود و در نتیجه بار الکترون منفی است. این‌که شیشه، با کمبود الکترون، بار مثبت به‌دست آورد نیز حاکی از وجود ذره‌ی باردار دیگری با بار مثبت در درون اتم است. معلوم شده است که این ذره، با ذره‌ی دیگری که باری ندارد، در داخل هسته‌ی اتم قرار دارد؛ ذره‌ی مثبت پروتون و دیگری نوترون نام دارد.

بررسی‌ها نشان می‌دهد که هر اتمی تعداد مشخصی الکترون دارد و در حالت تعادل، اتم باری ندارد ــ و خنثی است! پس حالت تعادل ایجاب می‌کند که مجموع بارهای منفی الکترون‌ها با مجموع بار مثبت پروتون‌های موجود در هسته، به لحاظ بزرگی، دقیقاً برابر باشد. البته تنها الکترون‌ها

و پروتون‌ها نیستند که به هم نیروی الکتریکی وارد می‌کنند. بلکه این دو، عمده‌ترین و ملموس‌ترین عامل ایجاد این نیرو نیز محسوب می‌شوند. در حقیقت، ذرات زیادی از این قبیل وجود دارند.

معلوم شده است که بار ذرات و همچنین بار ایجاد شده در اجسام، کمیتی "گسسته" است؛ یعنی هر باری مضرب صحیحی از یک بار الکتریکی معین است که "بار بنیادی" نامیده می‌شود. این بار بنیادی، که برابر با بار الکترون و پروتون است و مشخصاً کوچک‌ترین بار موجود در طبیعت است، بزرگی $۱/۶۰۲۱۸۹۲ \times ۱۰^{-۱۹}$ کولن[1] را داراست و با نماد e نمایش داده می‌شود. بنابراین هر بار الکتریکی فیزیک را ـ اگر با نماد q نشان دهیم ـ می‌توانیم به عنوان مضربی از e، به صورت ne نمایش دهیم (که در آن n یک عدد صحیح محسوب می‌شود که مثبت یا منفی یا صفر است). (رابطه ۱)

$$q = ne \tag{۱}$$

برای الکترون، n در رابطه ۱ برابر با -۱، و برای پروتون $+۱$ است. برخی از خواص سه ذره[2] موجود در اتم، در جدول ۱ـ۱ آمده است.

جدول ۱ـ۱ برخی از خواص سه ذره‌ی زیراتمی

ذره	بار الکتریکی (کولن)	جرم (بر حسب جرم الکترون)
الکترون (e^-)	$-۱/۶۰۲۱۸۹۲ \times ۱۰^{-۱۹}$	۱
پروتون (p)	$+۱/۶۰۲۱۸۹۲ \times ۱۰^{-۱۹}$	۱۸۳۶/۱۵
نوترون (n)	۰	۱۸۳۸/۶۸

هرگاه یک خاصیت فیزیکی، مانند بار الکتریکی، به جای داشتن مقادیر پیوسته، به صورت «بسته»های گسسته باشد، آن خاصیت را یک خاصیت «کوانتیده» می‌گویند. بنابراین، بار الکتریکی کمیتی کوانتومی با کوانتوم e است[3].

بار الکتریکی یک کمیت پایسته است: در هر آزمایشی که بار الکتریکی در آن دخیل است، باری به وجود نمی‌آید و از بین هم نمی‌رود و بارکل همواره مقداری ثابت است[4]. گفته می‌شود که بارکل موجود در عالم، چه مثبت و چه منفی، مقداری ثابت است، و تاکنون هیچ نقضی بر این گفته آورده نشده است این اصل پایستگی، مشابه اصل پایستگی جرم و انرژی "اصل پایستگی بار الکتریکی" نامیده شده است. برای مشاهده‌ی پایستگی بار، نابودی ذره ـ پادذره می‌تواند مثال خوبی باشد. وقتی یک الکترون (e^-) با بار $-e$، با پادذره‌اش پوزیترون (e^+) با بار $+e$ به هم نزدیک شوند، امکان دارد نابود شوند و انرژی خود را به شکل تابشی بیرون دهند. این تابش می‌تواند از طریق پرتو گاما (γ) باشد. این واکنش را مطابق رابطه‌ی زیر نمایش می‌دهند:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$$

۱) کولن واحد بار الکتریکی است که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت. همین بس که شما در این بخش با این عدد آشنا شوید و تصوری از کوچکی آن به‌دست آورید.

۲) جرم الکترون در حالت ساکن آن در حدود $۹/۱۰۹۵۳۴ \times ۱۰^{-۳۱}$ کیلوگرم گزارش شده است.

۳) این‌که چرا e کوانتوم بار الکتریکی است و بار دیگری غیر از مضرب آن وجود ندارد، رازی است که در فیزیک کلاسیک توضیحی برایش وجود ندارد.

۴) طوری که حتی در آزمایش‌های نابودی ذرات ـ پادذرات و یا واپاشی اجسام نیز بارکل تغییر نمی‌کند!

در این آزمایش بار خالص قبل از بر هم کنش $(0 = (+1) + (-1))$ برابر صفر بوده و بعد از آن نیز ـ از آنجا که پرتو تابش حامل بار نیست ـ صفر می‌ماند؛ در نتیجه دیده می‌شود که در این بر هم کنش، بار الکتریکی پایسته می‌ماند.

رساناها و نارساناها

ذرات درون هسته‌ی اتم را به دلیل وجود نیروهای هسته‌ای قوی، نمی‌توان به سادگی از هسته جدا کرد. بنابراین، عامل اصلی به وجود آورنده‌ی بار الکتریکی، الکترون‌ها هستند. الکترون‌ها می‌توانند درون یک جسم حرکت کنند یا از جسمی به جسم دیگر منتقل شوند، مانند حرکت الکترون‌ها در سیم‌های برق.

بیایید بار دیگر آزمایش گلوله‌ی کاغذی بخش قبل را در نظر بگیریم. در این آزمایش‌ها برای باردار کردن گلوله‌ی کاغذی از میله‌های شیشه‌ای و پلاستیکی استفاده کردیم. این بار میله‌ای فلزی را در دست می‌گیریم و آن را با پارچه‌ی ابریشمی مالش می‌دهیم و سپس به گلوله‌ی کاغذی تماس می‌دهیم. خواهیم دید که در گلوله‌های کاغذی هیچ تغییری ایجاد نمی‌شود؛ باری به آن منتقل نمی‌شود. علت این امر آن است که الکترون‌ها می‌توانند به راحتی در فلز، بدن انسان و از آن به سوی زمین حرکت کنند، در نتیجه بار ایجاد شده در میله‌ی فلزی از بدن ما عبور کرده و به زمین انتقال می‌یابد و دیگر باری روی میله باقی نمی‌ماند تا بتواند روی گلوله‌ی کاغذی جمع شود و آن را باردار کند. چنین اجسامی را ـ میله‌ی فلزی، زمین و بدن انسان ـ که بتوانند به راحتی بار الکتریکی را از خود عبور دهند، "رسانای الکتریسیسته" می‌نامند و اجسامی را مانند شیشه و پلاستیک که این خاصیت را ندارند، "رسانا" و یا "دی‌الکتریک" ـ و یا عایق ـ می‌نامند. بدین ترتیب، وقتی مقداری بار الکتریکی روی سر یک رسانا قرار می‌دهیم، بی‌درنگ در سرتاسر آن پخش می‌شود، تا رسانا به تعادل[1] برسد، و وقتی مقداری بار روی یک سر نارسانایی قرار می‌دهیم، در همان مکان باقی می‌ماند.

توجه داشته باشید که هیچ‌گاه به طور دقیق نمی‌توان تعیین کرد که جسمی رسانا یا نارسانا است. بررسی‌ها نشان می‌دهند که هر جسمی می‌تواند بار الکتریکی را، هر چند به میزان بسیار اندکی، از خود عبور دهد. بنابراین اجسام مختلف در گستره‌ای بین رسانایی کامل و نارسانایی کامل قرار می‌گیرند. بدین ترتیب حتی ممکن است که یک ماده در شرایطی رسانا و در شرایط دیگر نارسانا در نظر گرفته شود، بنابراین رسانایی امری کاملاً نسبی است و ما برای شرایطی مشخص، رسانایی و نارسانایی اجسام خاصی را قرارداد می‌کنیم.

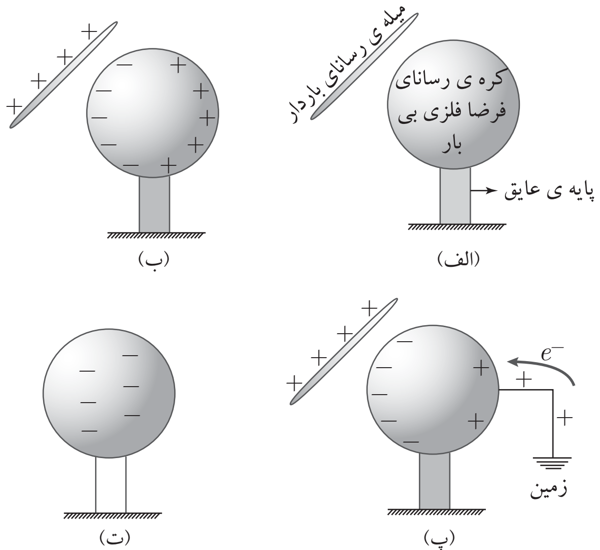
همه‌ی فلزات رساناهای خوبی هستند. حرکت بار در آنها ناشی از حرکت الکترون‌هایشان است. در فلزات به دلیل پیوند خاص اتمی‌شان، برخی از الکترون‌های هر یک از اتم‌ها "آزاد" هستند؛ یعنی پیوندی با هیچ اتم خاصی ندارند. به عبارت بهتر، الکترون‌های آزاد، به بخش‌های بیرونی اتم‌ها تعلق دارند و به دلیل اتصال سست‌شان، به سادگی جدا می‌شوند. این الکترون‌ها، همچون ذرات گاز در یک ظرف در بسته، در حجم فلز سرگردان هستند و به محض ایجاد کمبود یا ازدیاد الکترون در یک سر رسانا، سریعاً اضافه یا کمبود بار را در تمام بخش‌های رسانای فلزی پخش می‌کنند.

۱) فعلاً با واژه‌ی تعادل کنار بیایید، تا بعدها که به مفهوم آن می‌پردازیم!

چنانچه توجه کرده باشید، در تمامی آزمایش‌هایی که تاکنون با آنها سروکار داشته‌ایم، روشی خاص برای باردارکردن اجسام پیشنهاد شده بود: مالش دادن. فرایند دیگری که برای باردارکردن اجسام وجود دارد "القا کردن" است.

القا کردن

برای باردارکردن یک کره‌ی رسانا به روش القا کردن، مطابق شکل ۱ـ۵ عمل می‌کنیم، ابتدا یک میله‌ی شیشه‌ای باردار را که احتمالاً بار خود را از طریق مالش به‌دست آورده است به کره‌ی نارسانایی که روی پایه‌ی نارسانایی قرار دارد، نزدیک می‌کنیم (شکل ۱ـ۵ الف).



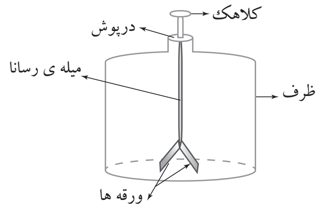
شکل ۱ـ۵ مراحل باردارکردن یک کره‌ی رسانا از طریق روش القا.

گفتیم که بار شیشه مثبت است، این بار مثبت الکترون‌های آزاد سمت نزدیک جسم را جذب می‌کند و در سمت دور آن کمبود الکترون باقی می‌گذارد (شکل ۱ـ۵ ب). ازدیاد الکترون در سمت نزدیک میله بار منفی و کمبود آن در سمت دور از میله بار مثبت ایجاد خواهد کرد. اگر در این لحظه، سمت دورتر از میله‌ی رسانا را موقتاً به زمین وصل کنیم، بار مثبت آن سمت با الکترون‌هایی که از زمین به جسم منتقل می‌شوند و کمبود الکترون آن سمت را جبران می‌کنند، خنثی می‌شود؛ به عبارت بهتر بار مثبت به زمین نشت می‌کند (مطابق شکل ۱ـ۵ پ). این کار فلز را با مقداری بار خالص منفی باقی می‌گذارد. اگر کره‌ی رسانا را بعد از قطع شدن از زمین از میله‌ی شیشه‌ای دور کنیم، بار منفی باقی‌مانده بر روی آن در سرتاسر آن توضیح خواهد شد (شکل ۱ـ۵ ت).

دو وسیله‌ی الکتریکی: الکتروسکوپ ـ وان‌دوگراف

الکتروسکوپ

یکی از وسایل آزمایشگاهی ساده و پرکاربردی که برای مطالعه‌ی باردار بودن یا نبودن اجسام و همچنین تشخیص نوع بارشان ـ مثبت و منفی بودن بار ـ استفاده می‌شود، الکتروسکوپ است. الکتروسکوپ از یک ظرف شیشه‌ای، دو ورقه‌ی نازک رسانا ـ از جنس مس، آلومینیوم و غیره، یک میله‌ی رسانا ـ که ورقه‌ها به آن لولا شده‌اند، و یک درپوش برای ظرف تشکیل شده است (شکل ۱ـ۶).

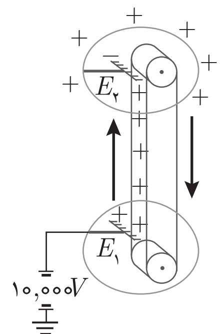


شکل ۱ـ۶ الکتروسکوپ و اجزای آن.

فرض کنید یک میله‌ی پلاستیکی را که با پارچه‌ی پشمی مالش داده شده است (و دارای بار منفی است)، به قسمت کلاهک الکتروسکوپ نزدیک کنیم، به دلیل نیروی دافعه‌ی بین الکترون‌ها، برخی الکترون‌های آزاد قسمت بالایی میله‌ی رسانا به راه افتاده و به سمت پایین ـ ورقه‌ها، حرکت می‌کنند تا از بار منفی میله‌ی پلاستیکی تا حد ممکن فاصله بگیرند؛ بدین ترتیب ورقه‌ها دارای بار همنام منفی می‌شوند. این بار، موجب نیروی دافعه‌ی بین دو ورقه می‌شود که سبب باز شدن ورقه‌ها (افزایش زاویه‌ی بین آنها) می‌شود. این کار، باردار بودن یا نبودن جسم نزدیک کلاهک را مشخص می‌کند. در این آزمایش وقتی میله را از کلاهک دور کنیم، طبیعتاً از آنجا که الکتروسکوپ بی‌بار است، ورقه‌ها به حالت اولیه‌ی تعادلی خود باز می‌گردند. اما در صورتی که میله را به الکتروسکوپ تماس دهیم، در محل تماس میله با کلاهک مقداری از بار میله به الکتروسکوپ منتقل می‌شود و ورقه‌ها منحرف می‌شوند. در این حالت اگر میله را از الکتروسکوپ دور کنیم، از آنجا که بقیه‌ی بار روی میله، که روی میله در جای خود باقی‌مانده بود، به نوبه‌ی خود موجب انحراف ورقه‌ها از هم می‌شد، با دور شدن میله انحراف ورقه‌ها کمتر می‌شود ولی ورقه‌ها به حالت اولیه‌ی خود باز نمی‌گردند. با این کار، الکتروسکوپ باردار شد. حال اگر بار دیگر این کار را با همان میله‌ی پلاستیکی باردار انجام دهیم. مشاهده می‌کنیم که انحراف ورقه‌ها بیشتر می‌شود. این نشان می‌دهد که انحراف ورقه‌های الکتروسکوپ و در نتیجه نیروی الکتریکی بین دو ورقه، با افزایش بار الکتروسکوپ بیشتر می‌شود. در نتیجه رابطه‌ی مستقیم بین نیروی الکتریکی و بار الکتریکی، به طور تجربی قابل مشاهده است.

سؤال: راهی پیدا کنید تا به وسیله‌ی آن با استفاده از یک الکتروسکوپ خنثی، یک میله‌ی پلاستیکی با بار منفی و یک میله‌ی رسانا با دسته‌ی عایق، بدون تماس میله‌ی پلاستیکی به هیچ یک از دو جسم دیگر، میله‌ی رسانا را باردار کنیم. در این حالت، آیا می‌توانید بار میله را تعیین کنید که مثبت است یا منفی؟ بار دو جسم دیگر را چطور؟

مولد وان‌دوگراف



شکل ۱-۷ مولد وان‌دوگراف

وان‌دوگراف دستگاهی است که می‌تواند مقدار زیادی الکتریسیته ساکن تولید کند. این مولد نقاله پهنی درون خود دارد که میان یک ستون حرکت می‌کند تا بار الکتریکی ایجاد کند. بارهای تولید شده توسط این نقاله، درون گنبدی در بالای این مولد تجمع می‌کنند و به دنبال راهی برای فرار هستند. این تجمع بارهای منفی گاهی به واسطه‌ی یک صاعقه‌ی کوچک الکتریکی از طریق هوا به یک جسم رسانای متصل به زمین و یا مستقیماً به خود زمین منتقل می‌شوند (شکل ۱ـ۷).

چند مثال

مثال ۱

اگر به سرعت در راهروی مفروش راه بروید، در حالی که جوراب به پا دارید و سپس با شخصی دست بدهید و یا دستگیره فلزی دری را بگیرید تا آن را باز کنید، غالباً جرقه‌ای ملموس بین دستتان و دیگری احساس خواهید کرد؛ علت این امر چیست؟

حل. علت این امر را می‌توان در آزمایش گلوله‌ی کاغذی جست‌وجو کرد. در این آزمایش، گفتیم که بر اثر مالش میله‌ی شیشه‌ای یا پلاستیکی با پارچه‌های ابریشمی یا پشمی، می‌توان آن را باردار

کرد. زمانی که با سرعت بر روی فرض راه می‌روید، الیاف پلاستیکی موجود در جوراب شما به الیاف نخی فرش (ابریشمی یا پشمی) مالیده و باردار می‌شود. بنابراین زمانی که شما دستگیره‌ی در را لمس می‌کنید، به علت رسانا بودن انسان، این بار الکتریکی تمایل دارد که در شما جریان یابد و به دستگیره در نیز منتقل شود. در این انتقال بار، جرقه‌ای بین دست شما و دستگیره در زده می‌شود. شما ممکن است نظیر این جرقه را هنگام اتصال سیم‌های ماشین برای روشن کردن آن ـ یا همان استارت زدن ـ دیده باشید.

مثال ۲

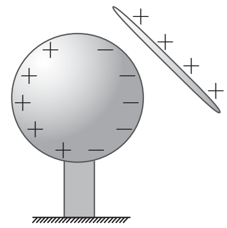
شخصی که روی چهار پایه‌ی عایق‌بندی شده‌ای ایستاده است، رسانای بارداری را که روی پایه‌ی عایقی قرار دارد لمس می‌کند. آیا رسانا کاملاً تخلیه می‌شود؟

حل. چون رسانا بر روی پایه‌ای نارسانا قرار دارد، باری به زمین انتقال نمی‌یابد. هنگامی که شخص، رسانا را لمس می‌کند، چون انسان نیز رساناست، می‌توان مجموعه‌ی انسان و رسانای باردار را به عنوان یک رسانای بزرگ‌تر در نظر گرفت که در نتیجه بار روی تمام آن پخش می‌شود (و چون توسط دو نارسانا از زمین جدا شده‌اند، باری به زمین انتقال نمی‌یابد). بنابراین رسانا تخلیه نمی‌شود و مقداری از بار اولیه بر رویش باقی می‌ماند.

مثال ۳

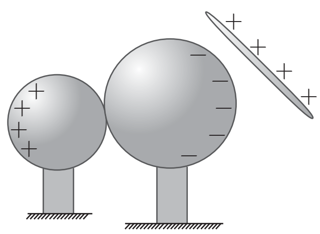
دو کره‌ی فلزی که بر روی پایه‌های نارسانای قابل حملی سوارند، در دست‌اند. راهی پیدا کنید که در آن کره‌ها دارای بار مساوی و با علامت مخالف بشوند. برای این کار می‌توانید از یک میله‌ی شیشه‌ای که با ابریشم مالش داده شده است، استفاده کنید ولی نباید آن را با کره‌ها تماس دهید. آیا اندازه‌ی این کره‌ها یکسان باید باشد تا روش شما مؤثر واقع شود؟

حل. در اینجا، سه جسم داریم. دو کره‌ی فلزی بدون بار و یک میله‌ی شیشه‌ای با بار مثبت و می‌دانیم که نمی‌توانیم میله‌ها را به کره‌ها تماس دهیم. از آنجایی که برای انتقال بارهای کوچک، باید اجسام با هم تماس پیدا کنند، پس باید کاری کنیم که از طریق تماس کره‌ها باری بین آنها انتقال یابد. با این کار چون کره‌ها با هیچ جسم دیگری امکان مبادله‌ی بار ندارند، پس دارای بارهای مساوی و مخالف هم می‌شوند. در بخش باردارکردن به روش القا دیدیم که اگر مقداری بار الکتریکی را به یک جسم فلزی ـ در اینجا یک کره‌ی فلزی ـ نزدیک کنیم، جسم رسانا به طور موضعی باردار می‌شود، یعنی یک سمت آن دارای بار مثبت، و سمت دیگر آن دارای بار منفی می‌شود[1] (شکل ۱ـ۸).



شکل ۱ـ۸ باردارشدن موضعی یک جسم رسانا.

نکته‌ی این سؤال در همین ویژگی‌ای است که رساناها حین القا از خود نشان می‌دهند، اگر دو کره را به هم بچسبانیم و سپس میله‌ی شیشه‌ای را که دارای بار الکتریکی مثبت است مطابق شکل ۱ـ۹ از یک سمت به آنها نزدیک کنیم، بر اثر القا شدن، کره‌ی سمت راست دارای بار منفی و کره‌ی سمت چپ دارای بار مثبت می‌شود. حال اگر در این وضعیت ـ در حالی که میله همچنان نزدیک کره است، کره‌ی سمت چپ را جدا و از بقیه دور کنیم، و سپس میله را دور کنیم، دو کره خواهیم که یکی دارای بار مثبت و دیگری دارای همان مقدار بار با علامت منفی می‌شود. با توجه به نحوه‌ی آزمایش مشخص است که اندازه‌ی کره‌ها هیچ اهمیتی ندارد و تنها رسانا بودن آنها، شرطی است کافی.



شکل ۱ـ۹ باردارکردن هم‌زمان دو کره با استفاده از یک میله‌ی باردار.

۱) این پدیده به اثر القاییدگی معروف است.

مثال ۴ در سؤال قبل، راهی پیدا کنید که در آن کره‌ها دارای بارهای مساوی با علامت یکسان بشوند. آیا در این حالت نیز نیازی به یکسان بودن اندازه‌ی کره‌ها نیست؟

حل. با استفاده از روش گفته شده در پاسخ سؤال پیشین دو کره‌ی رسانا را باردار می‌کنیم. حال با تماس دست به یکی از کره‌ها، آن را خنثی می‌کنیم (البته اگر از روی چهارپایه‌ی عایق پایین آمده باشیم!). اگر کره‌ی خنثی و کره‌ی باردار را با هم تماس دهیم، دو کره با هم مبادله‌ی بار می‌کنند. اگر اندازه‌ی دو کره متفاوت باشد، نمی‌توان گفت که بار به صورت مساوی بین آنها تقسیم می‌شود، ولی اگر یکسان باشند، چون تفاوتی با هم ندارند، بارشان نیز نمی‌تواند متفاوت باشد، بنابراین می‌توان گفت که بار کره‌ی باردار به صورت یکنواخت در کل دو کره پخش می‌شود و در نتیجه کره‌ها دارای بارهای مساوی و هم‌علامت می‌شوند. در اینجا می‌بینیم که یکسان بودن اندازه‌ی کره‌ها الزامی است.

قانون کولن

تا به این نقطه از بحث، ما با بار الکتریکی و نیروی بین بارهای الکتریکی سروکار داشتیم. اما صرفاً تعریفی کیفی از نیروی الکتریکی نمی‌تواند پاسخ‌گوی نیاز ما در فیزیک باشد و بایستی در پی روابط کمی باشیم. با توجه به آنچه تا اینجا گفته شده می‌دانیم که نیروی الکتریکی که بین دو جسم باردار وجود دارد با میزان بار آن جسم رابطه‌ی مستقیم دارد، یعنی با بیشتر شدن بار یک جسم، نیرویی که به آن وارد می‌شود هم بیشتر می‌شود. همچنین دیده می‌شود که این رابطه برای فاصله‌ی بین دو جسم باردار، معکوس است. یعنی با افزایش فاصله‌ی دو جسم باردار، نیرویی که آن دو به یکدیگر وارد می‌کنند، کاهش می‌یابد. (آزمایشی مانند آزمایش‌های بخش پیشین برای بررسی این موضوع طرح کنید)، سپس نیروی الکتریکی با مقدار بار آنها نسبت مستقیم و با فاصله‌ی بین‌شان نسبت عکس دارد. شارل کولن[1]، فیزیک‌دان فرانسوی با آزمایشاتی که انجام داد[2]، مشاهده کرد که اگر فاصله‌ی بین دو بار نقطه‌ای نامشخص ولی ثابت با نام‌های $q_۱$ و $q_۲$ دو برابر شود، نیروی الکتریکی بین آنها یک‌چهارم برابر می‌شود. او از این نتیجه چنین استدلال کرد که نیروی الکتریکی بین دو بار نقطه‌ای (F)، با عکس مجذور فاصله‌ی بین آنها (r) متناسب است. $(F \propto \frac{۱}{r^۲})$

کولن برای پیدا کردن رابطه‌ی نیرو با مقدار بارها هم آزمایش مشابهی انجام داد. ابتدا بار روی گلوله‌ی اول $q_۱$ را نصف کرد و مقدار نیروی وارده بر گلوله‌های دیگر را اندازه گرفت، و بار دیگر بار گلوله‌های دیگر (مثلاً $q_۲$) را نصف کرد و اثر آن را بررسی کرد و مشاهده کرد که نیرو باز هم نصف شد. او از این مشاهدات نتیجه گرفت که مقدار نیرو (F) با مقدار بارهای $q_۱$ و $q_۲$ رابطه‌ی خطی دارد $(F \propto q_۱q_۲)$. با استفاده از نتایج این آزمایشات او قانون مربوط به نیروی اندرکنش دو بار نقطه‌ای خود را چنین بیان داشت:

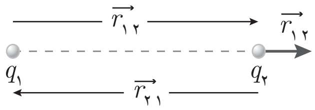
$$F \propto \frac{q_۱q_۲}{r^۲} \Rightarrow F = k\frac{q_۱q_۲}{r^۲}$$

در این رابطه که به قانون کولن معروف است، k ثابتی است که در سیستم‌های مختلف اندازه‌گیری

---
۱) ۱۸۰۶_۱۷۳۶
۲) در سال ۱۷۸۵

متفاوت است. این نیرو در راستای خط واصل دو بار است و جهت آن برای دو بار هم‌نام (یعنی دو بار مثبت یا دو بار منفی) به سمت خارج خط واصل دو بار (نماد نیروی دافعه) و برای دو بار غیرهم‌نام (یعنی بار مثبت ـ بار منفی) به سمت داخل (نماد نیروی جاذبه) است.

برای استفاده از رابطه‌ی کولن و تعیین مقدار ثابت k، نیاز داریم که واحدی برای مقدار بار الکتریکی تعیین کنیم. یکای بار در دستگاه یکاهای بین‌المللی (SI) کولن (C) است. کولن یکای فرعی است و از یکاهای اصلی SI محسوب نمی‌شود. حال با این یکا و با در نظر گرفتن یکای فاصله به متر، مقدار k در SI به‌دست می‌آید. k برابر است با نیرویی که دو بار یک کولنی که به فاصله‌ی یک متر از هم قرار دارند، به هم وارد می‌کنند. مقدار k حدوداً برابر با 9×10^{9} و واحد آن با توجه به قانون کولن $\mathrm{N.m^2/C}$ است. به بیان دیگر k برابر با $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ است که در آن ϵ_0 ضریب تراوایی الکتریکی خلأ است. در این کتاب، ضریب فوق به هر دو شکل نمایش داده شده است.



شکل ۱ـ۱۰ r_{12} فاصله‌ی بار ۱ از ۲ و r_{21} فاصله‌ی بار ۲ از ۱ است که $r_{12} = r_{21}$ است و در حالت برداری $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$ (و $\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$).

شکل برداری قانون کولن به این صورت نوشته می‌شود:

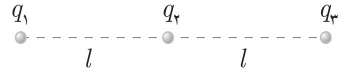
$$\vec{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$
$$\vec{F}_{21} = \frac{kq_1q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}$$

$\hat{r}_{12}$ بردار یکه‌ی بردار واصل از بار ۱ به بار ۲ می‌باشد، $\hat{r}_{21}$ هم برعکس.

چند مثال برای قانون کولن

مثال ۵

دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 را به فاصله‌ی l از هم نگه داشته‌ایم. طوری که مکان آنها ثابت باقی بماند. بار سوم q_3 را مطابق شکل ۱ـ۱۱ روی خط واصل q_1 و q_2 قرار می‌دهیم. مقدار بار q_2 را بر حسب q_1 به‌دست آورید، به صورتی که بار q_3 در حال تعادل باشد.



شکل ۱ـ۱۱

حل. به بار q_3 دو نیرو توسط q_1 و ۱۲ اعمال می‌شود. با استفاده از قانون کولن داریم:

$$\vec{F}_{13} = \frac{kq_1q_3}{r_{13}^2}\hat{r}_{13} = \frac{kq_1q_3}{4l^2}\hat{r}_{13}$$
$$\vec{F}_{23} = \frac{kq_2q_3}{r_{23}^2}\hat{r}_{23} = \frac{kq_2q_3}{l^2}\hat{r}_{23}$$

بار q_3 در تعادل است. بنابراین برایند نیروهای وارد بر آن بایستی صفر باشد. داریم:

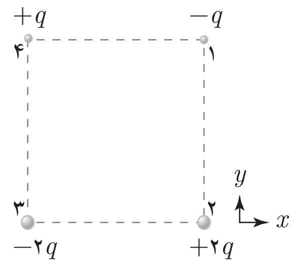
$$\sum \vec{F}_{q_3} = 0 \;\rightarrow\; \frac{kq_1q_3}{4l^2}\hat{r}_{13} + \frac{kq_2q_3}{l^2}\hat{r}_{23} = 0$$

از طرفی $\hat{r}_{13} = \hat{r}_{23}$. بنابراین:

$$\frac{kq_3}{l^2}\hat{r}_{13}\left(\frac{q_1}{4} + q_2\right) = 0 \;\xrightarrow{q_3 \neq 0}\; \frac{q_1}{4} + q_2 = 0$$
$$\rightarrow\; q_2 = -\frac{q_1}{4}$$

مثال ۶

چهار بار نقطه‌ای مطابق شکل در چهار رأس یک مربع ثابت نگه داشته شده‌اند. $q = ۱ \times ۱۰^{-۸}\mathrm{C}$ و $a = ۱۰\,\mathrm{cm}$ است. بردار نیروی الکتریکی وارد بر بار سمت راست بالا را حساب کنید.



شکل ۱-۱۲

حل. از قانون کولن استفاده می‌کنیم:

$$\vec{F}_{۱۲} = \frac{kq_۱q_۲}{r_{۱۲}^۲}\hat{r}_{۱۲}$$

بارها را مطابق شکل ۱ـ۱۲ شماره‌گذاری می‌کنیم. نیروی الکتریکی برایند وارد بر بار ۱ (سمت راست بالا) برابر با مجموع سه نیرویی است که سه بار واقع در سه رأس بر آن وارد می‌کنند، داریم:

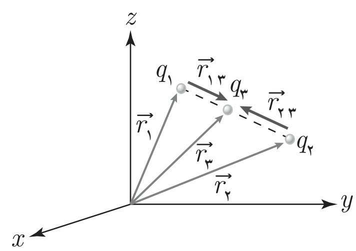
$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_۱ &= \vec{F}_{۲۱} + \vec{F}_{۳۱} + \vec{F}_{۴۱}\\ &= \frac{k(-q)(+۲q)}{a^۲}\hat{r}_{۲۱} + \frac{k(-q)(-۲q)}{(\sqrt{۲}a)^۲}\hat{r}_{۳۱} + \frac{k(-q)(q)}{a^۲}\hat{r}_{۴۱}\end{aligned}$$

طبق دستگاه مختصات مشخص شده، که در صورت مسئله داده شده است، بردارهایی که بدین ترتیب هستند

$$\begin{aligned}&\hat{r}_{۲۱} = \hat{j}\ ,\ \hat{r}_{۴۱} = \hat{i}\\ &\hat{r}_{۳۱} = |\hat{r}_{۳۱}|\cos ۴۵^\circ\,\hat{i} + |\hat{r}_{۳۱}|\sin ۴۵^\circ\,\hat{j} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{i} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{j}\\ \Rightarrow\ \sum \vec{F}_۱ &= \frac{kq^۲}{a^۲}\left[-۲\hat{j} + \frac{۲}{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{i} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{j}\right) - \hat{i}\right]\\ &= \frac{kq^۲}{a^۲}[(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۱)\hat{i} + (\frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۲)\hat{j}]\\ &= \frac{۹ \times ۱۰^۹ \times (۱ \times ۱۰^{-۸})^۲}{(۰/۱)^۲}[(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۱)\hat{i} + (\frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۲)\hat{j}]\\ \sum \vec{F}_۱ &= (-۲/۶۴\hat{i} - ۱۱/۶۴\hat{j}) \times ۱۰^{-۵}\mathrm{N}\end{aligned}$$

مثال ۷

دو بار مثبت $q_۱$ و $q_۲$ در نقاط $\vec{r}_۱$ و $\vec{r}_۲$ قرار داده شده است. بار $q_۳$ و بردار $\vec{r}_۳$ را طوری تعیین کنید که اگر $q_۳$ را در محل $\vec{r}_۳$ قرار دهیم، نیروی وارد بر هر سه بار صفر شود.



شکل ۱-۱۳

حل. نیروی کل وارد بر هر یک از بارها را با استفاده از قانون کولن حساب می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم تا هر کدام در حال تعادل باشند. از آنجا که نیروی الکتریکی بین دو بار نقطه‌ای در راستای خط واصل‌شان به آنها وارد می‌شود، صفر شدن نیروی برایند وارد بر هر یک از بارها تنها در صورتی ممکن می‌شود که دو نیرویی که از سوی دو بار دیگر بر آن وارد می‌شود، در یک راستا باشند، این امر تنها هنگامی محقق می‌شود که هر سه بار روی یک خط قرار داشته باشند. همان طور که از شکل ۱ـ۱۳ مشخص است، از آنجا که هر دو بار $q_۱$ و $q_۲$ مثبت هستند، و نیروی وارده از آنها بر بار $q_۳$ از یک جنس است. برای صفر شدن نیروی وارد بر بار ۳، این بار باید میان دو بار دیگر واقع شود.

برای برآیند نیروی وارد بر $q_۳$ داریم:

$$\sum \vec{F}_۳ = \frac{kq_۱q_۳}{r_{۱۳}^۲}\hat{r}_{۱۳} + \frac{kq_۱q_۲}{r_{۲۳}^۲}\hat{r}_{۲۳} = ۰ \qquad (۱)$$

و همچنین برای بردارهای $\vec{r}_{۱۳}$ و $\vec{r}_{۲۳}$، اندازه‌های آنها و بردارهای یکه‌شان داریم:

$$\vec{r}_{۱۳} = \vec{r}_۳ - \vec{r}_۱ \;\Rightarrow\; r_{۱۳} = |\vec{r}_۳ - \vec{r}_۱| \;\;,\;\; \hat{r}_{۱۳} = \frac{\vec{r}_{۱۳}}{|\vec{r}_{۱۳}|} = \frac{\vec{r}_۳ - \vec{r}_۱}{|\vec{r}_۳ - \vec{r}_۱|}$$

در مورد $r_{۲۳}$ و بردار یکه‌ی آن $\hat{r}_{۲۳}$ هم اوضاع از همین قرار است. با توجه به این اطلاعات عبارت (۱) به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{q_۱}{|\vec{r}_۳ - \vec{r}_۱|^۳}(\vec{r}_۳ - \vec{r}_۱) + \frac{q_۲}{|\vec{r}_۳ - \vec{r}_۲|^۳}(\vec{r}_۳ - \vec{r}_۲) = ۰ \qquad (۲)$$

از طرفی، همان طور که در شکل مشخص است، بردارهای یکه‌ی $\hat{r}_{۲۳}$ و $\hat{r}_{۱۳}$ روی یک خط و در خلاف جهت هم قرارگرفته‌اند. بنابراین داریم:

$$\frac{\vec{r}_۳ - \vec{r}_۱}{|\vec{r}_۳ - \vec{r}_۱|} = -\frac{\vec{r}_۳ - \vec{r}_۲}{|\vec{r}_۳ - \vec{r}_۲|} \qquad (۳)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳)، رابطه(۲) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{q_۱}{|\vec{r}_۳ - \vec{r}_۱|^۲} - \frac{q_۲}{|\vec{r}_۳ - \vec{r}_۲|^۲} = ۰$$

از آنجا که $q_۱$ و $q_۲$ کمیت‌هایی با مقدار مثبت هستند، می‌توان از این عبارت به ترتیب زیر جذر گرفت:

$$q_۱, q_۲ > ۰ \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{q_۱}}{|\vec{r}_۳ - \vec{r}_۱|} = \frac{\sqrt{q_۲}}{|\vec{r}_۳ - \vec{r}_۲|} \qquad (۴)$$

از آنجا که خواسته‌ی ما بردار مکان بار $q_۳$ یعنی $\vec{r}_۳$ است، با استفاده از رابطه‌ی (۳)، رابطه‌ی (۴) را به ترتیب زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{q_۱}}{|\vec{r}_۳ - \vec{r}_۱|} \times \frac{|\vec{r}_۳ - \vec{r}_۱|}{\vec{r}_۳ - \vec{r}_۱} = \frac{\sqrt{q_۲}}{|\vec{r}_۳ - \vec{r}_۲|} \times -\frac{|\vec{r}_۳ - \vec{r}_۲|}{\vec{r}_۳ - \vec{r}_۲} \\
&\Rightarrow \frac{\vec{r}_۳ - \vec{r}_۱}{\sqrt{q_۱}} = -\frac{\vec{r}_۳ - \vec{r}_۲}{\sqrt{q_۲}} \\
&\Rightarrow \vec{r}_۳ = \frac{\sqrt{q_۱}\vec{r}_۲ + \sqrt{q_۲}\vec{r}_۱}{\sqrt{q_۱} + \sqrt{q_۲}} \qquad (۵)
\end{aligned}$$

و بدین ترتیب بردار $\vec{r}_۳$ بر حسب دو بردار و دو بار دیگر تعیین می‌شود.
برای به‌دست آوردن بار $q_۳$، بایستی معادله‌ی تعادل را برای بار دیگری، مثلاً بار $q_۱$ بنویسیم:

$$\sum \vec{F} = \frac{kq_۱q_۲}{|\vec{r}_۲ - \vec{r}_۱|^۳}(\vec{r}_۲ - \vec{r}_۱) + \frac{kq_۱q_۳}{|\vec{r}_۳ - \vec{r}_۱|^۳}(\vec{r}_۳ - \vec{r}_۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{q_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+\frac{q_3}{|\vec{r}_3-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_3-\vec{r}_1)=0 \qquad (6)$$

$$\vec{r}_3-\vec{r}_1=\frac{\sqrt{q_1}\vec{r}_2+\sqrt{q_2}\vec{r}_1-\left(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}\right)\vec{r}_1}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}$$

$$=\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1) \qquad (7)$$

$$\Rightarrow |\vec{r}_3-\vec{r}_1|=\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}|\vec{r}_2-\vec{r}_1| \qquad (8)$$

با جایگذاری دو عبارت (۷) و (۸) در رابطه‌ی (۶)، پس از ساده‌سازی عبارت حاصله، داریم:

$$q_2+\frac{q_3}{\left(\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}\right)^3}\cdot\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}=0$$

$$\Rightarrow q_3=\frac{-q_1q_2}{\left(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}\right)^2}$$

و بدین ترتیب بار q_3 بر حسب دو بار q_1 و q_2 به‌دست می‌آید.

میدان الکتریکی

احتمالاً تاکنون توجه کرده‌اید که در طبیعت هیچ فعل و انفعالی بدون برقرار بودن یک پل ارتباطی میان دو طرف، انجام نمی‌شود. در قسمت‌های قبل دیدیم که دو جسم باردار، به یکدیگر نیروی الکتریکی وارد می‌کنند؛ ولی در عمل، پل ارتباطی‌ای میان دو جسم مشاهده نکردیم. پس نیروی الکتریکی چگونه و از چه طریقی می‌تواند از یک جسم باردار به دیگری منتقل شود؟

هنگامی که یک بار الکتریکی (یا جسمی باردار) را در فضا قرار می‌دهیم، این بار موجب ایجاد خاصیتی در آن نقطه و نقاط پیرامون آن می‌شود. به گونه‌ای که اگر بار الکتریکی دیگری را در این منطقه قرار دهیم، نیروی مشخصی را تجربه می‌کند. چنین خاصیتی، که توسط یک بار الکتریکی در فضای پیرامون آن ایجاد می‌شود، با مفهومی به نام «میدان الکتریکی» توجیه می‌شود، هر بار الکتریکی در فضای اطراف خود میدان الکتریکی ایجاد می‌کند و به هر بار الکتریکی دیگری که در این فضا قرار گیرد، نیروی متناسب با مقدار میدان الکتریکی در آن نقطه وارد خواهد شد. بنابراین، میدان الکتریکی رابطی میان بارهای الکتریکی است، که به موجب آن بارها بر هم نیرو وارد می‌کنند.

بار $\leftrightarrow$ میدان الکتریکی $\leftrightarrow$ بار

بنابراین، در فضایی که بارهای الکتریکی وجود داشته باشند، میدان الکتریکی حضور دارد. این میدان در هر نقطه، اندازه و جهتی دارد. در حقیقت، میدان الکتریکی، میدانی از بردارهاست که با $\vec{E}$ نشان داده می‌شود. میدان $\vec{E}$، در هر نقطه برابر با نیروی الکتریکی $\vec{F}$ وارد بر واحد بار الکتریکی تعریف می‌شود. یعنی:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$

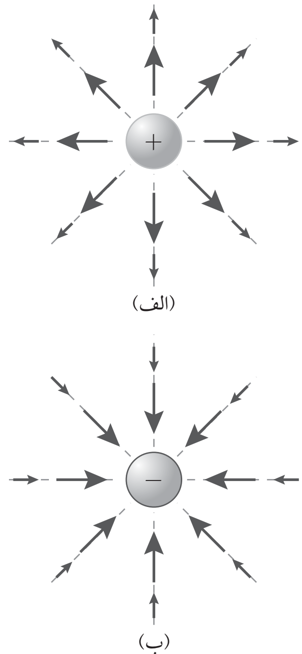
یعنی هنگامی که آرایش ثابتی از بارهای الکتریکی در فضا وجود دارد که میدانی را در فضا به وجود آورده‌اند، برای محاسبه‌ی میدان در یک نقطه، بار آزمون q_0 را به نقطه‌ی مورد نظر می‌بریم و نیروی وارده بر آن $(\vec{F})$ را مشاهده می‌کنیم. میدان در این نقطه $(\vec{E})$ برابر نیروی وارد بر واحد بار در آن نقطه است. چنانچه این کار برای تمام نقاط فضا انجام شود، میدان الکتریکی فضا به‌دست آمده است.

فرض کنید بار نقطه‌ای q در مبدأ مختصات (نقطه‌ی $(0, 0, 0)$) قرارگرفته است. برای محاسبه‌ی $\vec{E}$ در هر نقطه، بایستی از بار آزمون استفاده کنیم. بار آزمون q_0 را در نقطه‌ی دلخواهی در مختصات کروی (r, θ, φ) قرار می‌دهیم. نیروی وارد بر آن، با توجه به قانون کولن برابر است با:

$$\vec{F} = k\frac{qq_0}{r^2} \cdot \hat{r}$$

بنابراین میدان الکتریکی در این نقطه با این رابطه به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= k\frac{qq_0}{r^2} \cdot \hat{r} \times \frac{1}{q_0} \\ &= k\frac{q}{r^2} \cdot \hat{r}\end{aligned}$$



شکل ۱-۱۴

این رابطه مستقل از زوایای θ و φ[1] است و تنها راستای شعاعی (r) دارد. اگر بار چشمه (یا q) مثبت باشد $(q > 0)$، $\vec{E}$ در جهت $\hat{r}$ خواهد بود؛ یعنی میدان الکتریکی یک بار مثبت در هر نقطه دلخواه از فضای اطراف آن، در راستای خط واصل میان بار q و نقطه‌ی مورد نظر، و در جهت دور شدن از آن است. (شکل (الف) ۱ـ۱۴) اگر بار چشمه منفی باشد $(q < 0)$، میدان در همان راستا و در خلاف جهت $\hat{r}$ خواهد بود. (شکل (ب) ۱ـ۱۴)

به طور کلی، میدانی که یک بار نقطه‌ای در فضا ایجاد می‌کند، به شکل بردارهایی در راستای شعاع کره‌ای فرض می‌شود که بار چشمه در مرکز آن قرارگرفته است.

برهم‌نهی میدان‌های الکتریکی

اگر تعداد بار نقطه‌ای در فضا حضور داشته باشند، نیروی الکتریکی که بر بار آزمون q_0 وارد می‌شود، برابر با مجموع نیروهایی است که هر کدام از بارهای نقطه‌ای، به طور مستقل، بر بار q_0 وارد می‌کنند. اگر برایند نیروهای وارد بر q_0 با $\sum \vec{F}_{q_0}$ و نیروی وارده از هر بار q_i بر بار q_0 با $\vec{F}_i$ (که i شماره‌ی بار چشمه است) نشان داده شود، داریم:

$$\sum \vec{F}_{q_0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

و در مورد میدان الکتریکی در محل بار آزمون q_0 (که هر نقطه‌ی دلخواهی می‌تواند باشد) داریم:

$$\vec{E} = \frac{\sum \vec{F}_{q_0}}{q_0} = \frac{\sum \vec{F}_i}{q_0} = \frac{\vec{F}_1}{q_0} + \frac{\vec{F}_2}{q_0} + \cdots + \frac{\vec{F}_n}{q_0}$$

۱) توجه کنید، نقطه را با مختصات (r, θ, φ)، یعنی در مختصات کروی اعلام کردیم تا همین نکته را یادآور شویم که میدان در راستای شعاعی است.

و از آنجایی که هر کدام از جملات عبارت سمت راست، برابر با میدان الکتریکی حاصل از هر بار چشمه در مکان بار $q_۰$ است، داریم:

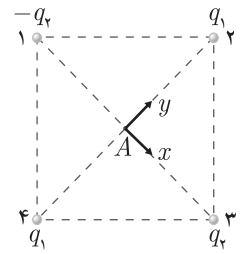
$$\vec{E} = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ + \cdots + \vec{E}_n = \sum_{i=۱}^{n} \vec{E}_i$$

و این همان خاصیت برهم‌نهی میدان‌های الکتریکی است. میدان الکتریکی ناشی از یک آرایش بار مشخص در نقطه‌ای از فضا با مجموع برداری میدان مستقل حاصل تک‌تک از بارها در آن نقطه برابر است.

مثال ۸ در شکل ۱ـ۱۵، بردار میدان الکتریکی را در نقطه‌ی A (مرکز مربع) به‌دست آورید.

حل. با توجه به اصل برهم‌نهی میدان‌ها، داریم:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ + \vec{E}_۳ + \vec{E}_۴$$



شکل ۱-۱۵

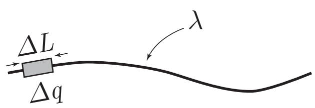
برای محاسبه‌ی بردار تک‌تک میدان‌ها، و سپس جمع برداری آنها، بایستی دستگاه مختصات و مبدأ آن را مشخص کنیم. دستگاه مختصات مناسب، در شکل نشان داده شده است که در نقطه‌ی مرکز و در راستای قطرهای مربع انتخاب شده است. میدان ناشی از هر کدام از بارها عبارت است از:

$$\vec{E}_۱ = \frac{-kq_۲}{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a\right)^۲}\hat{i} \ , \ \hat{E}_۲ = \frac{kq_۱}{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a\right)^۲}(-\hat{j})$$

$$\vec{E}_۳ = \frac{kq_۲}{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a\right)^۲}(-\hat{i}) \ , \ \hat{E}_۴ = \frac{kq_۱}{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a\right)^۲}(\hat{j})$$

$$\Rightarrow \vec{E}_A = E_۱ + E_۲ + E_۳ + E_۴ = \frac{-۴kq_۲}{a^۲}\hat{i}$$

بدین ترتیب، با استفاده از اصل برهم‌نهی، میدان ناشی از هر آرایش بار نقطه‌ای قابل محاسبه است. اما در واقعیت، معمولاً بارهایی که با آنها سروکار داریم، نقطه‌ای نیستند، بلکه به شکل اجسام باردار هستند که بار آنها به گونه پیوسته است، مانند سیم یا نخ باردار یا ورق و یا کره‌ی باردار. در این حالت‌ها، برای میدان الکتریکی و محاسبات مربوط به آن، مفهومی به نام «چگالی بار الکتریکی» تعریف می‌شود. چگالی بار الکتریکی در حالت کلی، بار الکتریکی در واحد طول، سطح یا حجم است و این‌که کدام‌یک از اینها انتخاب شود، به شرایط بارگذاری و شکل تأثیر آرایش آن در نقاط مورد نیاز برای محاسبات بستگی دارد. تعاریف مربوط به هر کدام از انواع چگالی در زیر آمده است:



شکل ۱-۱۶

- چگالی بار خطی، که با λ نشان داده می‌شود، برابر است با مقدار بار موجود در واحد طول. این تعریف، با توجه به شکل زیر با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

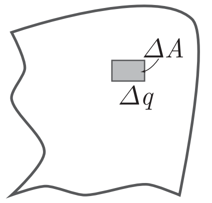
$$\lambda = \lim_{\Delta L \to ۰} \frac{\Delta q}{\Delta L}$$

در صورتی که بار بر روی نخ یا سیم توزیع شده باشد، می‌توان چگالی بار را خطی در نظر گرفت.

• چگالی بار سطحی، σ، برابر است با مقدار بار موجود در واحد سطح. با توجه به شکل ۱ـ۱۷:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta A}$$

بار سطحی باری است که روی سطحی مانند یک ورق، یک پوسته‌ی کروی و هر سطح دیگری مانند آنها توزیع شده باشد.

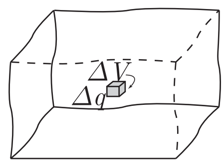


شکل ۱-۱۷

• چگالی بار حجمی، ρ، برابر است با مقدار بار موجود در واحد حجم. با توجه به شکل ۱ـ۱۸:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

بار حجمی باری است که در حجمی از جسم پخش شده باشد، مانند بار پخش شده در داخل کره نارسانا.

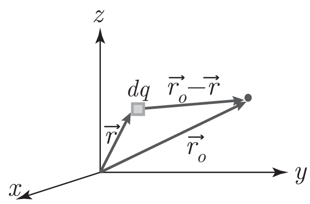


شکل ۱-۱۸

محاسبه‌ی میدان در توزیع بارهای غیرنقطه‌ای چگونه است؟ این کار با تقسیم جسم باردار به قسمت‌های بسیار کوچکی انجام می‌شود و هر قسمت معادل با یک بار نقطه‌ای با مقدار Δq در نظر گرفته می‌شود؛ در نتیجه این تقسیم‌بندی، میدان الکتریکی در نقطه‌ی دلخواهی از فضا، از برآیند میدان‌های حاصل از هر کدام از بارهای نقطه‌ای فرضی Δq به‌دست می‌آید. در این حالت، جسم به مجموعه‌ای از تعداد زیادی بار نقطه‌ای تبدیل می‌شود. Δq، و به عبارت بهتر، dq، جزء بار الکتریکی جسم، در توزیع بار خطی از رابطه‌ی $dq = \lambda \cdot dl$، در توزیع بار سطحی از رابطه‌ی $dq = \sigma dA$ و در توزیع بار حجمی از رابطه‌ی $dq = \rho dV$ به‌دست می‌آید. محاسبه‌ی میدان ناشی از هر جزء بار، با توجه به رابطه میدان الکتریکی در زیر آمده است، میدان ناشی از جزء بار، dq که در مکان $\vec{r}$ از فضا واقع است، در نقطه‌ی A، واقع در $\vec{r}_0$، برابر است با:

$$d\vec{E} = \frac{kdq}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}(\vec{r}_0 - \vec{r}) = \frac{kdq}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}$$

که در آن $|\vec{r}_0 - \vec{r}|^2$ معادل r^2، و $\frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}$ معادل عبارت $\hat{r}$ در رابطه‌ی میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای واقع در مبدأ مختصات است.



شکل ۱-۱۹

حال برای به‌دست آوردن میدان $(\vec{E})$ ناشی از کل توزیع بار جسم در نقطه‌ی $\vec{r}_0$ کافیست اجزای کوچک میدان الکتریکی، یا $d\vec{E}$ها را با یکدیگر جمع کنیم. با توجه به پیوسته بودن تقریبی توزیع بار، این مجموع $(\sum)$ به جمع انتگرالی تبدیل می‌شود:

$$\vec{E} = \int \frac{kdq}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}(\vec{r}_0 - \vec{r})$$

و این انتگرال بر روی تمام جسم انجام می‌شود.

برای هر کدام از انواع توزیع بار، شکل رابطه‌ی انتگرالی با توجه به تفاوت در شکل dq در زیر آمده است:

$$\text{توزیع بار خطی} \quad \vec{E} = \int \frac{k\lambda dL}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}(\vec{r}_0 - \vec{r})$$

$$\text{توزیع بار سطحی} \quad \vec{E} = \iint \frac{k\sigma dA}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}(\vec{r}_0 - \vec{r})$$

$$\text{توزیع بار حجمی} \quad \vec{E} = \iiint \frac{k\rho dV}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}(\vec{r}_0 - \vec{r})$$

انتگرال چندگانه

اگر تابع f روی مستطیل $Q = [a,b] \times [c,d]$ پیوسته باشد، آنگاه f روی Q انتگرال‌پذیر است. به علاوه، مقدار انتگرال را می‌توان با انتگرال‌گیری مکرر به‌دست آورد. این انتگرال روی Q را به شکل زیر نشان می‌دهند:

$$\iint_Q f = \int_c^d \Big[\int_a^b f(a,b)dx\Big]dy = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)dy\Big]dx$$

مثال ۹

می‌دانیم که اگر L خطی در صفحه‌ی یک ورق باشد و $d(x,y)$ فاصله‌ی نقطه‌ی (x,y) تا خط L باشد گشتاور لختی ورق حول L با رابطه‌ی زیر معلوم می‌شود:

$$I_L = \iint_S d^۲(x,y)dxdy$$

که در آن (x,y) نقطه‌ای از صفحه‌ی S محسوب می‌شود. به عنوان مثال گشتاور لختی حول محور x که با I_x نشان داده می‌شود برابر است با:

$$I_x = \iint_S y^۲ dxdy$$

و نیز گشتاور لختی قطبی حول مبدأ که با $I_\circ$ نمایش داده می‌شود برابر است با:

$$I_\circ = I_x + I_y = \iint_S (x^۲ + y^۲)dxdy$$

یک ورق نازک با چگالی ثابت c به دو دایره متحدالمرکز به شعاع‌های a و b، $\circ < b < a$ به مرکز مبدأ محدود است. می‌خواهیم گشتاور لختی قطبی آن را محاسبه کنید.

حل. $I_\circ$ برای این ورق برابر است با:

$$I_\circ = c\iint_S (x^۲ + y^۲)dxdy$$

که در آن ناحیه‌ای است که در چنین بازه‌ای قرار دارد:

$$b^۲ \leq x^۲ + y^۲ \leq a^۲$$

$$I_\circ = c\iint_{S(a)} (x^۲ + y^۲)dxdy - c\iint_{S(b)} (x^۲ + y^۲)dxdy$$

که $S(a)$ و $S(b)$ قرص‌هایی دایره‌ای شکل به شعاع‌های a و b هستند. نخست برای محاسبه‌ی انتگرال روی $S(a)$ می‌توانیم از انتگرال پی‌درپی استفاده کنیم:

$$\iint_{S(a)} (x^۲ + y^۲)dxdy = ۴\int_\circ^a \Big[\int_\circ^{\sqrt{a^۲ - x^۲}} (x^۲ + y^۲)dy\Big]dx = \frac{\pi a^۴}{۲}$$

همچنین انتگرال روی $S(b)$ نیز به شکل همین رابطه محاسبه می‌شود. بنابراین برای گشتاور لختی قطبی داریم:

$$I_\circ = \frac{\pi c}{۲}(a^۴ - b^۴) = \pi c(a^۲ - b^۲)\frac{(a^۲ + b^۲)}{۲} = m\frac{a^۲ + b^۲}{۲}$$

که m جرم ورق است که با رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$m = \pi c(a^2 - b^2)$$

مفهوم انتگرال چندگانه را می‌توان از فضای دوبعدی (انتگرال دوگانه) به فضای n بعدی برای هر $n \geq 3$ تعمیم داد. f که «انتگرالده» نامیده می‌شود، یک میدان اسکالر است که روی مجموعه‌ای مانند S از فضای nبعدی معین و کراندار است. f روی S را انتگرال nگانه می‌نامند و آن را به شکل زیر مشخص می‌کنند

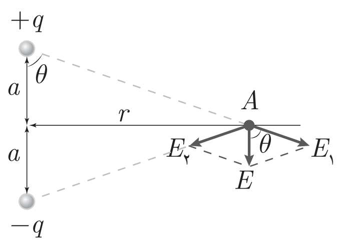
$$\underset{S}{\int \cdots \int} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

این انتگرال را یا به صورت n انتگرال پی‌درپی و یا به صورت انتگرال برداری $\int_S f(\vec{x}) d\vec{x}$ با یک علامت انتگرال نشان می‌دهند که در آن $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$. انتگرال سه‌گانه وقتی است که $n = 3$ باشد. در این حالت به جای (x_1, x_2, x_3) می‌نویسیم (x, y, z) و آن را به شکل زیر نمایش می‌دهیم

$$\iiint_S f(x, y, z) dxdydz \quad \text{یا} \quad \iiint_S f$$

دوقطبی الکتریکی

به مجموعه‌ی دو بار الکتریکی با بارهای مختلف، دوقطبی الکتریکی می‌گویند. دو بار $+q$ و $-q$ را در نظر بگیرید. که در فاصله‌ی $2a$ از هم قرارگرفته‌اند. میدان الکتریکی در نقطه‌ی A که از فاصله‌ی r از وسط دو بار و روی عمودمنصف آنها قرارگرفته است را مطابق شکل با برآیندگیری از دو میدان $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ به‌دست می‌آوریم.



شکل ۱-۲۰

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2 + r^2}$$

$$E = 2E_1 \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

$$\Rightarrow E = 2\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2 + r^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \frac{2a.q}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + r^2)^{3/2}}$$

بنابراین میدان دوقطبی در نقطه‌ی A که در فاصله‌ی معقولی از دوقطبی قرار دارد به‌دست آمد. در صورتی که A در فاصله‌ی بسیار دورتری از دوقطبی قرار داشته باشد $(a \ll r)$. با صرف‌نظر از ترم‌های $\frac{a}{r}$ مرتبه‌ی دو، میدان تقریبی نقطه‌ی A را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$E \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2aq}{r^3}$$

عبارت $۲aq$ به اندازه‌ی لنگر دوقطبی الکتریکی معروف است و آن را با P نشان می‌دهند. با این تعریف، عبارت میدان الکتریکی ناشی از دوقطبی در فواصل دور از آن، به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

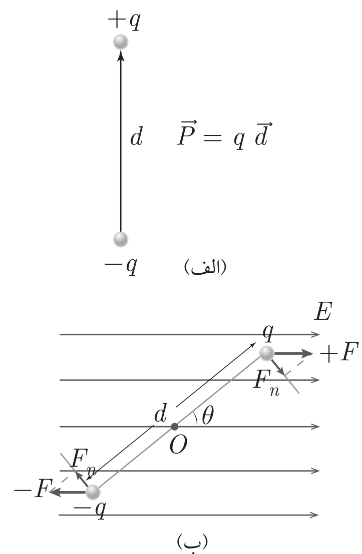
$$E = \frac{۱}{۲\pi\epsilon_{۰}}.\frac{P}{r^{۳}}$$

توجه کنید که میدان الکتریکی در فواصل دور از دوقطبی با عکس توان سوم فاصله متناسب است. مسئله‌ی دوقطبی بسیاری مواقع در بررسی خواص عایق‌ها و دی‌الکتریک‌ها مطرح می‌شود. لنگر دوقطبی $\vec{P}$ در جهت خط واصل بار منفی به مثبتِ آن $(\vec{d})$ است و با رابطه‌ی زیر معلوم می‌شود:

$$\vec{P} = q \cdot \vec{d}$$

مطابق شکل، چنانچه این دوقطبی در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ قرار بگیرد، بر هر یک از دو بار نیرویی وارد می‌شود که خلاف جهت هم هستند. دو نیروی وارده هم‌اندازه و در جهت مخالف هم و از دو نقطه اثر متفاوت وارد می‌شوند. بنابراین گشتاور خالصی ایجاد می‌کنند که تمایل بر چرخاندن دوقطبی دارد تا آن را با میدان هم‌جهت سازد. نیروی مؤثر در تولید گشتاور دوقطبی نیروی عمود بر راستای دوقطبی است که بر هر یک از بارها به صورت مجزا از طرف میدان وارد می‌شود. اگر زاویه‌ی راستای دوقطبی با راستای میدان θ باشد، گشتاور T که حول محورگذرنده از مرکز دوقطبی (O) وارد می‌شود به صورت زیر است:

$$T = ۲ \times \frac{d}{۲} \times F_n = d.F.\sin\theta = d.(qE).\sin\theta = PE.\sin\theta \;\Rightarrow\; T = PE\sin\theta$$



شکل ۱-۲۱ (الف) دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی یکنواخت. (ب) بردار لنگر دوقطبی.

عبارت به‌دست آمده برای گشتاور دوقطبی به بیان بهتر همان ضرب خارجی بردارهای لنگر دوقطبی و میدان الکتریکی یکنواختی است که دوقطبی در آن قرارگرفته است.

$$\vec{T} = \vec{P} \times \vec{E}$$

این بردارگشتاور، همان گشتاوری است که تمایل به چرخش دوقطبی و هم‌راستا ساختن آن با میدان یکنواخت E دارد.

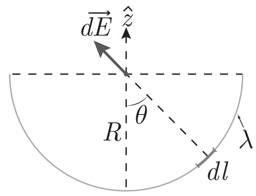
فرض کنید امتداد لنگر دوقطبی با میدان E زاویه‌ی $\theta_{۰}$ می‌سازد و می‌خواهیم آن را به زاویه‌ی θ برسانیم. کار لازم برای چنین تغییری در سیستم ذخیره می‌شود. این کار از برآیندگیری گشتاور دوقطبی در جزء تغییر زاویه به‌دست می‌آید. برای محاسبه‌ی کار، داریم:

$$\begin{aligned} W &= \int dW = \int_{\theta_{۰}}^{\theta} T d\theta = \int_{\theta_{۰}}^{\theta} PE\sin\theta.d\theta \\ &= PE\big[-\cos\theta\big]_{\theta_{۰}}^{\theta} = PE(\cos\theta_{۰} - \cos\theta) \end{aligned}$$

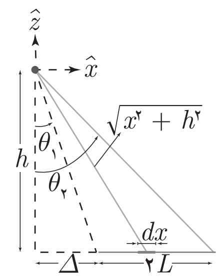
اگر مبنای زاویه را ۹۰° در نظر بگیریم، یعنی فرض کنیم زاویه‌ی اولیه‌ی لنگر دوقطبی با میدان $\frac{\pi}{۲}$ است، کار لازم برای ایجاد وضعیت θ در این حالت به شکل عبارت زیر است:

$$W = -PE\cos\theta = -\vec{P}.\vec{E}$$

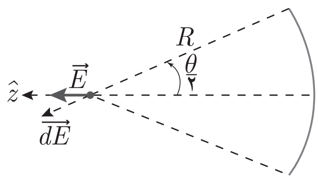
مسائل نمونه فصل ۱



شکل ۱-۲۲



شکل ۱-۲۳ شکل سؤال ۳.



شکل ۱-۲۴

۱. فرض کنید بار با چگالی خطی λ بر روی نیم‌دایره‌ای به شعاع R توزیع شده است. می‌خواهیم $\vec{E}$ را در مرکز نیم‌دایره بیابیم (شکل ۱ـ۲۲).

۲. میله‌ای به طول $2l$ و چگالی بار ثابت λ داریم. می‌خواهیم میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار بر روی این میله را در نقطه‌ای به فاصله‌ی h، که بر روی عمودمنصف میله واقع است، به‌دست آوریم.

۳. در شکل (۱ـ۲۳)، مثال قبل را تعمیم داده‌ایم. تقارن موجود در آن دیگر وجود ندارد و می‌بایست میان برایند را هم در جهت افقی و هم در جهت عمودی محاسبه کنیم.

۴. فرض کنید سیمی به شکل قطاعی از دایره به شعاع R و زاویه‌ی θ، حامل چگالی بار خطی λ داشته باشیم. میدان را در مرکز این قطاع می‌خواهیم. (شکل ۱ـ۲۴)

۵. نیم‌کره‌ای به شعاع R دارای چگالی باریکنواخت سطحی σ است. می‌خواهیم میدان الکتریکی $\vec{E}$ را در مرکز نیم‌کره بیابیم.

۶. میدان حاصل از نیم‌کره‌ی مثال قبل در نقطه‌ای به فاصله‌ی R بالای مرکز نیم‌کره چقدر است؟

۷. فرض کنید نقطه‌ای درون کره‌ای به شعاع R و چگالی بار سطحی یکنواخت σ قرار دارد. فاصله‌ی نقطه از مرکز کره h است. می‌خواهیم میدان را در این نقطه بیابیم.

۸. بار با چگالی بار سطحی ثابت σ بر روی دیسک دایره‌ای شکل به شعاع R قرار دارد. میدان در نقطه‌ی A به فاصله‌ی h در بالای مرکز دیسک را بیابید.

۹. بار با چگالی ثابت σ بر روی صفحه‌ی دوبعدی که از هر دو بُعدش تا بی‌نهایت ادامه یافته، پخش شده است. می‌خواهیم میدان را در نقطه‌ای بالای صفحه و به فاصله‌ی h از آن محاسبه کنیم.

۱۰. کره‌ای به شعاع R دارای چگالی بار حجمی یکنواخت ρ است. می‌خواهیم میدان را در نقطه‌ای به فاصله‌ی h از مرکز کره حساب کنیم.

پاسخ مسائل نمونه فصل ۱

۱. جزئی کوچک از نیم‌دایره را در نظر بگیرید که با زاویه‌ی θ در شکل مشخص شده است. قرینه‌ی این جزء، در زاویه‌ی $-\theta$ وجود دارد که میدان حاصل از آن، با توجه یکنواخت بودن توزیع بار خطی، برابر با $d\vec{E}$ و دارای مؤلفه‌ای افقی در جهت مخالف و مؤلفه‌ای عمودی برابر با مؤلفه‌ی عمودی $d\vec{E}$ خواهد داشت.

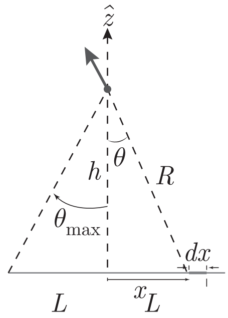
بنابراین تقارن، هر $d\vec{E}$ در نهایت تنها مؤلفه‌ی عمودی خود را باقی خواهد گذاشت، و محاسبه‌ی مؤلفه‌ی افقی میدان صفر را نتیجه می‌دهد. در نتیجه، میدان را در راستای z محاسبه می‌کنیم. با توجه به رابطه‌ی گفته شده داریم:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int |dE_z|\hat{z} = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{kdq}{|\vec{r}_\circ - \vec{r}|^2}(\cos\theta)\cdot\hat{z}$$

$|\vec{r}_\circ - \vec{r}|$ در این مثال، R است. نقطه‌ی $\vec{r}_\circ$ که میدان در آن محاسبه می‌شود، در این مثال مبدأ مختصات است و در نتیجه $\vec{r}_\circ = 0$. داریم:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda dL}{R^2}\cos\theta\cdot\hat{z} = k\lambda\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{Rd\theta}{R^2}\cos\theta\cdot\hat{z}\\ &= \frac{k\lambda}{R}\big(\sin\theta\big)_{-\pi/2}^{\pi/2}\hat{z} = \frac{2k\lambda}{R}\hat{z}\\ \Rightarrow\ \vec{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_\circ R}\hat{z}\end{aligned}$$

و بدین ترتیب، میدان در مرکز نیم‌دایره محاسبه شد.



شکل ۱-۲۵

۲. با توجه به شکل (۱ـ۲۵) و برقراری تقارن (همان طور که در مثال قبل گفته شد)، داریم:

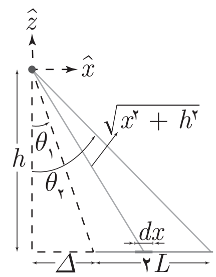
$$\begin{aligned}\vec{E} &= \int d\vec{E} = \int |dE_z|\hat{z} = \int_{-L}^{L}\frac{k.dq}{R^2}\cos\theta\hat{z}\\ &= k\int_{-L}^{L}\frac{\lambda.dx}{R^2}\cos\theta\hat{z} = k\int_{-L}^{L}\frac{\lambda dx}{x^2+h^2}\cos\theta\hat{z}\\ &= k\lambda\int_{-L}^{L}\frac{dx}{x^2+h^2}\cos\theta\hat{z}\ ,\ \begin{cases}x = h\tan\theta\\ dx = h\cdot\sec^2\theta d\theta\end{cases}\\ \Rightarrow\ \vec{E} &= k\lambda\int_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}}\frac{h\sec^2\theta d\theta}{h^2\tan^2\theta + h^2}\cos\theta\hat{z}\ ,\ 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta\\ &= \frac{k\lambda}{h}\int_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}}\cos\theta d\theta\hat{z}\\ &= \frac{k\lambda}{h}\big(\sin\theta\big)_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}} = \frac{k\lambda}{h}\cdot\frac{2l}{\sqrt{l^2+h^2}}\hat{z}\\ \Rightarrow\ \vec{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_\circ}\frac{L}{h\sqrt{L^2+h^2}}\cdot\hat{z}\end{aligned}$$

۳. رابطه‌ای که برای محاسبه میدان عمودی استفاده می‌شود، همان رابطه‌ی مثال قبل است، با این تفاوت که محدوده‌ی θ در مورد آن متفاوت است. در این جا زاویه از θ_1 تا θ_2 تغییر می‌کند، داریم:

$$E_z = \frac{k\lambda}{h}\big(\sin\theta\big)_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{k\lambda}{h}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

و در مورد میدان افقی، داریم:

$$\begin{aligned}E_x &= \int dE_x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{k\lambda dx\sin\theta}{x^2+h^2} = \frac{k\lambda}{h}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta\\ &= \frac{k\lambda}{h}\big(-\cos\theta\big)_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{k\lambda}{h}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\\ \Rightarrow\ \vec{E} &= \frac{k\lambda}{h}\big[(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\hat{x} + (\sin\theta_2-\sin\theta_1)\hat{z}\big]\end{aligned}$$



شکل ۱-۲۶

دو حالت خاص این مثال، حالات پرکاربردی هستند که بهتر است میدان‌های مربوط به آنها محاسبه شود:

الف) خط باری که از دو طرف تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد. این حالت، وقتی حاصل می‌شود که در این مثال، θ_1 به $\frac{\pi}{2}$ و θ_2 به $-\frac{\pi}{2}$ میل کند. در نتیجه میدان افقی و عمودی چنین مقداری خواهد داشت:

$$E_{\text{عمودی}} = \frac{2k\lambda}{h} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h}$$

$$E_{\text{افقی}} = 0$$

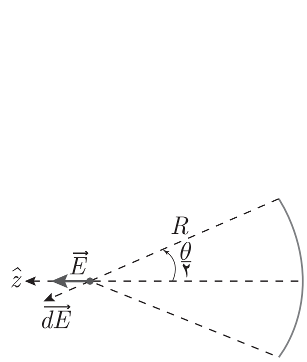
ب) خط باری که از $\theta_1 = 0$ تا $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ کشیده شده باشد. بدین معنی که از مبدأ مشخص شده آغاز شود و از سمت راست نامتناهی باشد. میدان در نقطه‌ای مشابه این مثال که در فاصله h بالای لبه چپ میله قرارگرفته است، بدین ترتیب خواهد بود:

$$E_{\text{عمودی}} = \frac{k\lambda}{h}$$

$$E_{\text{افقی}} = \frac{k\lambda}{h}$$

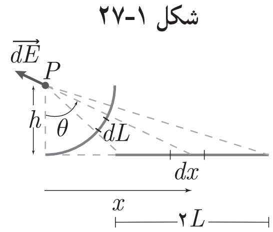
و بدین ترتیب، میدان در این حالت، مستقل از مقدار h، با افق زاویه‌ی 45° می‌سازد.

۴. مانند مثال ۱، رابطه‌ای مشابه برای میدان داریم. چرا که تقارن، با در نظرگرفتن مبدأ زاویه منطبق بر خط تقارن این قطاع، مانند مثال ۱ برقرار خواهد بود و تنها تفاوت در محدوده‌ی θ خواهد بود که در این مورد از $-\frac{\theta}{2}$ تا $\frac{\theta}{2}$ متغیر است. بنابراین، بنا بر رابطه‌ی به‌دست آمده در مثال ۱ داریم:



شکل ۱-۲۷

$$\vec{E} = \frac{k\lambda}{R}\big(\sin\theta\big)_{-\theta/2}^{\theta/2}\hat{z} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\sin\frac{\theta}{2}\hat{z}$$



شکل ۱-۲۸

نکته‌ای با بررسی چهار مثال حل شده به‌دست می‌آید. به شکل ۱ـ۲۸ دقت کنید. قطاعی از دایره به شعاع h را (همان طورکه در شکل نشان داده شده است) در نظر بگیرید. همان‌گونه

که دیدیم، میدان ناشی از جزء dx میله در نقطه‌ی P با چنین رابطه‌ای به‌دست می‌آید:

$$|dE| = \frac{k\lambda dx}{x^2 + h^2} = \frac{k\lambda dx}{x^2 + h^2}$$

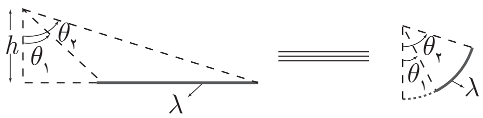
با تغییر متغیر $x = h\tan\theta$ داریم:

$$dx = h(1 + \tan^2\theta)d\theta \;\Rightarrow\; |dE| = \frac{k\lambda}{h}d\theta$$

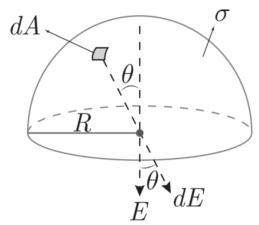
حال فرض کنید همین مقدار بار بر روی جزء dL از قطاع دایره‌ای به مرکز O که در شکل نشان داده شده است، قرار می‌گرفت. برای میدان حاصل از این جزء در نقطه‌ی O داریم:

$$|dE| = \frac{k\lambda dL}{h^2} = \frac{k\lambda h d\theta}{h^2} \;\Rightarrow\; |dE| = \frac{k\lambda}{h}d\theta$$

که همان نتیجه قبل است. بنابراین از نقطه‌ی O، میله‌ی باردار به صورت نیم‌دایره‌ای به شعاع h دیده می‌شود که در ناحیه‌ای که بین θ_1 و θ_2، که خود محدوده‌ای است که میله در آن قرار دارد، قرار گرفته است. این هم‌ارزی در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۱-۲۹

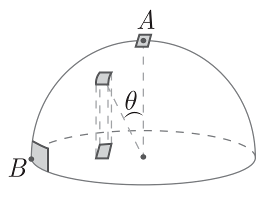


شکل ۱-۳۰

۵. بنابر تقارن، با توجه به مثال‌های قبل (به خصوص مثال نیم‌دایره) معلوم می‌شود که میدان فقط مؤلفه‌ی عمودی دارد. داریم:

$$E = \int dE_{\text{عمودی}} = \int \frac{k\sigma dA}{R^2}\cos\theta$$

عبارت $dA\cos\theta$ که در انتگرال بالا حاصل شد، برابر با مساحت تصویر جزء dA از نیم‌کره بر روی دایره‌ی عظیمه‌ی آن است. همان طور که در شکل نشان داده شده است، از آنجا که جزء سطح روی کره تقریباً به شکل مستطیلی است که دو ضلع آن مستقیماً بر روی سطح صفحه تصویر می‌شوند و دو ضلع دیگرش در $\cos\theta$ ضرب شده و تصویر می‌شوند و بدین ترتیب، قطعه‌ای که دقیقاً بالای نیم‌کره (نقطه‌ی A در شکل) قرار گرفته باشد، مساحت تصویری برابر با مساحت خودش دارد و برای قطعه‌ای که در زاویه‌ی 90° واقع است (یعنی مثلاً در نقطه‌ی B در شکل) مساحت تصویر شده‌اش تقریباً صفر است. بنابراین:

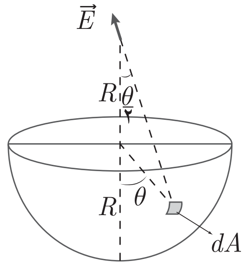


شکل ۱-۳۱

$$E = \int \frac{k\sigma}{R^2}(dA\cos\theta) = \frac{k\sigma}{R^2}\int dA_{\text{سایه}} = \frac{k\sigma}{R^2}A_{\text{قاعده}} = \frac{k\sigma}{R^2}\cdot\pi R^2 = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

البته، از طریق انتگرال‌گیری در مختصات کروی هم می‌توان به همین عبارت برای میدان نیم‌کره در نقطه‌ی مورد نظر دست پیدا کرد:

$$E = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\frac{k\sigma R^2\sin\theta d\theta d\varphi}{R^2}\cos\theta = 2\pi k\sigma\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta$$
$$= \frac{2k\pi\sigma}{2} = \frac{\theta}{4\epsilon_0}$$



شکل ۱-۳۲

۶. بنابر تقارن و از آن چه در مثال‌های قبل دیدیم، در اینجا نیز میدان برآیند تنها در راستای عمودی است. داریم:

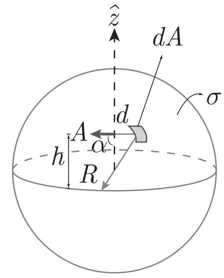
$$\begin{aligned}
E &= \int_{\theta=\circ}^{\theta=\pi/۲}\int_{\varphi=\circ}^{\varphi=۲\pi}\frac{k\sigma(\cos\frac{\theta}{۲})}{(۲R\cos\frac{\theta}{۲})^{۲}}R^{۲}\sin\theta d\theta d\varphi\\
&= \frac{k\sigma\times ۲\pi}{۴}\int_{\circ}^{\pi/۲}\frac{\sin\theta d\theta}{\cos\frac{\theta}{۲}}\\
&= \frac{\pi k\sigma}{۲}\int_{\circ}^{\pi/۲}۲\sin\frac{\theta}{۲}d\theta\\
&= ۲\pi k\sigma\left(-\cos\frac{\theta}{۲}\right)_{\circ}^{\pi/۲} = \frac{\sigma}{۲\epsilon_{\circ}}\left(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)
\end{aligned}$$

۷. باز هم تقارن داریم و در نتیجه‌ی آن میدان تنها در راستای z مؤلفه دارد.

$$E = E_{z} = k\int_{\varphi=\circ}^{\varphi=۲\pi}\int_{\theta=\circ}^{\theta=\pi}\frac{\sigma R^{۲}\sin\theta d\theta d\varphi}{d^{۲}}\cos\alpha$$

که در آن $R^{۲}\sin\theta d\theta d\varphi$ جزء مساحت در مختصات کروی است که در بخش مربوط به مختصات کروی به‌دست آمده است. فاصله‌ی جزء مساحت از نقطه‌ی A یا d، به شکل زیر به‌دست می‌آید (شکل ۱ـ۳۴).

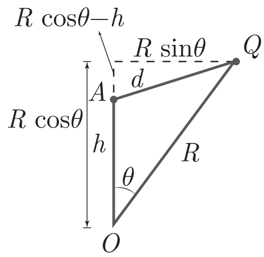
$$d = \sqrt{(R\sin\theta)^{۲}+(R\cos\theta-h)^{۲}}$$



شکل ۱-۳۳

همچنین برای زاویه‌ای که راستای میدان حاصل از جزء مساحت در نقطه‌ی A با راستای عمودی می‌سازد، داریم:

$$\begin{aligned}
dE_{z} &= dE\cos\alpha = dE\frac{R\cos\theta-h}{d}\\
&= dE\frac{R\cos\theta-h}{\sqrt{(R\sin\theta)^{۲}+(R\cos\theta-h)^{۲}}}
\end{aligned}$$



شکل ۱-۳۴

بنابراین میدان برایند به شکل زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned}
E_{z} &= k\int_{\circ}^{۲\pi}\int_{\circ}^{\pi}\frac{\sigma R^{۲}\sin\theta d\theta d\varphi}{\left[(R\sin\theta)^{۲}+(R\cos\theta-h)^{۲}\right]^{۳/۲}}(R\cos\theta-h)\\
&= ۲\pi k\sigma\int_{\theta=\circ}^{\theta=\pi}\frac{R^{۲}\sin\theta d\theta(R\cos\theta-h)}{(R^{۲}+h^{۲}-۲Rh\cos\theta)^{۳/۲}}
\end{aligned}$$

در این مرحله از انتگرال‌گیری، بایستی متغیر را تغییر دهیم. متغیر a و u را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$u = ۲hR\cos\theta \ \Rightarrow\ du = -۲Rh\sin\theta.d\theta$$

$$a = R^{۲}+h^{۲}$$

$$\Rightarrow\ E = ۲\pi k\sigma R^{۲}\left[\int \frac{-udu\cdot R}{۴h^{۲}R^{۲}(a-u)^{۳/۲}} + \frac{۱}{۲R}\int \frac{du}{(a-u)^{۳/۲}}\right]$$

$$= ۲\pi k\sigma R^{۲}\left[\frac{R}{۴h^{۲}R^{۲}}\left(\int \frac{(a-u)du}{(a-u)^{۳/۲}}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \int \frac{adu}{(a-u)^{۳/۲}}\right) + \frac{۱}{۲R}\int \frac{du}{(a-u)^{۳/۲}}\right]$$

$$= ۲\pi k\sigma R^{۲}\left[\frac{۱}{۴Rh^{۲}}(-۲\sqrt{a-u}) + \frac{a}{۴Rh^{۲}}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{-۲}{\sqrt{a-u}} + \frac{۱}{۲R}\cdot\frac{۲}{\sqrt{a-u}}\right]_{u=-۲hR}^{u=۲hR}$$

$$= \frac{\sigma R^{۲}}{۲\epsilon_{\circ}}\left[\frac{-۲}{۴Rh^{۲}}(R-h-(R+h))\right.$$

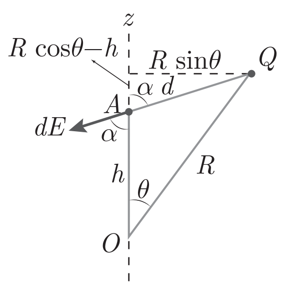
$$\left. - \left(\frac{۲a}{۴Rh^{۲}} - \frac{۱}{R}\right)\times\left(\frac{۱}{R-h} - \frac{۱}{R+h}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\ E = \frac{\sigma R^{۲}}{۲\epsilon_{\circ}}\left[\frac{۱}{hR} - \left(\frac{h^{۲}+R^{۲}}{۲Rh^{۲}} - \frac{۱}{R}\right)\left(\frac{۲h}{R^{۲}-h^{۲}}\right)\right]$$

$$= \frac{\sigma R^{۲}}{۲\epsilon_{\circ}}\left[\frac{۱}{hR} + \frac{h^{۲}+R^{۲}}{R^{۲}-h^{۲}}\cdot\frac{۱}{hR} + \frac{۲h}{R(R^{۲}-h^{۲})}\right]$$

$$\Rightarrow\ E = \frac{\sigma R^{۲}}{۲\epsilon_{\circ}}\left[\frac{۱}{hR} - \frac{\frac{R^{۲}+h^{۲}}{h} - ۲h}{R(R^{۲}-h^{۲})}\right]$$

$$= \frac{\sigma R^{۲}}{۲\epsilon_{\circ}}\left[\frac{۱}{hR} - \frac{۱}{hR}\cdot\frac{R^{۲}-h^{۲}}{R^{۲}-h^{۲}}\right] = \circ$$

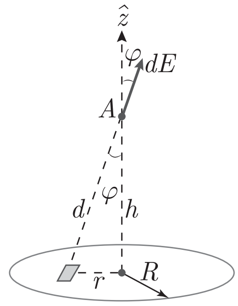


شکل ۱-۳۵

بنابراین، معلوم شد که میدان الکتریکی در داخل کره‌ی باردار با بار یکنواخت سطحی صفر است.

۸. جزئی از مساحت را مطابق شکل ۱ـ۳۶ در نظر بگیرید. بنابر تقارن میدان الکتریکی در جهت $\hat{z}$ خواهد بود. بنابراین، تنها مؤلفه‌ی $\hat{z}$ از میدان این جزء سطح مورد نیاز است. داریم:

$$dE_z = \frac{k\sigma rdrd\theta}{d^{۲}}\cos\varphi\ ,\ \ d^{۲} = r^{۲} + h^{۲}$$



شکل ۱-۳۶

که در آن $rdrd\theta$ رابطه‌ی جزء سطح در مختصات کروی (و استوانه‌ای و قطبی) است که در بخش مربوط به آن به‌دست آمد. در مورد زاویه‌ی φ نیز داریم:

$$\cos\varphi = \frac{h}{d} = \frac{h}{(r^{۲}+h^{۲})^{۱/۲}}$$

$$\Rightarrow\ dE_z = \frac{k\sigma rdrd\theta\cdot h}{(h^{۲}+r^{۲})^{۳/۲}}$$

$$\Rightarrow\ E_z = k\sigma h\int_{r=\circ}^{r=R}\int_{\theta=\circ}^{\theta=۲\pi}\frac{rdrd\theta}{(h^{۲}+r^{۲})^{۳/۲}}$$

$$= ۲\pi k\sigma h\int_{\circ}^{R}\frac{rdr}{(h^{۲}+r^{۲})^{۳/۲}}\ ,\ \begin{cases} u = h^{۲}+r^{۲} \\ \Rightarrow\ du = ۲rdr\end{cases}$$