۱

چندجمله‌ای‌ها (آشنایی)

یکی از مباحث مورد توجه و جذاب در المپیاد ریاضی که در سال‌های اخیر سهم به سزایی از سؤالات مراحل مختلف را به خود اختصاص داده است مبحث جبر است. غالباً در این درس ۳ مبحث مهم تدریس می‌شود که عبارتند از:

۱. چندجمله‌ای‌ها

۲. نابرابری‌ها

۳. معادلات تابعی

ما در این کتاب برآنیم تا به مبحث اول یعنی چندجمله‌ای‌ها بپردازیم و مباحث لازم و مفید برای آشنایی با چندجمله‌ای‌ها و توانایی حل مسئله به کمک آن‌ها را بیان کنیم.

۱-۱ آشنایی با چندجمله‌ای‌ها

منظور از یک چندجمله‌ای عبارتی جبری به شکل:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

می‌باشد که در آن به اعداد $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ضرایب این چندجمله‌ای می‌گوییم. هم‌چنین به بزرگ‌ترین توانی که ضریب متناظر آن غیرصفر باشد درجه ی چندجمله‌ای گوییم و با deg نمایش می‌دهیم.

به ضریب متناظر با بزرگ‌ترین درجه «ضریب پیش‌رو» چندجمله‌ای گفته می‌شود. اگر چندجمله‌ای دارای ضریب پیش‌رو واحد باشد به آن چندجمله‌ای «تکین» می‌گوییم.

معمولاً چندجمله‌ای‌ها را با حروف بزرگ لاتین به شکل زیر نمایش می‌دهند:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

هم‌چنین چندجمله‌ای‌ها را بسته به این که ضرایب‌شان عضو چه مجموعه‌ای باشد دسته‌بندی می‌کنند. بدین شکل که اگر K مجموعه‌ای دلخواه باشد منظور از $K[x]$ مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌ها با ضرایب عضو K می‌باشد و با این نمادگذاری منظور از $\mathbb{Z}[x]$، $\mathbb{Q}[x]$، $\mathbb{R}[x]$ و $\mathbb{C}[x]$ به ترتیب چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح، گویا، حقیقی و مختلط[1] می‌باشد.

برای مثال اگر $P(x) = 3x^2 + x - 1$ باشد می‌دانیم $P(x)$ با ضرایب صحیح و دارای ضریب پیش‌رو ۳ و درجه‌ی ۲ است. پس $\deg(P) = 2$، $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ می‌باشد.

۲-۱ اعمال اصلی روی چندجمله‌ای‌ها

از ۴ عمل اصلی در حساب می‌توان سه عمل $+$، $-$ و $\times$ را برای چندجمله‌ای‌ها تعریف کرد:

تعریف جمع و تفریق: اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ q(x) &= b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned} \qquad (n \geq k)$$

حاصل $p(x) \mp q(x)$ به صورت زیر است:

$$p(x)+q(x) = a_n x^n + \cdots + a_{k+1} x^{k+1} + (a_k+b_k)x^k + (a_{k-1}+b_{k-1})x^{k-1} + \cdots + (a_0+b_0)$$

در واقع در عمل جمع ضرایب متناظر توان‌های یکسان را با هم جمع می‌کنیم هم‌چنین:

$$p(x) - q(x) = a_n x^n + \cdots + a_{k+1} x^{k+1} + (a_k - b_k)x^k + \cdots + (a_0 - b_0)$$

تعریف ضرب: مشابه قبل برای تعریف ضرب دو چندجمله‌ای $p(x)$ و $q(x)$ داریم:

$$\begin{aligned} p(x).q(x) &= (a_n x^n + \cdots + a_0)(b_k x^k + \cdots + b_0) \\ &= a_n b_k x^{n+k} + \cdots + (a_1 b_0 + b_1 a_0)x + a_0 b_0 \end{aligned}$$

در واقع ضریب x^i در حاصل‌ضرب $p(x).q(x)$ برابر است با:

$$b_0 a_i + b_1 a_{i-1} + \cdots + b_{i-1} a_1 + b_i a_0$$

۱) در فصول بعد کتاب توضیحاتی در مورد این اعداد داده می‌شود.

توجه کنید اگر j از درجه‌ی p یا q بزرگ‌تر بود، a_j یا b_j را برابر صفر می‌گیریم.

- به راحتی به‌دست می‌آید که برای هر دو چندجمله‌ای $p(x)$ و $q(x)$ داریم:

$$\deg(p(x) \pm q(x)) \leq \max\{ \deg(p(x)), \deg(q(x))\}$$
$$\deg(p(x).q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x))$$

مثال ۱-۱ فرض کنید $p(x) = ۳x^۲ - x + ۱$ و $q(x) = x + ۳$ حاصل $p(x).q(x)$ و $p(x) - q(x)$ را به‌دست آورید.

حل: داریم:

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (۳x^۲ - x + ۱) - (x + ۳) \\ &= ۳x^۲ - x + ۱ - x - ۳ = ۳x^۲ - ۲x - ۲ \\ p(x).q(x) &= (۳x^۲ - x + ۱)(x + ۳) = ۳ - ۲x + ۸x^۲ + ۳x^۳ \end{aligned}$$

چهارمین عمل اصلی یعنی ÷ همواره روی چندجمله‌ای‌ها قابل بیان نیست و تنها در برخی موارد می‌توان دوچندجمله‌ای را بر هم تقسیم کرد که در فصل بعدی بیان خواهیم کرد.

ریشه

یکی از مهم‌ترین موضوعات در بررسی چندجمله‌ای‌ها، ریشه‌ها هستند.

تعریف

اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه عدد a را ریشه‌ی چندجمله‌ای $P(x)$ گوییم هرگاه $P(a) = ۰$ برقرار باشد.

در تعریف بالا منظور از $p(a)$ یعنی مقدار عبارت $p(x)$ به ازای $x = a$.

مثال ۱-۲ اگر $p(x) = x - ۱$ دراین صورت ۱ ریشه $p(x)$ است. چراکه $p(۱) = ۱ - ۱ = ۰$.

به عنوان مثالی دیگر اگر $p(x) = x^۲ - x - ۲$ آن‌گاه $p(۲) = ۰$، پس ۲ ریشه‌ی $p(x)$ خواهد بود.

در بررسی چندجمله‌ای‌ها ممکن است با این سؤال مواجه شویم:

«آیا هر چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی حتماً دارای ریشه‌ای در اعداد حقیقی است؟»

اگر اندکی روی این سؤال فکر کنیم در می‌یابیم که جواب آن خیر است چراکه کافی است چندجمله‌ای $p(x) = x^۲ + ۱$ را در نظر بگیرید. برای هر عدد حقیقی x داریم $p(x) > ۰$ و این یعنی $p(x)$ در اعداد حقیقی ریشه ندارد.

آن‌چه که دانشمندان ریاضی پس از مواجه با این سؤال انجام دادند ساختن اعدادی جدید از روی اعداد حقیقی بود که به کمک این اعداد که آن‌ها را اعداد مختلط نامیدند توانستند ثابت کنند که:

هر چندجمله‌ای $p(x)$ با ضرایب مختلط و از درجه‌ی بزرگ‌تر از ۰ دارای حداقل یک ریشه‌ی مختلط است.

حال به معرفی اعداد مختلط می‌پردازیم.

۱-۳ اعداد مختلط

همان‌طور که گفتیم یکی از دلایل به وجود آمدن اعداد مختلط معادله $x^۲ + ۱ = ۰$ بود که برای آن ریشه‌ای در اعداد حقیقی نداشتیم. در حقیقت به کمک ریشه‌ای فرضی برای این معادله ما اعداد مختلط را تعریف می‌کنیم:

- i را عددی فرضی در نظر بگیرید به طوری که $i^۲ = -۱$. به وضوح $i \notin \mathbb{R}$، $i^۲ + ۱ = ۰$ خواهد بود.

تعریف

منظور از مجموعه‌ی اعداد مختلط که آن را به اختصار با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم، مجموعه‌ی زیر است:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \big| a, b \in \mathbb{R}\}$$

تعریف

برای یک عدد مختلط $z = a + bi$ به اعداد a و b به ترتیب قسمت حقیقی و قسمت موهومی z می‌گوییم و با $\mathrm{Re}(z)$ [1] و $\mathrm{Im}(z)$ [2] نمایش می‌دهیم، دقت‌کنید قسمت حقیقی و موهومی یک عدد مختلط، حقیقی هستند.

1) Real

2) Imaginary

دو عدد مختلط z_1 و z_2 را یکسان (مساوی) گوییم اگر و تنها اگر

$$\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \qquad , \qquad \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$$

نکته ۱. طبق تعریف اگر a عددی حقیقی باشد می‌توان نوشت $a = a + 0 \times i$ که در نتیجه هر عدد حقیقی خود عددی مختلط است و در نتیجه $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

تعریف ۴ عمل اصلی

اگر $z = a + bi$ و $z' = a' + b'i$ اعدادی مختلط باشند:

۱. حاصل $z + z'$ برابر $(a + a') + (b + b')i$ است.

۲. حاصل $z - z'$ برابر $(a - a') + (b - b')i$ است.

۳. حاصل $z \times z'$ برابر است با:

$$z.z' = (a + bi) \times (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$$

۴. حاصل $\frac{z}{z'}$ $(z' \neq 0)$ برابر است با:

(الف) ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که $b' = 0$ در این صورت $z' \in \mathbb{R}$ است پس تعریف کنید:

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + bi}{a'} = (\frac{a}{a'}) + (\frac{b}{b'})i$$

(ب) در غیر این صورت اگر $b' \neq 0$ داریم:

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{(aa' + bb') + (a'b - ab')i}{a'^2 + b'^2}$$
$$= \left(\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}\right) + \left(\frac{a'b - b'a}{a'^2 + b'^2}\right)i$$

مثال ۱-۳ فرض کنید $z_1 = 1 + 2i$ و $z_2 = 3 + i$ حاصل $\frac{z_1}{z_2}$ و $z_1 - z_2$ را محاسبه کنید.

حل: داریم:

$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (3 + i) = -2 + i$$

هم‌چنین داریم:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{3 + i} = \frac{(1 + 2i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{5 + 5i}{10} = (\frac{5}{10}) + (\frac{5}{10})i$$

بنابراین تا به حال توانسته‌ایم ۴ عمل اصلی را روی اعداد مختلط تعریف کنیم با کمی توجه می‌توان دید که این ۴ عمل روی اعداد حقیقی مشابه قبل عمل کرده و حاصل یکسانی دارند.

تعریف

اگر $z = a + bi$ عددی مختلط باشد (a و b اعدادی حقیقی هستند). آن‌گاه به عدد مختلط $a - bi$ «مزدوج» عدد z گوییم و آن را با $\overline{z}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف

اگر z عددی مختلط باشد ($z = a + bi$) در این صورت به عدد $\sqrt{a^۲ + b^۲}$ «نُرم» عدد z گوییم و با نماد $|z|$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۲. می‌توان به راحتی اثبات کرد که برای هر عدد مختلط z داریم:

$$|z|^۲ = z.\overline{z}$$

اثبات:

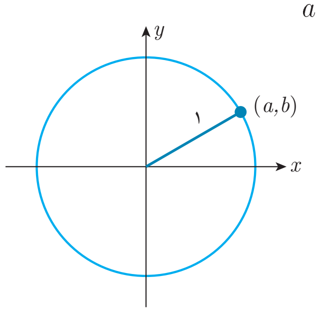
$$z.\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^۲ - (-b^۲) + (-ab + ab)i$$
$$= (a^۲ + b^۲) = |z|^۲$$

مثال ۱-٤ همه‌ی اعداد مختلطی را بیابید که نرم آن‌ها برابر ۱ باشد.

حل: عدد مورد نظر را z بنامید. پس $|z| = ۱$ اگر $z = a + bi$ در این صورت:

$$a^۲ + b^۲ = |z|^۲ = ۱$$

می‌دانیم اگر a را روی محور طول‌ها در صفحه‌ی مختصات و b را روی محور عرض‌ها نمایش دهیم معادله‌ی بالا شکل یک دایره به شعاع یک و به مرکز مبدأ مختصات خواهد بود:



مثال ۱-۵ برای هر عدد مختلط z نشان دهید: $|z| = |\overline{z}|$

حل: بر عهده‌ی خواننده

مثال ۱-۶ حاصل عبارت $A = i^{105} + i^{99} - i^{7} + i + 1$ را بیابید.

حل: به راحتی می‌توان به‌دست آورد $i^2 = -1$، $i^3 = -i$، $i^4 = 1$. پس داریم:

$$i^{105} = i \, , \; i^{99} = -i \, , \; i^{7} = -i$$

پس به‌دست می‌آید:

$$A = i + (-i) - (-i) + i + 1 = 2i + 1$$

مثال ۱-۷ فرض کنید معادله‌ی $x^2 + 2x + 5 = 0$ جواب‌هایی به شکل $z = a + bi$ دارد. آن‌ها را بیابید.

حل: اگر z جواب معادله‌ی مذکور باشد داریم:

$$z^2 + 2z + 5 = 0 \;\Rightarrow\; (a^2 - b^2) + 2abi + 2(a + bi) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2 + 2a + 5) + (2ab + 2b)i = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2ab + 2b = 0 \\ a^2 - b^2 + 2a + 5 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} b(a+1) = 0 & (1) \\ b^2 = a^2 + 2a + 5 & (2) \end{cases}$$

معادله‌ی (۱) دو حالت دارد اگر $b = 0$ آن‌گاه $a^2 + 2a + 5 = 0$ می‌شود اما معادله در اعداد حقیقی جواب ندارد چرا که:

$$a^2 + 2a + 5 = (a+2)^2 + 1 > 0$$

حالت دیگر $a + 1 = 0$ یا $a = -1$ که از آن به‌دست می‌آید $b^2 = 4$ پس $b = \pm 2$ بنابراین ریشه‌ها عبارتند از $-1 + 2i$ و $-1 - 2i$.

مثال ۱-۸ معادله‌ی $x^2 + (2 + i)x + 3 + 2i = 0$ دو جواب به شکل $a + bi$ دارد. آن‌ها را بیابید.

حل: به عهده‌ی خواننده.

قضیه

اگر A و B اعداد مختلط دلخواهی باشند، روابط زیر برقرار است:

۱. $\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}$

۲. $\overline{(A-B)} = \overline{A} - \overline{B}$

۳. $\overline{(AB)} = \overline{A}.\overline{B}$

٤. اگر $B \neq ۰$ باشد:

$$\overline{(\frac{A}{B})} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}}$$

۵. $|AB| = |A|.|B|$

۶. اگر $B \neq ۰$ باشد،

$$|\frac{A}{B}| = \frac{|A|}{|B|}$$

اثبات: اثبات این قضیه با محاسبه‌ی عبارات طرفین ساده بوده و بر عهده‌ی خواننده گذاشته می‌شود.

نکته ۳. عدد مختلط z عددی حقیقی است اگر و تنها اگر $z = \overline{z}$.

اثبات: اگر $z = a + bi$ باشد داریم $\overline{z} = a - bi$ حال:

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow -b = b \Leftrightarrow b = ۰ \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

مثال ۹-۱ خواص زیر را برای نرم اعداد مختلط ثابت کنید:

۱. $-|z| \leq \mathrm{Im}(z) \leq |z|$

۲. $-|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z|$

۳. برای هر عدد مختلط دلخواه $|z| \geq ۰$ و $|z| = ۰$ اگر و تنها اگر $z = ۰$.

٤. برای هر عدد مختلط z، $|-z| = |z| = |\overline{z}|$

۵. برای هر دو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$:

$$|z_۱ z_۲| = |z_۱||z_۲|$$

حل: به عنوان تمرین بر عهده‌ی خواننده گذاشته می‌شود.

مثال ۱-۱۰ برای دو عدد مختلط z_1 و z_2 نشان دهید:

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

حل: داریم:

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})\\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2\\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)\end{aligned}$$

مثال ۱-۱۱ ثابت کنید اگر $|z_1| = |z_2| = 1$ و $z_1 z_2 \neq -1$، آن‌گاه $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

حل: قرار دهید $A = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ می‌دانیم

$$z_1\overline{z}_1 = 1 \Rightarrow \overline{z}_1 = \frac{1}{z_1}$$

و به طریق مشابه:

$$\overline{z}_2 = \frac{1}{z_2}$$

داریم:

$$\overline{A} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{1 + z_1 z_2}} = \frac{\overline{z}_1 + \overline{z}_2}{1 + \overline{z_1 z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = A$$

پس $A \in \mathbb{R}$ است.

مثال ۱-۱۲ فرض کنید $z_1, z_2, \ldots, z_n$ اعدادی مختلط باشند و

$$|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = 1$$

ثابت کنید عدد زیر عددی حقیقی است:

$$\frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)\cdots(z_n + z_1)}{z_1 z_2 \cdots z_n}$$

حل: به راحتی برای اثبات این‌که عبارت داده شده عددی حقیقی است کافی است اثبات کنیم با مزدوجش برابر است، اما داریم:

$$\left(\overline{\frac{(z_1+z_2)\cdots(z_n+z_1)}{z_1 z_2\cdots z_n}}\right)=\left(\frac{(\overline{z_1}+\overline{z_2})(\overline{z_2}+\overline{z_3})\cdots(\overline{z_n}+\overline{z_1})}{\overline{z_1}\ \overline{z_2}\cdots\overline{z_n}}\right)$$

اما از آن‌جایی که برای $1 \le i \le n$ داریم $|z_i| = 1$ پس:

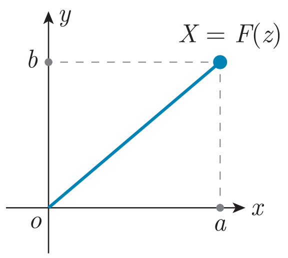
$$\forall_i \in \{1, 2, \dots n\} : z_i\overline{z_i} = |z_i|^2 = 1 \ \Rightarrow\ \overline{z_i} = \frac{1}{z_i}$$

با جاگذاری $\overline{z_i}$ها در روابط و کمی ساده‌سازی می‌توان ثابت کرد که عبارت داده شده با مزدوجش برابر بوده و در نتیجه عددی حقیقی است.

۴-۱ نمایش قطبی اعداد مختلط

اگر $\mathbb{C}$ مجموعه‌ی اعداد مختلط باشد تناظری یک‌به‌یک و پوشا بین نقاط صفحه و $\mathbb{C}$ وجود دارد که بدین شکل است.

$$F : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$$
$$F(a+bi) = (a, b)$$



خواننده به سادگی می‌تواند بررسی کند که تابع فوق تابعی یک‌به‌یک و پوشاست.

$$z = a + bi$$

در شکل بالا توجه کنید که $OX^2 = a^2 + b^2$ بنابراین داریم که:

$$OX^2 = |z|^2$$

و هم‌چنین $b = OX.\sin\theta$ و $a = OX.\cos\theta$ که θ زاویه‌ی بین نیم‌خط مثبت محور xها و OX می‌باشد.

با توجه به این مطالب می‌توان نوشت:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

که θ زاویه‌ای یکتا در بازه‌ی $[0, 2\pi)$ است.

نمایش قطبی

اگر z عددی مختلط باشد نمایشی به صورت

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \ , \ r \geq ۰ \cdot \theta \in (۰, ۲\pi]$$

وجود دارد که به این نمایش، نمایش قطبی عدد مختلط z می‌گوییم.

توجه: با نرم‌گیری از طرفین معادله می‌توان به راحتی چک کرد که $r = |z|$.

تعریف

اگر $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ نمایش قطبی عدد z باشد. به اعداد r و θ به ترتیب نرم و آرگومان z گوییم و با $|z|$ و $\arg(z)$ نمایش می‌دهیم.

یکی از ویژگی‌های جالب توجه این نمایش را در قضیه‌ی زیر خواهیم دید:

قضیه

اگر A و B اعدادی مختلط باشند داریم:

$$|AB| = |A|\,|B|$$

$$\arg(AB) = \arg(A) + \arg(B)$$

اثبات: قسمت اول در قضیه‌ای پیش از این اثبات گردید.

حال برای اثبات قسمت دوم قضیه داریم:

$$\begin{aligned}
& A = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\
& B = r'(\cos\gamma + i\sin\gamma) \\
\Rightarrow\ & AB = (rr')[(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\gamma + i\sin\gamma)] \\
& = rr'([\cos\theta\cos\gamma - \sin\theta\sin\gamma]) + i[\cos\theta\sin\gamma + \sin\theta\cos\gamma] \\
& = rr'(\cos(\theta+\gamma) + i\sin(\theta+\gamma))
\end{aligned}$$

نکته ٤. توجه کنید که اگر در محاسبات بالا به عددی بزرگ‌تر از ۲π برای آرگومان رسیدیم، می‌توان هر مضرب صحیح دلخواهی از ۲π را آن کم کرد، تا حاصل در بازه‌ی $(۰, ۲\pi]$ قرار گیرد. در واقع آرگومان θ و $\theta + ۲k\pi$ یکسان است.

نکته ۵. توجه کنید که به نحو کاملاً مشابه می‌توان اثبات کرد که اگر A و B اعدادی مختلط باشند و $B \neq ۰$ آن‌گاه:

$$|\frac{A}{B}| = \frac{|A|}{|B|}$$

$$\arg(\frac{A}{B}) = \arg(A) - \arg(B)$$

نتیجه با توجه به قضیه‌ی قبل، بدیهی است اگر z_i $(i = ۱, ۲, \cdots, n)$ اعداد مختلط با اندازه‌ی r_i و آرگومان θ_i باشند و $z = z_۱ z_۲ \cdots z_n$ خواهیم داشت:

$$|z| = r_۱ r_۲ \cdots r_n$$

$$\arg(z) = \arg(z_۱) + \arg(z_۲) + \cdots + \arg(z_n)$$

نتیجه (قانون دموآور) اگر $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ باشد و $n \in \mathbb{Z}$ خواهیم داشت:

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

این شیوه از نمایش اعداد کاربردهای بسیار زیادی در مسائل گوناگون دارد به عنوان یک نمونه می‌توان به مثال زیر توجه کرد.

مثال ۱-۱۳ حاصل عبارت $(۱ + i)^{۱۳۹۲}$ را محاسبه کنید.

حل: می‌توان نوشت:

$$۱ + i = |۱ + i|\Big(\cos\arg(۱ + i) + i\sin\arg(۱ + i)\Big)$$

اما داریم:

$$|۱ + i| = \sqrt{۲}$$

هم‌چنین با محاسبه‌ی آسان می‌توان ثابت کرد $\arg(۱ + i) = \frac{\pi}{۴}$ پس:

$$(۱ + i) = \sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow (۱ + i)^{۱۳۹۲} = (\sqrt{۲})^{۱۳۹۲}\Big(\cos(۱۳۹۲ \times \frac{\pi}{۴}) + i\sin(۱۳۹۲ \times \frac{\pi}{۴})\Big)$$

$$= ۲^{۶۹۶}\Big(\cos(۳۴۸\pi) + i\sin(۳۴۸\pi)\Big) = ۲^{۶۹۶}$$

مثال ۱-۱٤ برای هر عدد حقیقی θ، ثابت کنید:

$$\sin(5\theta) = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$$

حل: طبق روابط بیان شده داریم:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$$

اما از طرفی دیگر داریم:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^5 &= \cos^5\theta + \binom{5}{1}\cos^4\theta(i\sin\theta)\\ &+ \binom{5}{2}\cos^3\theta(i\sin\theta)^2 + \binom{5}{3}\cos^2\theta(i\sin\theta)^3\\ &+ \binom{5}{4}\cos\theta(i\sin\theta)^4 + (i\sin\theta)^5\end{aligned}$$

حال با ساده کردن دو طرف و مقایسه‌ی قسمت‌های حقیقی و موهومی طرفین داریم:

$$\mathrm{Im}(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$$

$$\mathrm{Im}(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \sin 5\theta$$

و به وضوح حکم مورد نظر مسئله نتیجه می‌گردد.

مثال ۱-۱۵ بسط $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ را حساب کنید.

حل: در قانون دموآور قرار دهید $n = 3$ و $r = 1$. به سادگی به‌دست می‌آید:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta \times \sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

همان طور که گفته شد تناظری بین نقاط صفحه و اعداد مختلط وجود دارد. یکی از ویژگی‌های بردارهای صفحه این است که برای هر دو بردار A و B داریم:

$$|A+B| \le |A| + |B|$$

و به طور ناخودآگاه با توجه به تناظر بین بردارها و اعداد مختلط به نظر می‌رسد که چنین نابرابری برای اعداد مختلط هم برقرار است که در قضیه‌ی زیر این موضوع را به زبان اعداد مختلط بیان کرده‌ایم.

قضیه (نابرابری مثلث)

اگر A و B دو عدد مختلط دلخواه باشند آنگاه:

$$|A| + |B| \geq |A + B|$$

و تنها زمانی حالت تساوی برقرار است که برای مقداری حقیقی مثبت مثل k داشته باشیم $A = k.B$.

اثبات: فرض کنید $A = x + iy$ و $B = z + it$ که x، y و z و t اعدادی حقیقی هستند، حال داریم:

$$A + B = (x + z) + i(y + t)$$

بنابراین

$$|A + B| = \sqrt{(x + z)^۲ + (y + t)^۲}$$
$$|A| + |B| = \sqrt{x^۲ + y^۲} + \sqrt{z^۲ + t^۲}$$

حال پس کافی است نشان دهیم:

$$\forall\, x, y, z, t \in \mathbb{R} \ : \ \sqrt{(x + z)^۲ + (y + t)^۲} \leq \sqrt{x^۲ + y^۲} + \sqrt{z^۲ + t^۲}$$

و این هم با به توان ۲ رساندن دو طرف معادل است با:

$$\Leftrightarrow \ (x + z)^۲ + (y + t)^۲ \leq x^۲ + y^۲ + t^۲ + ۲\sqrt{(x^۲ + y^۲)(z^۲ + t^۲)}$$
$$\Leftrightarrow \ \sqrt{(x^۲ + y^۲)(z^۲ + t^۲)} \geq xz + yt$$

و این هم نتیجه‌ی نابرابری کوشی است چرا که:

$$(x^۲ + y^۲)(z^۲ + t^۲) \geq (\sqrt{x^۲ z^۲} + \sqrt{y^۲ t^۲})^۲ = (xz + yt)^۲$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x^۲ + y^۲)(z^۲ + t^۲)} \geq |xz + yt| \geq xz + yt$$

توجه کنید که تساوی نابرابری کوشی هم زمانی است که برای مقداری حقیقی مثل $k \geq 0$ داشته باشیم:

$$\left.\begin{array}{l} x = kz \\ y = kt \end{array}\right\} \Rightarrow A = kB$$

و این کل قضیه را نتیجه خواهد داد.

توجه: می‌توان نابرابری مثلث را به تعداد بیش‌تری متغیر هم بدین شکل تعمیم داد:

$$\forall\, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C} : |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

و حالت تساوی هم تنها زمانی رخ می‌دهد که:

$$\forall\, ij\ \exists k \in \mathbb{R}^+ \ :\ a_i = ka_j$$

مثال ۱-۱۶ برای هر ۳ عدد حقیقی دلخواه x، y و z ثابت کنید:

$$|x| + |y| + |z| \leq |x + y - z| + |x + z - y| + |y + z - x|$$

اثبات: طبق نابرابری مثلث داریم:

$$|x + y - z| + |x + z - y| \geq 2|x|$$
$$|x + y - z| + |y + z - x| \geq 2|y|$$
$$|y + z - x| + |x + z - y| \geq 2|z|$$

با جمع این ۳ رابطه حکم نتیجه می‌گردد.

مثال ۱-۱۷ ثابت کنید اگر α ریشه‌ی معادله‌ی $x^n + x + 2$ باشد آن‌گاه $|\alpha| \geq 1$.

اثبات: داریم:

$$\alpha^n + \alpha + 2 = 0 \ \Rightarrow\ \alpha^n + \alpha = -2$$
$$\xRightarrow{\text{نرم‌گیری از طرفین}} |\alpha^n + \alpha| = |-2| = 2$$

اما طبق نابرابری مثلث:

$$|\alpha^n + \alpha| \leq |\alpha|^n + |\alpha| \ \Rightarrow\ |\alpha|^n + |\alpha| \geq 2$$

اما اگر $|\alpha| < ۱$ باشد:

$$\left.\begin{array}{l} |\alpha|^n < ۱ \\ |\alpha| < ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow |\alpha|^n + |\alpha| < ۲$$

تناقض حاصله نشان می‌دهد $|\alpha| \geq ۱$.

در ادامه‌ی درس به یکی از نمایش‌های جالب‌تر اعداد مختلط اشاره می‌کنیم. تا به حال به دو ویژگی در مورد ضرب اعداد مختلط دست یافته‌ایم و یکی از آن‌ها عبارت است از رابطه‌ی $\arg(AB) = \arg(A) + \arg(B)$ اما با کمی تأمل در این رابطه در می‌یابیم که توابع آشنایی هم به جز arg داریم که این خاصیت را دارند. یکی از مشهورترین این توابع، تابع $f(x) = A^x$ است چرا که:

$$A^x A^y = A^{x+y}$$

بنابراین شاید این ایده به ذهن برسد که شاید اعداد مختلط هم نمایشی به شکل توابع نمایی داشته باشند در واقع این ایده صحیح بوده و در زیر به آن می‌پردازیم:[۱]

از ریاضیات مدرن سه رابطه‌ی بسیار جالب می‌دانیم و آن‌ها عبارتند از روابط زیر که برای هر $x \in \mathbb{R}$ برقرارند:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \cdots \\ \sin(x) &= \frac{x}{۱!} - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \cdots \\ e^x &= ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots \end{aligned}$$

اگر فرض را بر این بگیریم که قواعد به توان رساندن در اعداد مختلط هم صحیح باشد داریم:

$$\begin{aligned} \forall\theta \in \mathbb{R} \ : \ e^{i\theta} &= ۱ + \frac{i\theta}{۱} + \frac{(i\theta)^۲}{۲!} + \cdots \\ &= \left(۱ - \frac{\theta^۲}{۲!} + \frac{\theta^۴}{۴!} - \cdots\right) + i\left(\frac{\theta}{۱!} - \frac{\theta^۳}{۳!} \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

و همین ایده منجر به یک شیوه‌ی دیگر نمایش اعداد مختلط می‌شود که به نمایش نمایی اعداد مختلط معروف است.

۱) نتایج این قسمت را بدون اثبات می‌توانید بپذیرید.

هر عدد مختلط مثل z را می‌توان به صورت $re^{i\theta}$ نمایش داد که در آن θ برابر $\arg(z)$ بوده و r هم $|z|$ می‌باشد.

با این شیوه از نمادگذاری می‌توان نوشت:

$$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$$
$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = (\frac{r}{r'})e^{i(\theta-\theta')}$$

و به همین شکل می‌توان روابط دیگری هم با استفاده از این شیوه نمایش استخراج کرد به عنوان یک مثال به دانش‌آموزان توصیه می‌گردد که قضایای مربوط به نمایش هندسی را سعی کنند با این شیوه نمایش اثبات کنند.

در ادامه برآنیم تا به کمک مطالب گفته شده در این فصل به حل گونه‌ی خاصی از معادلات چندجمله‌ای که در ادامه‌ی درس نقش مهمی ایفا می‌کنند بپردازیم:

در واقع این معادلات همان معادلات $x^n = ۱$ می‌باشند در ادامه اثبات خواهیم کرد که هر چنین معادله‌ای دقیقاً در اعداد مختلط دارای n جواب متمایز است که نام خاصی را به این جواب‌ها اختصاص می‌دهیم.

تعریف

عدد مختلط w را «ریشه‌ی nاُم واحد» گوییم هرگاه $w^n = ۱$ برقرار باشد.

قضیه

تعداد ریشه‌های nاُم واحد دقیقاً nتاست و عبارتند از:

$$e^{i\theta} \; ; \; \theta = \frac{۲k\pi}{n} \; ; \; k = ۱, ۲, \ldots, n$$

اثبات: فرض کنید w ریشه‌ی nام واحد باشد:

$$w^n = ۱ \Rightarrow |w|^n = ۱ \Rightarrow |w| = ۱$$

پس می‌توان نوشت:

$$w = e^{i\theta} \Rightarrow w^n = e^{in\theta} = ۱$$

اما می‌توان بررسی کرد که $e^{i\theta}$ برابر ۱ است اگر و تنها اگر رابطه $\theta = ۲k\pi$ برای مقداری صحیح مثل k برقرار باشد. پس:

$$n\theta = ۲k\pi \ \Rightarrow \ \theta = \frac{۲k\pi}{n}$$

اما مقدارهایی از θ که به اندازه‌ی مضربی از ۲π با یکدیگر اختلاف دارند یکسان هستند. بنابراین مقدارهای θ متناظر با $k = ۱, ۲, \ldots, n$ می‌باشد زیرا بقیه‌ی مقادیر برای k با یکی از این n مقدار برابر می‌باشند. بنابراین حکم اثبات می‌گردد. دقت کنید در حالت $k = n$، $\theta = ۲k$ و $w = ۱$.

تعریف

عدد مختلط w را ریشه‌ی اولیه‌ی nام واحد گوییم هرگاه $w^n = ۱$ باشد و برای هر عدد طبیعی $i < n$ داشته باشیم $w^i \neq ۱$.

قضیه

تعداد ریشه‌های nام اولیه واحد دقیقاً $\varphi(n)$تاست و عبارتند از:

$$e^{\frac{i۲k\pi}{n}} \ ; \ k \in \{۱, ۲, \cdots n\} \ : \ (k, n) = ۱$$

اثبات: اثبات این قضیه‌ی ساده بوده و بر عهده‌ی دانش‌آموزان گذاشته می‌شود.

حال به عنوان مثال می‌خواهیم تمام ریشه‌های معادله‌ی $z^۳ = ۱$ را بیابیم. فرض کنید

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

بنابر قضایا و مباحث گفته شده، داریم:

$$۱ = z^۳ = r^۳(\cos ۳\theta + i\sin ۳\theta) \ \Rightarrow \ r = ۱ \ , \ \cos ۳\theta = ۱ \ , \ \sin ۳\theta = ۰$$

$$\Rightarrow ۳\theta = ۲k\pi \ \Rightarrow \ \theta = \frac{۲k\pi}{۳} \qquad (k = ۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)$$

دقت کنید به ازای $k = ۰, ۱, ۲$، داریم: $\theta_۰ = ۰$، $\theta_۱ = \frac{۲\pi}{۳}$ و $\theta_۲ = \frac{۴\pi}{۳}$ و برای kهای دیگر، مقادیر θ تنها در مضارب ۲π فرق دارند و در حقیقت جواب جدیدی به ما نمی‌دهند. اعداد متناظر با $\theta_۰$ و $\theta_۱$ و $\theta_۲$ را با $z_۰$، $z_۱$ و $z_۲$ در صفحه‌ی مختصات نشان داده‌ایم.

به راحتی می‌توانید بررسی کنید نقاط $z_۰$، $z_۱$ و $z_۲$، مثلث متساوی‌الاضلاعی تشکیل می‌دهند که در دایره‌ی واحد محاط است.

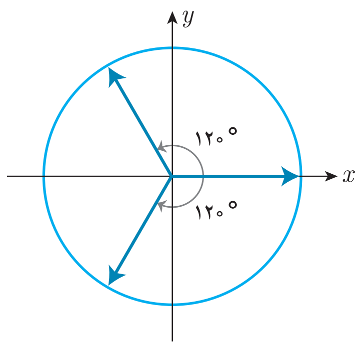
حالا کاملاً مشابه جواب‌های معادله‌ی $z^n = ۱$ را بررسی می‌کنیم. اگر $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، بنابر قضیه‌ی دموآور خواهیم داشت:

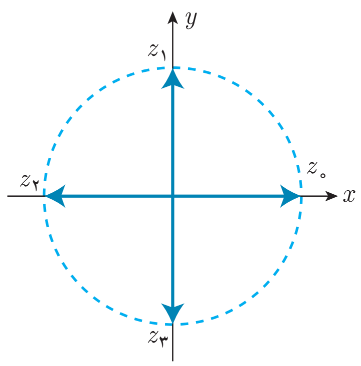
$$۱ = z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \Rightarrow r = ۱\ ,\ n\theta = ۲k\pi$$
$$\Rightarrow r = ۱\ ,\ \theta = \frac{۲k\pi}{n} \qquad (k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$$

مجدداً به سادگی نتیجه می‌شود تنها به ازای $(k = ۰, ۱, ۲, \cdots, n - ۱)$، جواب‌های متمایز محاسبه می‌شوند و بقیه جواب تنها در مضربی از ۲π با یکی از ریشه‌های معرفی شده به ازای $(k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱)$ تفاوت دارند. حال متناظر با $(k = ۰, ۱, \ldots, n - ۱)$، θ_i و z_iها را معرفی می‌کنیم:

$$k = ۰ \Rightarrow \theta_۰ = ۰ \Rightarrow z_۰ = ۱$$
$$k = ۱ \Rightarrow \theta_۱ = \frac{۲\pi}{n} \Rightarrow z_۱ = \cos\theta_۱ + i\sin\theta_۱$$
$$\vdots$$
$$k = n - ۱ \Rightarrow \theta_{n-۱} = \frac{۲\pi(n-۱)}{n} \Rightarrow z_{n-۱} = \cos\theta_{n-۱} + i\sin\theta_{n-۱}$$

مجدداً می‌توان چک کرد اعداد مختلط $z_۰, z_۱, \ldots, z_{n-۱}$ رئوس یک nضلعی منتظم محاط در دایره واحد تشکیل می‌دهند.





$n = ۴$