



## اصول شمارش

آنالیز ترکیبی علم شمارش است. در واقع هدف این شاخه از ریاضی شمارش تعداد راه‌های انجام یک کار است. برای این کار یک روش این است که تمام راه‌های ممکن برای انجام کار را لیست کرده و تعداد آن‌ها را بشمریم. به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم تعداد راه‌های انتخاب دو عدد متمایز یک رقمی فرد را بیابیم. یک روش برای حل این مسئله لیست کردن تمام انتخاب‌های ممکن است:

$$\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{1, 9\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 9\}, \{5, 7\}, \{5, 9\}, \{7, 9\}$$

می‌بینید که این کار به  $10$  روش قابل انجام است. اما به نظر شما آیا این روش برای حل مسئله روش مناسبی است؟ اگر به جای دو عدد یک رقمی فرد خواسته‌ی مسئله یافتن تعداد روش‌های انتخاب دو عدد پنج رقمی بود، آیا باز هم به راحتی می‌توانستیم تمام حالات را لیست کنیم؟ (جالب است بدانید که برای این کار  $10^{1247750}$  روش وجود دارد!) حتی اگر به اندازه‌ی کافی هم وقت داشته باشیم، ممکن است هنگام شمارش تعداد حالات لیست شده دچار اشتباه شویم و پاسخ نادرستی به دست آوریم. واضح است که این روش، روش مناسبی برای حل مسائل شمارش نیست. بنابراین هدف ما شمارش تعداد راه‌های انجام یک کار بدون نیاز به لیست کردن تمام حالت‌هاست.

مانند هر علم و مهارت دیگری، شمارش نیز دارای اصول اولیه‌ای است که پایه و اساس حل مسائل آن است که به آن‌ها «اصول شمارش» می‌گویند. قبل از بیان این اصول لازم است که در ابتدا یک اصل ابتدایی و بدیهی را بیان کنیم:

تعداد راه‌های انتخاب یک شیء از میان  $n$  شیء متمایز برابر است با  $n$ .

به عنوان مثال برای انتخاب یک نماینده برای یک کلاس ۲۴ نفره، ۲۴ روش مختلف وجود دارد. به متمایز بودن اشیاء دقت کنید. زیرا انتخاب یک شیء از میان چند شیء یکسان تنها به یک صورت ممکن است.

اکنون آماده‌ایم تا به بیان اولین اصل شمارش بپردازیم. این کار را با یک مثال شروع می‌کنیم. فرض کنید برای شام به یک رستوران می‌روید. در منوی این رستوران ۴ غذای خورشتی و ۳ غذای کبابی موجود است. به چند روش می‌توانید غذای خود را انتخاب کنید؟ واضح است که پاسخ برابر  $3 + 4 = 7$  می‌باشد. شما به ۴ روش می‌توانید غذای خورشتی انتخاب کنید و به ۳ روش غذای کبابی. چون این دو کار مستقل از یکدیگر هستند و فقط یکی از آن‌ها را باید انجام دهید، بنابراین تعداد حالت‌های انجام این دو کار را با هم جمع می‌کنیم. این اصل را «اصل جمع» می‌نامیم. یعنی اگر دو کار مختلف داشته باشیم و بخواهیم یکی از آن‌ها را انجام دهیم، تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با مجموع تعداد روش‌های انجام هر کدام از کارها.

این اصل فقط محدود به دو کار نیست. به عنوان مثال اگر در رستوران علاوه بر غذاهای گفته شده، دو نوع پیتزا هم وجود داشته باشد، پاسخ برابر  $9 = 2 + 4 + 3$  خواهد بود.

### اصل جمع

$n$  کار متمایز داریم. کار اول به  $a_1$  روش، کار دوم به  $a_2$  روش، ... و کار  $n$ ام به  $a_n$  روش قابل انجام است. در این صورت تعداد راه‌های انجام یکی از این کارها برابر است با:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

**نکته ۱.** از اصل جمع تنها زمانی استفاده می‌کنیم که بخواهیم فقط یکی از چند کار مستقل موجود را انجام دهیم. به عبارت دیگر از کلمه‌ی «یا» بین انجام کارها استفاده کرده باشیم.

اکنون می‌خواهیم مثال دیگری را مطرح کنیم. فرض کنید دوباره برای صرف شام به یک رستوران رفته‌اید و می‌خواهید علاوه بر غذای اصلی، دسر هم سفارش دهید. در منوی رستوران ۴ نوع غذای اصلی و ۳ نوع دسر وجود دارد. به چند طریق می‌توانید غذای اصلی و دسر خود را سفارش دهید؟ در این مثال شما دو کار را هم‌زمان انجام می‌دهید: انتخاب غذای اصلی و انتخاب دسر. این بار پاسخ برابر  $12 = 3 \times 4$  می‌باشد. در واقع چون هر دو کار باید با هم انجام شوند، تعداد حالت‌های انجام آن‌ها را در هم ضرب کردیم. این همان چیزی است که آن را «اصل ضرب» می‌نامیم. به بیان دیگر تعداد روش‌های انجام هم‌زمان دو کار مستقل برابر حاصل ضرب تعداد روش‌های انجام هر کدام از آن‌هاست. همانند اصل



جمع، اصل ضرب نیز محدود به دو کار نیست و برای هر تعداد کار مستقل قابل بیان است. برای مثال اگر در منوی رستوران ۲ نوع پیش غذا، ۴ نوع غذای اصلی و ۳ نوع دسر وجود داشته باشد و شما تصمیم داشته باشید هر سه را سفارش دهید، پاسخ برابر  $2 \times 4 \times 3 = 24$  خواهد بود.

### اصل ضرب

$n$  کار متمایز داریم. کار اول به  $a_1$  روش، کار دوم به  $a_2$  روش، ... و کار  $n$ ام به  $a_n$  روش قابل انجام است. در این صورت تعداد راه‌های انجام همه‌ی این کارها با هم برابر است با:

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$$

**نکته ۲.** از اصل ضرب تنها زمانی استفاده می‌کنیم که بخواهیم همه‌ی کارهای موجود را هم‌زمان انجام دهیم. به عبارت دیگر از کلمه‌ی «و» بین انجام کارها استفاده کرده باشیم.

اکنون به این مثال توجه کنید. فرض کنید به همان رستوران رفته‌اید و در منوی غذاها ۸ نوع غذا وجود دارد. اما سه تا از آن‌ها پیتزا هستند و شما علاقه‌ای به پیتزا ندارید. در این صورت به چند طریق می‌توانید غذای خود را سفارش دهید؟ بدیهی است که پاسخ برابر  $8 - 3 = 5$  می‌باشد. در این مثال شما حالات نامساعد را از کل حالات کم می‌کنید. این کار همان چیزی است که آن را «اصل متمم» یا «اصل تفریق» می‌نامیم.

### اصل متمم (اصل تفریق)

تعداد روش‌های مطلوب انجام یک کار برابر است با تعداد کل روش‌های موجود منهای تعداد روش‌های نامطلوب.

همان‌طور که دیدید اصول شمارش بسیار ساده و بدیهی می‌باشند. اما کاربردهای فراوانی در حل مسائل دارند و مسائل بسیار دشواری نیز وجود دارند که تنها با استفاده از همین اصول قابل حل می‌باشند.

## مثال‌ها

۱-۱

**مثال ۱-۱** به چند طریق می‌توان چهار توپ در رنگ‌های مختلف را بین سه نفر توزیع کنیم؟  
 پاسخ: هر کدام از توپ‌ها را به سه روش می‌توان به یکی از افراد داد. بنابراین طبق اصل ضرب پاسخ برابر است با  $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ .

**مثال ۲-۱** در مثال قبل در چند حالت همه‌ی توپ‌ها به یک نفر نمی‌رسد؟

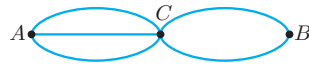
پاسخ: در یک حالت هر چهار توپ به نفر اول می‌رسند، در یک حالت همه به نفر دوم و در یک حالت همه به نفر سوم می‌رسند. بنابراین سه حالت نامطلوب داریم. در نتیجه طبق اصل متمم پاسخ برابر است با  $81 - 3 = 78$ .

**مثال ۳-۱** فرض کنید چهار توپ مختلف و ۵ کتاب مختلف داریم و می‌خواهیم یا کتاب‌ها را بین سه نفر تقسیم کنیم و یا توپ‌ها را. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد؟  
 پاسخ: توزیع توپ‌ها به  $3^4 = 81$  روش ممکن است و توزیع کتاب‌ها به  $3^5 = 243$  روش. بنابراین طبق اصل جمع پاسخ برابر است با  $81 + 243 = 324$ .

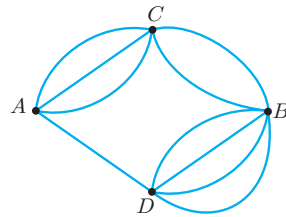


- ۱ آقای حاجی‌زاده سه پسر و دو دختر دارد. در شهر آن‌ها سه مدرسه‌ی پسرانه و چهار مدرسه‌ی دخترانه وجود دارد. او به چند طریق می‌تواند:  
 (الف) یکی از فرزندان خود را به مدرسه بفرستد؟  
 (ب) همه‌ی فرزندان خود را به مدرسه بفرستد؟  
 (ج) یکی از پسران و یکی از دختران خود را به مدرسه بفرستد؟  
 (د) همه‌ی پسران یا همه‌ی دختران خود را به مدرسه بفرستد؟  
 (ه) همه‌ی فرزندان خود را به مدارس مختلف بفرستد؟  
 (و) همه‌ی پسران یا همه‌ی دختران خود را به مدارس مختلف بفرستد؟  
 (ز) یکی از پسران و همه‌ی دختران خود را به مدرسه بفرستد؟  
 (ح) یکی از دختران و همه‌ی پسران خود را به مدارس مختلف بفرستد؟  
 در یک سیرک ۲ بیر، ۵ پلنگ و ۳ مربی وجود دارد.  
 (الف) به چند طریق می‌توان یک بیر، یک پلنگ و یک مربی را به صحنه فرستاد؟  
 (ب) به چند طریق می‌توان یک حیوان با یک مربی به صحنه فرستاد؟
- ۳ ۶ نفر ایرانی، ۵ نفر آلمانی و ۹ نفر ایتالیایی داریم. به چند طریق می‌توان:  
 (الف) سه نفر از کشورهای مختلف از میان آن‌ها انتخاب کرد؟  
 (ب) دو نفر از کشورهای مختلف از میان آن‌ها انتخاب کرد؟
- ۴ به چند طریق می‌توان از میان ۷ زوج (زن و شوهر) یک مرد و یک زن انتخاب کرد به طوری که:  
 (الف) همسر یکدیگر باشند؟  
 (ب) همسر یکدیگر نباشند؟
- ۵ در یک بوتیک پیراهن‌هایی در سه رنگ، چهار اندازه و شش مدل وجود دارد. حداکثر چند نوع پیراهن در این بوتیک وجود دارد؟
- ۶ یک اتوبوس در ایستگاه مبدأ ۲۰ مسافر سوار کرده است و در ادامه ۵ ایستگاه وجود دارد. مسافران به چند طریق می‌توانند در ایستگاه‌ها پیاده شوند؟
- ۷ آزمون المپیاد ریاضی شامل ۳۰ سؤال پنج‌گزینه‌ای می‌باشد. یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد به طوری که:  
 (الف) به همه‌ی سؤالات پاسخ دهد؟  
 (ب) پاسخ به همه‌ی سؤالات لازم نباشد؟

۸ در هر یک از اشکال زیر به چند طریق می‌توان با حرکت از روی خطوط و بدون عبور از نقطه‌ی تکراری، از  $A$  به  $B$  رفت؟

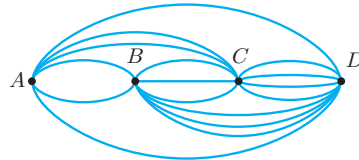


(الف)



(ب)

۹ در شکل زیر به چند طریق می‌توان بدون عبور از نقطه‌ی تکراری از  $A$  به  $D$  رسید به طوری که:



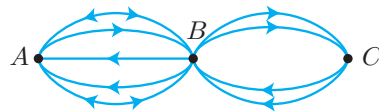
(الف) رو به جلو حرکت کنیم؟

(ب) شرط دیگری نداشته باشیم؟

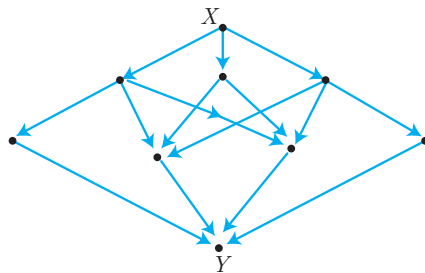
۱۰ (الف) در شکل زیر به چند طریق می‌توان از  $A$  به  $C$  رفت؟

(ب) به چند طریق می‌توان از  $A$  به  $C$  رفت و دوباره به  $A$  برگشت؟

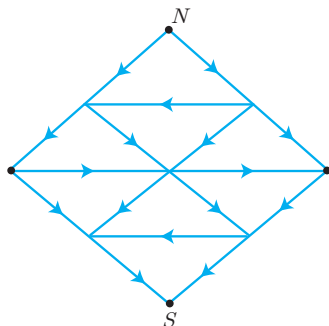
(ج) به چند طریق می‌توان بدون عبور از مسیر تکراری از  $A$  به  $C$  رفته و به  $A$  برگشت؟



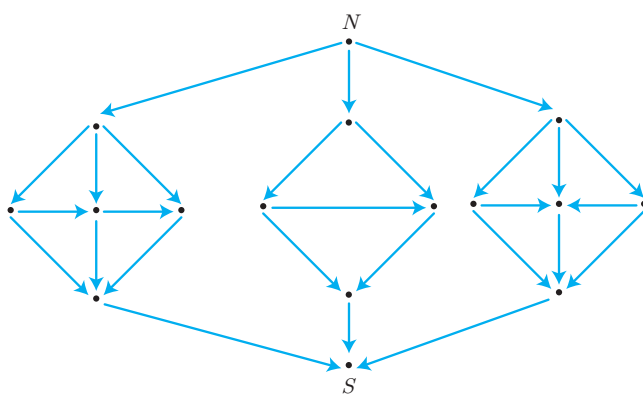
۱۱ در شکل زیر به چند طریق می‌توان از  $X$  به  $Y$  رسید؟



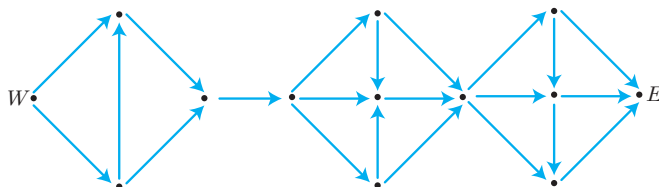
۱۲ در هر یک از نمودارهای زیر چند روش برای رسیدن از  $N$  به  $S$  وجود دارد؟ (الف)



(ب)

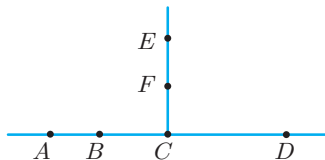


۱۳ در شکل زیر به چند طریق می‌توان از نقطه‌ی  $W$  به نقطه‌ی  $E$  رفت؟



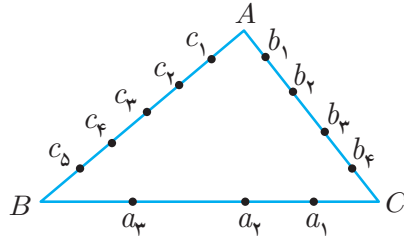
۱۴ در شکل زیر  $ABCD$  و  $EFC$  بر هم عمودند. (الف) تعداد مثلث‌های قائم‌الزاویه  $XCX$  را بیابید که  $X$  و  $Y$  از بین نقاط  $A, B, D, E, F$  انتخاب شوند.

(ب) تعداد مثلث‌هایی را بیابید که رئوس آن‌ها عضو نقاط  $A, B, C, D, E, F$  باشند.



شکل زیر دوازده نقطه را روی اضلاع مثلث  $ABC$  نشان می‌دهد:

- (الف) چند پاره‌خط داریم که دو سرش عضو نقاط روی دو ضلع مختلف باشند؟  
 (ب) چند مثلث داریم که رئوسشان عضو نقاط روی سه ضلع مختلف باشند؟



حاصل هر یک از عبارتهای زیر چند جمله‌ی متمایز خواهد داشت؟

- (الف)  $(a + b)(c + d + e)$   
 (ب)  $(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2 + c_3)$   
 (ج)  $(a + b)(a + b + c + d + e)$   
 (د)  $(a + b + c)^2$

به چند طریق می‌توان در یک صفحه‌ی شطرنجی  $8 \times 8$ :

- (الف) یک مهره‌ی رخ قرار دارد؟  
 (ب) دو مهره‌ی رخ متمایز قرار دارد؟  
 (ج) دو مهره‌ی رخ یکسان قرار داد؟  
 (د) دو مهره‌ی رخ متمایز قرار دارد که در یک سطر یا ستون نباشند؟  
 (ه) دو مهره‌ی رخ یکسان قرار دارد که در یک سطر یا ستون نباشند؟

یک ساختمان ۸ طبقه و چهار رنگ مختلف داریم. به چند طریق می‌توان هر یک از طبقات این ساختمان را با این ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که:

- (الف) هیچ شرطی نداشته باشیم.  
 (ب) هیچ دو طبقه‌ی مجاور هم‌رنگ نباشند.

(الف) با حرکت دادن ۵ پرچم رنگی در بالای یک دکل علامت‌هایی داده می‌شود. اگر ذخیره‌ای نامحدود از پرچم‌هایی از ۷ رنگ مختلف وجود داشته باشد، چند علامت مختلف می‌توان ساخت؟

(ب) پاسخ قسمت قبل چه خواهد بود اگر در علامت‌هایی که داده می‌شود، پرچم‌های مجاور از یک رنگ نباشند؟





(ج) پاسخ چه خواهد بود اگر در علامت‌هایی که داده می‌شود، هر پنج پرچم رنگ‌های مختلف داشته باشند؟

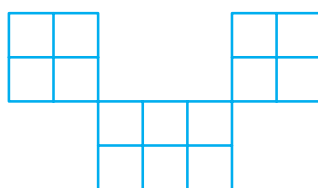
یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم.

(الف) چند حالت مختلف ممکن است پدید آید؟

(ب) در چند حالت اعداد رو شده متمایزند؟

(ج) در چند حالت مجموع اعداد رو شده زوج است؟

۲۰ به چند طریق می‌توان شکل زیر را با مستطیل‌هایی به شکل  و  پر کرد؟



۲۱ (الف) در صفحه‌ی شطرنجی  $8 \times 8$  چند مربع  $3 \times 3$  وجود دارد؟

(ب) در صفحه‌ی شطرنجی  $8 \times 8$  چند مربع وجود دارد؟

۲۲ به چند طریق  $10^0$  نفر با شماره‌های ۱ تا  $10^0$  می‌توانند وارد  $10^0$  اتاق با شماره‌های ۱ تا  $10^0$  شوند به طوری که هیچ فردی در اتاق هم‌شماره با خود نرود؟ (لازم نیست در هر اتاق فقط یک نفر وارد شود.)

۲۳ (الف) چند کلمه‌ی پنج حرفی با حروف الفبای انگلیسی می‌توان ساخت؟

(ب) در چند کلمه حرف تکراری نداریم؟

۲۴ (الف) چند کلمه‌ی چهار حرفی با حروف a, b, c, d, e, f می‌توان ساخت؟

(ب) در چند کلمه حروف مجاور متمایزند؟

(ج) در چند کلمه تمام حروف متمایزند؟

۲۵ (الف) به چند طریق می‌توان یک کلمه‌ی هشت حرفی با حروف p, q, r, s ساخت به طوری که

دو حرف p و q و دو حرف r و s در هیچ جای کلمه کنار هم نباشند؟

(ب) در چند تا از کلمات بخش «الف» هیچ دو حرف مجاوری یکسان نیستند؟

۲۶ (الف) در چند کلمه‌ی ۶ حرفی با حروف انگلیسی حرف اول و آخر صدادارند؟

(ب) در چند تا از این کلمات فقط حرف اول و آخر صدادارند؟

- ۲۸** الف) با حروف  $a, b, c, d, e$  چند کلمه می‌توان نوشت که حداقل سه و حداکثر پنج حرف داشته باشد؟  
 ب) چند تا از آن‌ها حرف تکراری ندارند؟
- ۲۹** الف) چند عدد سه رقمی داریم؟  
 ب) چند تا از آن‌ها زوج هستند؟  
 ج) چند تا از آن‌ها فرد هستند؟  
 د) چند تا از آن‌ها مضرب ۵ هستند؟  
 ه) چند تا از آن‌ها مضرب ۳ هستند؟  
 و) چند تا از آن‌ها رقم تکراری ندارند؟
- ۳۰** چند عدد چهاررقمی وجود دارد به طوری که:  
 الف) برای آن هیچ شرطی نداشته باشیم.  
 ب) از رقم‌های مختلف تشکیل شده باشد.  
 ج) زوج باشد.  
 د) مجموع دو رقم اول و آخر آن  $10^\circ$  و مجموع دو رقم دیگر آن نیز برابر  $10^\circ$  باشد.
- ۳۱** عدد طبیعی  $b$  را که از وارون کردن ارقام عدد طبیعی  $a$  به دست می‌آید، مقلوب  $a$  می‌نامیم (مثلاً مقلوب  $3820$  عدد  $2830$  است). چند عدد از اعداد بین  $1$  تا  $99999$  وجود دارند که مقلوب‌شان با خودشان برابر است؟
- ۳۲** الف) با ارقام  $1, 2, 3, 4, 5$  چند عدد سه‌رقمی بدون رقم تکراری می‌توان ساخت؟  
 ب) با ارقام  $0, 1, 2, 3, 4$  چند عدد سه‌رقمی بدون رقم تکراری می‌توان ساخت؟
- ۳۳** الف) با ارقام  $0, 1, 2, 3, 4, 5$  چند عدد شش‌رقمی مضرب  $5$  بین  $200000$  و  $400000$  با ارقام غیرتکراری می‌توان ساخت؟  
 ب) با ارقام  $0, 1, 2, 3, 4, 5$  چند عدد شش‌رقمی مضرب  $5$  با ارقام غیر تکراری می‌توان ساخت؟
- ۳۴** با ارقام  $5, 6, 7, 8, 0$  چند عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت به طوری که:  
 الف) هیچ محدودیتی نداشته باشیم.  
 ب) اعداد با ارقام متمایز داشته باشیم.  
 ج) اعداد زوج با ارقام متمایز داشته باشیم.  
 د) اعداد مضرب  $9$  با ارقام متمایز داشته باشیم.

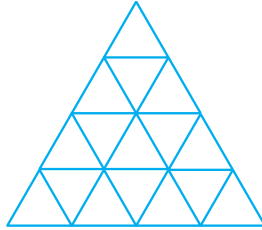


- ۳۵ چند عدد ۷ رقمی با ارقام متمایز وجود دارد به طوری که:  
(الف) هیچ شرط دیگری برای آن نداشته باشیم.  
(ب) فرد باشد.  
(ج) زوج باشد.
- ۳۶ در چند عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز رقم یکان فرد و دهگان بزرگتر از ۴ است؟
- ۳۷ چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز مضرب ۵ هستند؟
- ۳۸ در چند عدد ۷ رقمی، ۵ رقم متوالی برابر ۳ وجود دارد؟
- ۳۹ تعداد اعداد سه رقمی بزرگتر از  $640$  با ارقام متمایز چند تا است؟
- ۴۰ تعداد اعداد چهاررقمی کوچکتر از  $6429$  با ارقام متمایز چند تا است؟
- ۴۱ با ارقام ۳، ۶ و ۹ چند عدد سه رقمی می توان ساخت که هر یک از آن ها رقم تکراری داشته باشند؟
- ۴۲ چند عدد فرد بین  $3000$  تا  $8000$  شامل رقم تکراری نیستند؟
- ۴۳ در چند عدد ۵ رقمی حداقل یکی از سه رقم ۱، ۲ و ۳ وجود دارد؟
- ۴۴ در چند عدد چهار رقمی حداقل یک رقم فرد وجود دارد؟
- ۴۵ در چند عدد ۷ رقمی، رقم تکراری وجود دارد؟
- ۴۶ در چند کلمه ی ۶ حرفی با حروف انگلیسی، حداقل یکی از دو حرف آخر کلمه صدادار است؟
- ۴۷ چند عدد چهاررقمی مربع کامل نیستند؟
- ۴۸ در چند عدد ۶ رقمی، کوچکترین رقم برابر ۳ است؟
- ۴۹ تعداد رشته های دودویی به طول ۷ که شامل  $10101$  باشند، چند تا است؟
- ۵۰ اعداد ۱ تا  $1000$  را روی کاغذ نوشته ایم. رقم ۳ چند بار نوشته شده است؟
- ۵۱ کلمه های کلمات ۴ حرفی که با حروف  $a, b, c, d, e$  می توان ساخت را روی کاغذ نوشته ایم.  
(الف) حرف  $a$  چند بار نوشته شده است؟  
(ب) چند کلمه شامل حرف  $a$  هستند؟
- ۵۲ چند عدد چهاررقمی داریم که رقم هزارگان از ارقام دیگر کوچکتر نباشد؟
- ۵۳ عدد  $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_k^{a_k}$  داده شده است که در آن  $p_1, p_2, \dots, p_k$  عوامل اول عدد  $n$  هستند. این عدد چند مقسوم علیه طبیعی دارد؟
- ۵۴ (الف) عدد  $450$  چند مقسوم علیه طبیعی دارد؟  
(ب) چند تا از آن ها مضرب ۵ هستند؟

- ۵۵ چند مقسوم علیه از عدد  $5^7 \times 3^{10} \times 2^{13}$  بر  $3^{10}$  بخش پذیر نیستند؟
- ۵۶ کوچک ترین عدد طبیعی که ۳۹ مقسوم علیه مثبت دارد، چند است؟
- ۵۷ اعداد  $3^{10}$  و  $2^{15}$  چند مقسوم علیه مشترک مثبت دارند؟
- ۵۸ نشان دهید تعداد مقسوم علیه های طبیعی عدد  $\underbrace{11100011}_{\text{رقم ۹۶}}$  زوج است.
- ۵۹ تمام اعداد سه رقمی که رقم صفر ندارند را با هم جمع می کنیم. مجموع چقدر است؟
- ۶۰ مجموع تمام اعداد ۴ رقمی بدون رقم تکراری را بیابید.
- ۶۱ فرض کنید  $A = \{1, 2, \dots, 30\}$ .
- (الف) مجموعه ای  $A$  چند زیرمجموعه دارد؟
- (ب) در چند زیرمجموعه از  $A$ ، عدد  $2^0$  بزرگ ترین عضو است؟
- (ج) در چند زیرمجموعه از  $A$ ، عدد ۸ کوچک ترین عضو است؟
- (د) در چند زیرمجموعه از  $A$ ، عدد  $2^0$  بزرگ ترین عضو و عدد ۸ کوچک ترین عضو است؟
- (ه) در چند زیرمجموعه از  $A$ ، عدد ۸ وجود دارد ولی عدد  $2^0$  وجود ندارد؟
- ۶۲ مجموعه ای  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  را در نظر بگیرید. به چند طریق می توان دو زیرمجموعه ای  $A$  و  $B$  از  $X$  انتخاب کرد به طوری که:
- (الف) هیچ شرطی نداشته باشیم.  $A \cup B = X$  (د)
- (ب)  $A \subset B$   $A \cap B = \phi$  (ه)
- (ج)  $A \neq B, A \subset B$   $|A \cap B| = 1$  (و)
- ۶۳ به چند طریق می توان سه زیرمجموعه ای  $A, B$  و  $C$  از مجموعه ای  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  انتخاب کرد به طوری که:
- (الف)  $A \subset B \subset C$   $A \cup B \cup C = X$  (ز)
- (ب)  $A \subset (B \cap C)$   $A \cap B \cap C = \phi$  (ح)
- (ج)  $A \subset (B \cup C)$   $A \cap B = A \cap C = \phi$  (ط)
- (د)  $A \cap C = \phi, A \subset B$   $C = \phi, A \cup B = X, A \cap B = \phi$  (ی)
- (ه)  $(A \cup B) \subset C$   $A \cup C = X, A \cap B = \phi$  (ک)
- (و)  $(A \cap B) \subset C$   $(A - B) \cap C = \phi$  (ل)

- ۶۴ تعداد دنباله‌هایی مانند  $(A_1, A_2, \dots, A_k)$  از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  را بیابید به طوری که  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = X$ .
- ۶۵ مجموعه‌ی  $A$  زیرمجموعه‌ای از  $X = \{1, 2, \dots, 10\}$  می‌باشد به طوری که مجموع هیچ دو عضو متمایزی از  $A$  برابر  $15$  نمی‌باشد. به چند طریق می‌توان مجموعه‌ی  $A$  را ساخت؟
- ۶۶ در زبانی تنها دو حرف وجود دارد. هیچ واژه‌ای از این زبان در آغاز واژه‌ی دیگری قرار نگرفته است. این زبان شامل  $3$  واژه‌ی چهار حرفی،  $10$  واژه‌ی پنج حرفی و  $30$  واژه‌ی شش حرفی می‌باشد. حداکثر چند واژه‌ی هفت حرفی در این زبان داریم؟
- ۶۷ (الف) به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول  $4 \times 4$  را با اعداد صفر و یک پرکرد به طوری که مجموع اعداد هر سطر و هر ستون زوج باشد؟  
 (ب) به چند طریق می‌توان اعداد صفر و یک را در خانه‌های یک جدول  $10 \times 15$  قرار داد به طوری که مجموع هر  $4$  عدد متوالی در یک سطر یا یک ستون عددی زوج باشد؟  
 (ج) به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول  $10 \times 15$  را با اعداد  $1$  تا  $6$  پرکرد به طوری که مجموع هر  $4$  عدد متوالی در یک سطر زوج و مجموع هر  $3$  عدد متوالی در یک ستون بر  $3$  بخش‌پذیر باشد؟
- ۶۸ به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول  $m \times n$  را با اعداد  $+1$  و  $-1$  پرکرد به طوری که حاصل ضرب اعداد هر سطر  $-1$  و حاصل ضرب اعداد هر ستون نیز  $-1$  باشد؟
- ۶۹ هر عدد گویا را می‌توان به صورت یک کسر که صورت و مخرج آن نسبت به هم اولند، نمایش داد. چند عدد گویا بین صفر و یک وجود دارد که حاصل ضرب صورت و مخرج نمایش کسری آن‌ها برابر  $20!$  شود؟
- ۷۰ به چند طریق می‌توان  $8$  خانه از یک جدول  $8 \times 8$  را سیاه کرد به طوری که هیچ دو خانه‌ی سیاهی در یک سطر یا ستون نباشند و در ضمن هیچ یک از چهار خانه‌ی واقع در گوشه‌های جدول سیاه نباشند؟
- ۷۱ در چند عدد چهاررقمی مجموع دو رقم سمت چپ با مجموع دو رقم سمت راست عدد برابر است؟
- ۷۲ به چند طریق می‌توان مجموعه‌ی  $\{1, 2, \dots, 1361\}$  را به سه زیرمجموعه‌ی ناتهی افزایش کرد به طوری که در هیچ یک دو عدد متوالی وجود نداشته باشد؟
- ۷۳ به چند طریق می‌توان تعدادی از خانه‌های یک جدول  $8 \times 8$  را سیاه کرد به طوری که برای هر خانه‌ی سیاه تمام خانه‌های هم‌سطر یا تمام خانه‌های هم‌ستون آن نیز سیاه باشند؟

۷۴ به چند طریق می‌توان در ۱۶ مثلث شکل زیر اعداد  $0$  یا  $1$  را نوشت به طوری که مجموع اعداد موجود در مثلث‌های مجاور هر مثلث، زوج باشد؟ (دو مثلث مجاورند اگر در یک ضلع مشترک باشند).



۷۵ روی عرض رودخانه‌ای  $20$  سنگ قرار دارد. یک خرگوش در یک طرف رودخانه قرار دارد و می‌خواهد با استفاده از پرش‌های خود روی سنگ‌ها خود را به طرف دیگر رودخانه برساند. این خرگوش در هر پرش می‌تواند به اندازه‌ی هر چند تا سنگ که بخواهد به جلو جهش کند. خرگوش به چند طریق می‌تواند به طرف دیگر رودخانه برسد؟

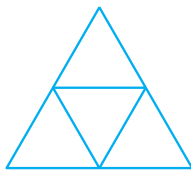
۷۶ به چند روش می‌توان در هر یک از خانه‌های یک جدول  $10 \times 10$  یکی از دو عدد  $1$  و  $2$  را نوشت به طوری که مجموع عددهای نوشته شده در هر مربع  $2 \times 2$  از جدول عددی زوج باشد؟

۷۷ مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, 21, 22, 23\}$  چند زیرمجموعه دارد که هیچ یک از آن‌ها شامل سه عدد متوالی نیستند؟

۷۸ به چند طریق می‌توان اعداد  $1$  تا  $8$  را در یک ردیف نوشت به طوری که هیچ عددی از اعداد سمت چپ و سمت راستش بزرگ‌تر نباشد؟

۷۹ تعداد رشته‌های به طول  $8$  از  $x$  و  $y$  که فاقد رشته‌ی  $xyxy$  باشند چقدر است؟

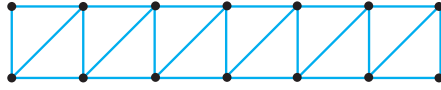
۸۰ به چند طریق می‌توان اضلاع شکل زیر را با سه رنگ، رنگ آمیزی کرد به طوری که هر سه ضلع هیچ مثلثی هم‌رنگ نباشند؟



۸۱ به چند طریق می‌توان  $7$  خانه از یک جدول  $8 \times 2$  را سیاه کرد به طوری که هیچ دو خانه‌ی علامت‌داری ضلع مشترک نداشته باشند؟

۸۲ (الف) به چند طریق می‌توان رأس‌های شکل زیر را با استفاده از چهار رنگ داده شده، رنگ آمیزی کرد به طوری که هر دو رأس که با یک پاره‌خط به هم وصل شده‌اند غیرهم‌رنگ باشند؟

(ب) در چند حالت از هر چهار رنگ استفاده شده است؟



۸۳ می‌خواهیم اعداد مجموعه‌ی  $\{1, 2, \dots, 20\}$  را با قرمز، آبی و سبز رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که هیچ دو عدد  $x$  و  $y$  که  $x - y$  فرد است هم‌رنگ نباشند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۸۴ به چند طریق می‌توان پاره‌خط‌های به طول واحد یک جدول  $m \times n$  را با سه رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که در هر مربع واحد، دو رنگ و هر کدام روی دو ضلع ظاهر شده باشند؟

۸۵ به چند طریق می‌توان رئوس یک جدول  $n \times n$  را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ‌آمیزی کرد به طوری که در هر مربع واحد دقیقاً دو رأس قرمز و دو رأس آبی داشته باشیم؟

۸۶ به چند طریق می‌توان رئوس یک جدول  $n \times n$  را با چهار رنگ مختلف رنگ‌آمیزی کرد به طوری که در هر مربع واحد از هر رنگ دقیقاً یک رأس داشته باشیم؟

۸۷ یک رنگ‌آمیزی از خانه‌های یک جدول با دو رنگ سیاه و سفید را پراکنده می‌گوییم اگر هیچ دو خانه‌ی سیاهی ضلع مشترک نداشته باشند. ثابت کنید تعداد رنگ‌آمیزی‌های پراکنده‌ی یک جدول  $10 \times 10$  از  $10^{15}$  بیشتر و از  $10^{25}$  کم‌تر است.

۸۸ یک  $A_1 A_2 \dots A_n$  ضلعی محدب است. به چند طریق می‌توان سطح این چندضلعی را توسط  $n - 3$  قطر که هیچ دو تا بی‌همدیگر را قطع نمی‌کنند به  $n - 2$  مثلث افراز کرد که هر مثلث حداقل در یک ضلع با  $n$  ضلعی مشترک باشد؟

۸۹ به چند طریق می‌توان یک مربع  $n \times n$  را با کاشی‌هایی به شکل زیر و دوران‌های آن پوشاند به طوری که هر دو ضلع مجاور ناهم‌رنگ باشند؟



۹۰ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $n$  به  $n^2$  مثلث واحد افراز شده است.  $f(n)$  تعداد مسیرهایی از مثلث واحد در بالاترین سطر به مثلث میانی در پایین‌ترین سطر است به طوری که مثلث‌های متوالی روی مسیر در یک ضلع مشترک باشند و هیچ قسمتی از مسیر به سمت بالا نباشد و در ضمن هیچ مثلثی دو بار طی نشود.  $f(n)$  را بیابید.

۹۱ فرض کنید  $n = 2^{31} \times 3^{19}$ . چه تعداد از مقسوم‌علیه مثبت  $n^2$  از  $n$  کوچک‌ترند اما مقسوم‌علیه  $n$  نیستند؟

۱. چه تعداد از پاره‌خط‌های بین نقاط زیر، محور  $x$  ها را قطع می‌کنند؟

$$(-15, 6), (7, 8), (12, -7), (5, -5), (3, 2), (-1, -3),$$

$$(-9, 1), (5, 15), (19, -11), (4, 9)$$

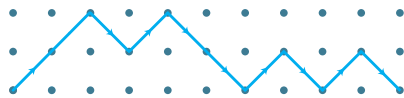
«المپیاد ریاضی - ۸۵»

الف) ۴      ب) ۶      ج) ۱۶      د) ۲۱      ه) ۲۴

۲. شکل زیر یک جدول  $11 \times 3$  با ۳۳ نقطه است. می‌خواهیم با استفاده از حرکت‌های مورب (مانند

شکل زیر) از نقطه‌ی گوشه‌ی سمت چپ و پایین به نقطه‌ی گوشه‌ی سمت راست و پایین برویم. توجه کنید که با هر حرکت مورب فقط می‌توان به سمت راست شکل رفت. این کار به چند طریق ممکن

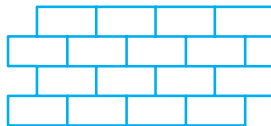
است؟



«المپیاد کامپیوتر - ۷۸»

الف)  $2^4 \times 3^2$       ب)  $3 \times \binom{10}{5}$       ج) ۲۵      د)  $\binom{10}{5}$       ه)  $2^4$

۳. به چند طریق می‌توان آجرهای شکل زیر را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ دو آجر مجاور هم‌رنگ نباشند؟



«المپیاد کامپیوتر - ۸۳»

الف)  $3^4$       ب)  $3 \times 2^{15}$       ج) ۳      د)  $3^4 \times 2^{12}$       ه) ۶

۴. تعداد رشته‌های به طول  $10$  متشکل از  $A, T, C, G$  را بیابید که در آن‌ها  $A$  و  $T$  مجاور هم نباشند و  $C$  و  $G$  نیز مجاور هم نباشند و نیز هیچ دو حرف مجاور یکسان نباشند.

«المپیاد کامپیوتر - ۷۸»

الف) ۲۰۴۸      ب)  $4^9$       ج)  $4^{10} - 4 \times 10 \times 2^8$       د)  $10 \times 2^4$       ه)  $4^6$



۵. مجموعه‌ی  $\{6, 7, 12, 13, 21, 25, 30, 31\}$  چند زیرمجموعه دارد که حاصل جمع اعداد آن زوج است؟  
 («المپیاد کامپیوتر - ۸۷»)

- الف) ۱۶ (ب) ۳۲ (ج) ۶۴ (د) ۹۶ (ه) ۱۲۸

۶. چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که هیچ دو رقم متوالی آن یکی نباشد؟  
 («المپیاد ریاضی - ۸۵»)

- الف) ۶۴۸ (ب) ۷۲۰ (ج) ۷۲۹ (د) ۸۱۰ (ه) ۹۰۰

۷. چند عدد ۱۳ رقمی از ارقام  $\{1, 2, 3, 4\}$  وجود دارد که مجموع هر سه رقم متوالی در آن زوج باشند؟  
 («المپیاد کامپیوتر - ۸۳»)

- الف) ۲۱۳ (ب) ۲۱۵ (ج) ۲۱۱ (د)  $3 \times 2^{11}$  (ه)  $4 \times 3^{11}$

۸. به چند طریق می‌توان اعداد  $0$  و  $1$  را در خانه‌های یک جدول  $15 \times 10$  قرار داد به طوری که مجموع هر ۴ عدد متوالی در یک سطر یا یک ستون عددی زوج باشد؟  
 («المپیاد کامپیوتر - ۷۸»)

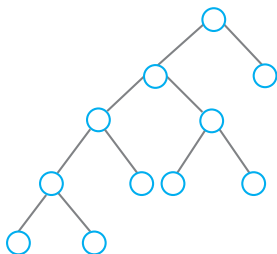
- الف) صفر (ب) ۵۱۲ (ج)  $2^{16}$  (د)  $\binom{15}{4} \binom{10}{4}$  (ه)  $\frac{2^{150}}{\binom{15}{4} \binom{10}{4}}$

۹. یک جدول  $10 \times 12$  داریم. مختصات خانه‌ی بالا سمت چپ  $(0, 0)$ ، و مختصات خانه‌ی پایین سمت راست  $(9, 11)$  است. چند زیرجدول (زیرمستطیل از خانه‌ها)، شامل خانه‌ی  $(7, 5)$  است؟ (بدیهی است که خانه‌ی  $(7, 5)$  به تنهایی و کل جدول، هر کدام یک زیرجدول محسوب می‌شوند).  
 («المپیاد کامپیوتر - ۸۶»)

- الف) ۷۳۵ (ب) ۱۱۲۰ (ج) ۱۰۰۸ (د) ۱۲۶۰ (ه) ۱۲۰۰

۱۰. در شکل زیر، می‌خواهیم دایره‌ها را با ۳ رنگ آبی، قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کنیم، به طوری که رنگ هر دایره و دو دایره‌ی زیر آن، که به آن متصل‌اند (اگر وجود داشته باشد)، با هم برابر باشد و یا رنگ هر سه آن‌ها متفاوت باشد. به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد؟

(«المپیاد کامپیوتر - ۸۶»)



- الف) ۲۴۳ (ب) ۷۲۸ (ج) ۷۲۹ (د) ۱۴۵۸ (ه) ۲۰۴۸