



نظریه‌ی اعداد

بخش اول

۱.۱

الگوریتم تقسیم

می‌دانیم برای تقسیم مقابل می‌توان رابطه‌های زیر را نوشت:

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 7} \\ -28 \quad 4 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$(1) 30 = (7 \times 4) + 2$$

$$(2) 2 < 7$$

● به‌طور کلی، اگر عدد صحیح a را بر عدد صحیح غیرصفر b تقسیم کنیم و خارج قسمت عدد صحیح q و باقی‌مانده r باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} \\ \quad q \\ \hline r \end{array}$$

$$(1) a = (b \times q) + r$$

$$(2) 0 \leq r < |b|$$

توجه کنید که باقی‌مانده نمی‌تواند منفی باشد و حتماً باید از $|b|$ کوچک‌تر باشد. منظور از $|b|$ (بخوانید قدرمطلق b) این است که اگر b عددی منفی بود، آن را قرینه کنید و در صورتی که b عددی مثبت بود: $|b| = b$

$$\text{به‌طور مثال: } | +5 | = +5 \text{ و } | -8 | = +8$$

پس $|b|$ منفی نمی‌باشد. (همواره عددی مثبت یا صفر است.)

در تقسیم a بر b ، عدد a مقسوم و عدد b مقسوم‌علیه نامیده می‌شوند.

بخش پذیری

به تقسیم مقابل توجه کنید.

وقتی عدد 40 را بر 8 تقسیم می‌کنیم، خارج قسمت عدد صحیح

5 و باقی مانده صفر می‌شود.

می‌گوییم: « 40 بر 8 بخش پذیر است.»

یا « 8 عدد 40 را می‌شمارد.»

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 8} \\ \underline{-40} \\ 0 \end{array}$$

● به‌طور کلی، اگر عدد صحیح a را بر عدد صحیح غیر صفر b تقسیم کنیم؛ خارج قسمت عدد صحیح q و باقی مانده صفر باشد، می‌گوییم:

«عدد a بر عدد b بخش پذیر است.» و یا «عدد b عدد a را می‌شمارد.»

در این صورت می‌نویسیم: $b|a$

(و می‌خوانیم b عدد a را می‌شمارد) هم‌چنین می‌توانیم بنویسیم:

$$a = b \times q$$

در مثال بالا می‌توانیم بنویسیم: $8|40$ هم‌چنین: $40 = 8 \times 5$

اعداد زوج - اعداد فرد

با توجه به الگوریتم تقسیم، وقتی عدد صحیح a را بر 2 تقسیم می‌کنیم، دو حالت پیش می‌آید.

(۲) باقی مانده $1 =$

$$\begin{array}{r} a \overline{) 2} \\ \underline{k} \\ 1 \end{array}$$

در این حالت عدد a را «فرد» می‌نامیم.

$$a = 2k + 1 \text{ و می‌نویسیم:}$$

(۱) باقی مانده $=$ صفر

$$\begin{array}{r} a \overline{) 2} \\ \underline{k} \\ 0 \end{array}$$

در این حالت عدد a را «زوج» می‌نامیم.

$$a = 2k \text{ و می‌نویسیم:}$$

● اگر k عددی صحیح باشد، $2k$ نماینده‌ی یک عدد زوج و $2k + 1$ نماینده‌ی یک عدد فرد می‌باشد.

مثال ۱ نشان دهید حاصل ضرب دو عدد فرد، همواره عددی فرد می‌باشد.

حل. این دو عدد فرد را به صورت $2a + 1$ و $2b + 1$ در نظر می‌گیریم:

$$(2a + 1) \times (2b + 1) = \underbrace{4ab + 2a + 2b + 1}_{\text{از } 2 \text{ فاکتور می‌گیریم}} = 2 \underbrace{(2ab + a + b)}_{\text{فرض کنیم حاصل این عبارت } k \text{ باشد}} + 1 = 2k + 1$$

و می‌دانیم $2k + 1$ فرد است.

به روش مشابه می‌توان ثابت کرد:

۱. حاصل جمع دو عدد زوج، عددی زوج است.

۲. حاصل ضرب دو عدد زوج، عددی زوج است.

۳. حاصل جمع دو عدد فرد، عددی زوج است.

۴. حاصل جمع یک عدد زوج و یک عدد فرد، عددی فرد است.

۵. حاصل ضرب یک عدد زوج و یک عدد فرد، عددی زوج است.

مثال ۲ ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی، زوج است.

حل. این دو عدد متوالی را a و $a + 1$ می‌نامیم. دو حالت پیش می‌آید.

۱. اگر a عددی زوج باشد، $a + 1$ فرد خواهد بود و می‌دانیم حاصل ضرب یک عدد زوج و یک عدد فرد، زوج است.

۲. اگر a فرد باشد، $a + 1$ زوج خواهد بود و باز هم حاصل ضرب، زوج می‌باشد.

مثال ۳ ثابت کنید مربع هر عدد فرد، در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ای برابر با ۱ خواهد داشت.

حل. منظور از مربع هر عدد، حاصل ضرب آن عدد در خودش می‌باشد. در این جا عدد مورد نظر فرد است پس آن را به صورت $2k + 1$ در نظر می‌گیریم و مربع آن برابر است با:

$$\begin{aligned}(2k + 1) \times (2k + 1) &= 4k^2 + 2k + 2k + 1 = \underbrace{4k^2 + 4k}_{\text{از } 4k \text{ فاکتور می‌گیریم}} + 1 \\ &= 4k(k + 1) + 1\end{aligned}$$

با توجه به مثال قبل، k و $k + 1$ دو عدد متوالی‌اند پس حاصل ضرب آن‌ها زوج است این عدد زوج را به صورت $2q$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$4 \underbrace{k(k + 1)}_{2q} + 1 = 4 \times 2q + 1 = 8q + 1$$

با توجه به الگوریتم تقسیم:

$$8q + 1 = \text{مربع عدد فرد}$$

پس اگر مربع عدد فرد را بر ۸ تقسیم کنیم خارج قسمت q و باقی‌مانده عدد ۱ می‌باشد.

تمرین‌های بخش اول

۱. در یک تقسیم، مقسوم‌علیه ۱۳ است. اگر ۳۹ واحد به مقسوم‌علیه اضافه کنیم، خارج قسمت و باقی‌مانده چه تغییری می‌کنند.

۲. عدد a را بر b تقسیم کردیم، خارج قسمت q و باقی‌مانده r می‌باشد. یعنی:

$$\begin{array}{r} a \overline{) b} \\ \underline{ q} \\ r \end{array}$$

اگر ۱۷ واحد به مقسوم و ۵ واحد به مقسوم‌علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند، اما از باقی‌مانده ۳ واحد کم می‌شود. خارج قسمت را بیابید.

راهنمایی: تقسیم جدید به صورت زیر است:

$$\begin{array}{r} a + 17 \overline{) b + 5} \\ \underline{ q} \\ r - 3 \end{array}$$

(رابطه‌ی تقسیم‌ها را بنویسید و ...)

۳. با توجه به تقسیم‌های زیر، باقی‌مانده‌ی تقسیم $a \times b$ بر ۷ را تعیین کنید.

$$\begin{array}{r} a \overline{) 7} \\ \underline{ k} \\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} b \overline{) 7} \\ \underline{ q} \\ 6 \end{array}$$

(رابطه‌ی تقسیم‌ها را بنویسید و در هم ضرب کنید)

۴. از بین اعداد زیر، فقط یکی مربع کامل است، آن را بیابید.

$$56165 \quad (3) \quad 56169 \quad (2) \quad 56167 \quad (1)$$

۵. با توجه به الگوریتم تقسیم هر عدد طبیعی در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر با ۰، ۱ یا ۲ دارد. یعنی هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت $3k$ ، $3k + 1$ یا $3k + 2$ نوشت.

ثابت کنید مربع هر عدد طبیعی را نمی‌توان به صورت $3q + 2$ نوشت.

۶. در بین اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۱۳۹۳ چند عدد یافت می‌شود که در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ی ۵ داشته باشد؟

۷. در بین اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۱۳۹۳ چند عدد یافت می‌شود که در تقسیم مربع هر یک از آن‌ها بر ۸ باقی‌مانده ۵ باشد؟

۸. در هر دو عدد متوالی، یکی (دقیقاً یکی) بر ۲ بخش‌پذیر است.

در هر سه عدد متوالی، یکی (دقیقاً یکی) بر ۳ بخش‌پذیر است.

به‌طور مثال ۹ و ۸ و ۷ یا ۱۳ و ۱۲ و ۱۱ و ...

آیا می‌توان گفت:

در هر n عدد متوالی، یکی (دقیقاً یکی) بر n بخش‌پذیر است؟

اثبات کنید.



۹. همهی شمارنده‌های مثبت عدد n را به ترتیب از کوچک به بزرگ نوشته‌ایم:

$$\{1, a, \dots, 15, n\}$$

n چه مقادیری می‌تواند باشد؟

۱۰. در یک تقسیم ۷ واحد به مقسوم‌علیه و ۶۳ واحد به مقسوم اضافه کردیم. باقی‌مانده و خارج‌قسمت تغییری نکردند. خارج‌قسمت چند است؟

۱۱. با توجه به هر یک از تساوی‌های زیر باقی‌مانده‌ی تقسیم‌های خواسته شده را مشخص کنید.

الف. $a = 5q + 3$; باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۵ = ؟

ب. $a = 7q + 20$; باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۷ = ؟

ج. $a = 30q + 11$; باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۱۵ = ؟

د. $a = 30q + 11$; باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۶ = ؟

۱۲. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۷ برابر باشد با ۳؛ و باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۸ برابر باشد با ۲؛ آنگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۵۶ را به دست آورید.

۱۳. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۳ و ۵ به ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۱۵ چند است؟

۱۴. ثابت کنید هیچ‌یک از عددهای زیر مربع کامل نیستند:

$$11, 111, 1111, 11111, \dots$$

۱۵. روی هر یک از ۱۸ کارت، دقیقاً یکی از اعداد ۴ یا ۵ را نوشته‌ایم. مجموع همه‌ی اعداد بر ۱۷ بخش‌پذیر است. روی چند تا از این کارت‌ها عدد ۴ نوشته شده است؟

۹ (۵)

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

«مسابقه‌ی ریاضی کانگورو- ۲۰۱۰»

بخش دوم ۲.۱

تجزیه‌ی اعداد طبیعی

هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک، یا اول است، یا می‌توان آن را به صورت حاصل ضرب اعداد اول نوشت.
به طور مثال:

$$\begin{aligned} ۱۷ &= \text{اول} \\ ۱۸ &= ۲ \times ۳ \times ۳ \quad \rightarrow \quad (\text{اعداد } ۲ \text{ و } ۳ \text{ اول می‌باشند}) \\ ۲۰۰ &= ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۵ \times ۵ \quad \rightarrow \quad (\text{اعداد } ۲ \text{ و } ۵ \text{ اول می‌باشند}) \\ ۲۱۰ &= ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \quad \rightarrow \quad (\text{اعداد } ۲, ۳, ۵, \text{ و } ۷ \text{ اول می‌باشند}) \end{aligned}$$

در تجزیه‌ی اعداد، حاصل ضرب اعداد یکسان را به صورت توانی می‌نویسیم.
به طور مثال:

$$۱۸ = ۲ \times ۳^۲ \qquad ۲۰۰ = ۲^۳ \times ۵^۲$$

با تقسیم کردن هر عدد، بر اعداد اول می‌توان آن را تجزیه کرد.
به طور مثال برای تجزیه‌ی عدد ۱۶۸، ابتدا آن را بر عدد اول ۲ تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت ۸۴ است. آن را دوباره بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} ۱۶۸ \quad | \quad ۲ \\ -۱۶۸ \quad ۸۴ \\ \hline ۰ \end{array} \qquad \begin{array}{r} ۸۴ \quad | \quad ۲ \\ -۸۴ \quad ۴۲ \\ \hline ۰ \end{array}$$

باز هم ۴۲ بر ۲ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r} ۴۲ \quad | \quad ۲ \\ -۴۲ \quad ۲۱ \\ \hline ۰ \end{array}$$

۲۱ دیگر بر ۲ بخش پذیر نیست. اما بر ۳ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r} ۲۱ \quad | \quad ۳ \\ -۲۱ \quad ۷ \\ \hline ۰ \end{array}$$

و ۷ فقط بر ۷ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r} ۷ \quad | \quad ۷ \\ -۷ \quad ۱ \\ \hline ۰ \end{array}$$



همه‌ی این تقسیم‌ها را در یک نمودار می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

و تجزیه‌ی عدد ۱۶۸ به صورت $2^3 \times 3 \times 7$ می‌باشد. (حاصل ضرب اعداد سمت راست در نمودار بالا)

کاربردهای تجزیه

۱. تعیین تعداد شمارنده‌های مثبت یک عدد

- می‌خواهیم تعداد شمارنده‌های مثبت عدد ۶۷۵ را مشخص کنیم. برای این کار ابتدا عدد ۶۷۵ را تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 675 = 3^3 \times 5^2$$

- سپس به هر یک از توان‌ها یک واحد اضافه می‌کنیم و اعداد حاصل را در هم ضرب می‌کنیم.

$$675 = 3^3 \times 5^2 \rightarrow (3 + 1) \times (2 + 1) = 4 \times 3 = 12$$

عدد ۶۷۵ دارای ۱۲ شمارنده‌ی مثبت می‌باشد.

۲. تشخیص مربع کامل بودن یک عدد

اگر عددی را تجزیه کنیم و در تجزیه‌ی آن همه‌ی توان‌ها زوج باشند، آن عدد مربع کامل می‌باشد.

به‌طور مثال، عدد ۵۷۶ مربع کامل است. زیرا وقتی آن را تجزیه می‌کنیم، همه‌ی توان‌ها زوجند.

$$576 = 2^6 \times 3^2 \rightarrow \text{اعداد ۶ و ۲ (توان‌ها) زوجند}$$

پس ۵۷۶ مربع کامل است.

اگر بخواهیم جذر ۵۷۶ را بیابیم (منظور از جذر ۵۷۶، عددی است که اگر در خودش ضرب شود حاصل ۵۷۶ می‌شود) کافی است در تجزیه، توان‌ها را نصف کنیم.

$$2^6 \times 3^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 2^3 \times 3^1 = 8 \times 3 = 24$$

یعنی: $24 \times 24 = 576$ (جذر ۵۷۶ عدد ۲۴ می‌باشد).

۳. تشخیص مکعب کامل بودن یک عدد

عددی مانند ۸ مکعب کامل است زیرا برابر است با عدد طبیعی ۲ به توان ۳ (یعنی $۲^۳ = ۸$)
 آیا عدد ۱۰۰ مکعب کامل است؟ عدد ۱۲۴ چه طور؟
 هیچ عدد طبیعی یافت نمی‌شود که اگر به توان ۳ برسد حاصل ۱۰۰ شود اما ۱۲۵ مکعب کامل است زیرا: $۵^۳ = ۱۲۵$
 اگر عددی را تجزیه کنیم و در تجزیه آن، همه‌ی توان‌ها مضرب ۳ باشند، آن عدد مکعب کامل است.

به‌طور مثال عدد ۱۷۲۸ مکعب کامل است زیرا تجزیه‌ی آن به صورت $۲^۶ \times ۳^۳$ می‌باشد. در تجزیه‌ی آن توان‌ها ۶ و ۳ هستند که هر دو مضرب ۳ می‌باشند.

اما عدد ۶۷۵ مکعب کامل نیست زیرا تجزیه‌ی آن به صورت $۳^۳ \times ۵^۲$ است. در تجزیه‌ی آن توان‌ها ۲ و ۳ هستند ۲ مضرب ۳ نیست پس ۶۷۵ مکعب کامل نیست.

مثال ۴ کوچک‌ترین مقدار طبیعی a را چنان تعیین کنید که $۳۵۲۸ \times a$ مربع کامل باشد.

حل. عدد ۳۵۲۸ را تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$۳۵۲۸ \times a = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۷^۲ \times a$$

چون برای مربع کامل بودن باید همه‌ی توان‌ها زوج باشند و در این جا فقط توان عدد $۲^۳$ فرد است، کوچک‌ترین مقدار طبیعی که به جای a باید قرار دهیم عدد ۲ است؛ تا وقتی در $۲^۳$ ضرب شد $۲^۴$ حاصل گردد و توان ۲ هم زوج شود.

مثال ۵ ثابت کنید اگر عددی مربع کامل باشد، تعداد شمارنده‌های مثبت آن، عددی فرد می‌باشد.

حل. اگر عددی مربع کامل باشد، در تجزیه‌ی آن همه‌ی توان‌ها زوج‌اند. برای تعیین تعداد شمارنده‌های آن، به هر توان یکی اضافه می‌کنیم و اعداد حاصل را در هم ضرب می‌کنیم. وقتی به هر توان یکی اضافه می‌کنیم اعداد حاصل، همگی فرد خواهند شد و حاصل ضرب آن‌ها هم فرد می‌شود.

مثال ۶ می‌دانیم عدد صحیح مثبت n ، بر ۲۱ و بر ۹ بخش پذیر است. کدامیک از جواب‌های زیر می‌تواند تعداد شمارنده‌های مثبت n باشد؟

۷ (۵)

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

«مسابقه‌ی ریاضی کانگورو- ۲۰۰۲»

حل. کوچک‌ترین عددی که هم بر ۹ بخش پذیر است و هم بر ۲۱ عدد ۶۳ می‌باشد. تعداد شمارنده‌های آن برابر است با:

$$۶۳ = ۳^۲ \times ۷^۱ \rightarrow (۲ + ۱)(۱ + ۱) = ۳ \times ۲ = ۶$$

گزینه‌ی «۴» صحیح است.

۱. کوچک‌ترین عدد طبیعی a را چنان تعیین کنید که $2880 \times a$ مکعب کامل باشد.
۲. عدد $5^y \times 3^x$ دارای ۴۰ شمارنده‌ی مثبت است. x چند است؟
۳. عدد $3^y \times 2^x$ دارای ۱۴ شمارنده‌ی مثبت است. مقدار x و y را بیابید. (x و y عدد صحیح می‌باشند).
۴. عدد $100 \times 3^2 \times 4^3$ چند شمارنده‌ی مثبت دارد؟
۵. نشان دهید اگر عددی مربع کامل باشد، رقم یکان آن ۲، ۳، ۴ یا ۸ نمی‌تواند باشد.
۶. می‌دانیم $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ (۵! را پنج فاکتوریل می‌خوانیم) به‌طور کلی

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$
 اگر حاصل $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ مربع کامل باشد، n چند است؟
۷. عدد $5^2 \times 3 \times 2^3$ برابر است با:

$$2^3 \times 3 \times 5^2 = 8 \times 3 \times 25 = 600$$
 عدد حاصل ۲ رقم صفر در سمت راست خود دارد. عدد حاصل از $7^4 \times 5^6 \times 3^7 \times 2^8$ در سمت راست خود چند رقم صفر خواهد داشت؟
۸. بیش‌ترین مقدار n را چنان بیابید که 3^n عدد $100!$ را بشمارد.
۹. بیش‌ترین مقدار n را چنان بیابید که 7^n عدد $200!$ را بشمارد.
۱۰. عدد $1393!$ در سمت راست خود چند رقم صفر دارد؟
۱۱. عدد اول a را چنان بیابید که $a \times 72$ دارای ۱۵ شمارنده‌ی مثبت باشد.
۱۲. مقدار x را چنان تعیین کنید که عدد $8 \times 3^x \times 5^{x+1}$ دارای ۴۸ شمارنده‌ی طبیعی باشد.
۱۳. چند عدد طبیعی مانند n دارای این ویژگی است که باقی‌مانده تقسیم عدد 2003 بر n برابر است با ۲۳؟

۳۶ (۵)

۱۲ (۴)

۱۳ (۳)

۱۹ (۲)

۲۲ (۱)

«مسابقه‌ی ریاضی کانگورو - ۲۰۰۳»

۱۴. چند عدد طبیعی وجود دارد که عامل اول بزرگ‌تر از ۱۵ ندارد و بر هیچ عدد مکعب کامل بزرگ‌تر از یک بخش‌پذیر نیست؟

۴۰۹۶ (۵)

۲۱۸۷ (۴)

۷۲۹ (۳)

۷۲۰ (۲)

۶۴ (۱)

«المپیاد ریاضی - ۱۳۸۶»

۱۵. حداکثر چند عدد از میان اعداد طبیعی ۱ تا ۱۳۹۱ می‌توان انتخاب کرد که ضرب هر دو تایی از آن‌ها مربع کامل باشد؟

«المپیاد ریاضی - ۱۳۹۱»

۱۶. کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت x که به ازای آن داشته باشیم $x = N^3$ و $۱۲۶۰ = N$ عدد صحیح باشد، برابر است با:

- ۱) ۱۰۵۰ (۲) ۱۲۶۰ (۳) $۱۲۶۰^۲$ (۴) ۷۳۵۰ (۵) ۴۴۱۰۰

«مسابقه‌ی ریاضی دبیرستان آمریکا - ۱۹۶۳»

۱۷. حاصل ضرب دو عدد $۲۰^۵$ و $۵۰^۲$ دقیقاً چند رقم صفر در سمت راست خود دارد؟

- ۱) ۷۰ (۲) ۷۱ (۳) ۹۰ (۴) ۱۴۰

«سومین دوره‌ی آزمون روبوکاپ - ۱۳۸۳»

۱۸. حاصل ضرب دو عدد طبیعی برابر است با ۱۰۰۰۰ و رقم یکان هیچ‌کدام از آن‌ها صفر نیست. مجموع این دو عدد برابر است با:

- ۱) ۶۴۱ (۲) ۶۳۳ (۳) ۱۴۱ (۴) ۱۳۳

«چهارمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ - ۱۳۸۴»

۱۹. در سمت راست عدد $۱۵^۳ \times ۷^{۱۸} \times ۲۵^۸ \times ۳^{۱۹} \times ۴^{۱۲}$ پس از ساده شدن چند صفر وجود دارد؟

- ۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۳ (۴) ۲۴

«ششمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ - ۱۳۸۶»

۲۰. بین دو عدد ۲۸۰۹ و ۲۹۱۶ چند عدد صحیح وجود دارد که مربع کامل باشند؟

- ۱) هیچ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

«هفتمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ - ۱۳۸۷»

۲۱. عدد طبیعی $۶۵^۴ \times ۲۱^۳ \times ۲۰^۵$ بر چند عدد اول بخش پذیر است؟

- ۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

«هفتمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ - ۱۳۸۷»

۲۲. تعداد مقسوم‌علیه‌های (شمارنده‌های) عدد $۴۹^۷$ برابر است با:

- ۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۱۵ (۴) ۱۴

«دهمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ - ۱۳۹۰»

(ب.م.م) و (ک.م.م) دو عدد۱. (ب.م.م) دو عدد

شمارنده‌های مثبت عدد 40 را در نظر بگیرید:

$$40 \text{ و } 20 \text{ و } 10 \text{ و } 8 \text{ و } 5 \text{ و } 4 \text{ و } 2 \text{ و } 1$$

شمارنده‌های مثبت عدد 24 را هم در نظر بگیرید:

$$24 \text{ و } 12 \text{ و } 8 \text{ و } 6 \text{ و } 4 \text{ و } 3 \text{ و } 2 \text{ و } 1$$

در بین شمارنده‌های مثبت این دو عدد، اعداد زیر مشترکند:

$$1 \text{ و } 2 \text{ و } 4 \text{ و } 8$$

و عدد 8 بزرگ‌ترین شمارنده‌های مشترک 40 و 24 است. (عدد 8 را (ب.م.م) دو عدد 40 و 24 می‌نامیم.) و می‌نویسیم: $(40, 24) = 8$

روش‌های محاسبه (ب.م.م) دو عددروش اول. تقسیم‌های متوالی:

می‌خواهیم (ب.م.م) دو عدد 322 و 126 را پیدا کنیم.

۱. ابتدا عدد بزرگ‌تر را بر عدد کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 322 \quad | \quad 126 \\ -252 \quad 2 \\ \hline 70 \end{array}$$

۲. باقی‌مانده صفر نشد. اکنون مقسوم‌علیه یعنی 126 را بر باقی‌مانده یعنی 70 تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} 126 \quad | \quad 70 \\ -70 \quad 1 \\ \hline 56 \end{array}$$

۳. باز هم باقی‌مانده صفر نشد. دوباره مقسوم‌علیه را بر باقی‌مانده تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 70 \quad | \quad 56 \\ -56 \quad 1 \\ \hline 14 \end{array}$$

۴. باز هم باقی‌مانده صفر نشد. مقسوم‌علیه را بر باقی‌مانده تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 56 \quad | \quad 14 \\ -56 \quad 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

۵. باقی مانده صفر شد. مقسوم علیه این تقسیم برابر است با (ب.م.م) ۳۲۲ و ۱۲۶

$$\begin{array}{r} 56 \overline{) 126} \\ -56 \quad 2 \\ \hline 170 \end{array} \Rightarrow (322, 126) = 14$$

مثال ۷ ب.م.م دو عدد ۲۳۸ و ۴۰۸ را بیابید.

حل.

$$\begin{array}{r} 408 \overline{) 238} \\ -238 \quad 1 \\ \hline 170 \end{array} \quad \begin{array}{r} 238 \overline{) 170} \\ -170 \quad 1 \\ \hline 68 \end{array} \quad \begin{array}{r} 170 \overline{) 68} \\ -136 \quad 2 \\ \hline 34 \end{array} \quad \begin{array}{r} 68 \overline{) 34} \\ -68 \quad 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad (238, 408) = 34$$

روش دوم. به کمک تجزیه

می‌خواهیم (ب.م.م) دو عدد 1800 و 560 را به دست آوریم.
این دو عدد را تجزیه می‌کنیم:

$$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$$

$$560 = 2^4 \times 5 \times 7$$

(ب.م.م) این دو عدد برابر است با حاصل ضرب پایه‌های مشترک با توان کوچک‌تر

$$\begin{aligned} 1800 &= 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \\ 560 &= 2^4 \times 5^1 \times 7 \end{aligned} \Rightarrow (1800, 560) = 2^3 \times 5^1 = 8 \times 5 = 40$$

۲. (ک.م.م) دو عدد

مضرب‌های عدد ۱۸ را در نظر بگیرید:

$$18 \text{ های مضرب} \rightarrow 18, 36, 54, 72, 90, 108, \dots$$

مضرب‌های عدد ۱۲ را هم در نظر بگیرید:

$$12 \text{ های مضرب} \rightarrow 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, \dots$$

مضرب‌های مشترک این دو عدد عبارتند از:

$$36, 72, 108, \dots$$

و عدد ۳۶ کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو عدد است.

$$[12, 18] = 36$$

می‌نویسیم:

روش‌های محاسبه‌ی (کم‌م) دو عدد

$$[a, b] = \frac{a \times b}{(a, b)}$$

روش اول. استفاده از رابطه‌ی

برای محاسبه‌ی (کم‌م) دو عدد، می‌توان حاصل‌ضرب آن دو عدد را بر (ب‌م) آن دو عدد تقسیم کرد.

مثال ۸ (کم‌م) دو عدد ۴۲ و ۷۰ را به‌دست آورید.

حل. ابتدا (ب‌م) این دو عدد را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r} 70 \overline{) 42} \\ -42 \quad 1 \\ \hline 28 \end{array} \quad \begin{array}{r} 42 \overline{) 28} \\ -28 \quad 1 \\ \hline 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \overline{) 14} \\ -28 \quad 2 \\ \hline 0 \end{array} \Rightarrow (42, 70) = 14$$

سپس با استفاده از رابطه‌ی بالا (کم‌م) این دو عدد را محاسبه می‌کنیم:

$$[42, 70] = \frac{42 \times 70}{(42, 70)} = \frac{42 \times 70}{14} = 210$$

روش دوم. به کمک تجزیه

می‌خواهیم (کم‌م) دو عدد ۱۸۰۰ و ۵۶۰ را به‌دست آوریم.

این دو عدد را تجزیه می‌کنیم:

$$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$$

$$560 = 2^4 \times 5 \times 7$$

(کم‌م) این دو عدد برابر است با حاصل‌ضرب پایه‌های مشترک با توان بزرگ‌تر ضرب در پایه‌های غیرمشترک (با هر توانی که دارند).

$$\begin{aligned} 1800 &= 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \\ 560 &= 2^4 \times 5^1 \times 7 \end{aligned} \Rightarrow [1800, 560] = 2^4 \times 5^2 \times 3^2 \times 7 = 25200$$

مثال ۹ اگر (ب‌م) دو عدد ۱ باشد (کم‌م) آن دو عدد چگونه به‌دست می‌آید؟

حل. می‌دانیم:

$$[a, b] = \frac{a \times b}{(a, b)}$$

اگر $(a, b) = 1$ باشد:

$$[a, b] = a \times b$$

نتیجه: اگر (ب‌م) دو عدد ۱ باشد، (کم‌م) آن دو عدد برابر است با حاصل‌ضرب آن دو عدد.

مثال ۱۰ اگر $a = 2^x \times 3^4$ و $b = 2^5 \times 3^y$ و $(a, b) = 2^3 \times 3$ باشد مقدار x و y را بیابید.

حل. با توجه به پایه‌های مشترک ۲^۵ و ۲^x و این‌که در (ب‌م) ۲^۳ دیده می‌شود: $x = 3$ (ب‌م) شامل پایه‌های مشترک با توان کوچک‌تر است) و هم‌چنین ۳^y و ۳^۴ و این‌که در (ب‌م) ۳^۱ دیده می‌شود: $y = 1$

تمرین‌های بخش سوم

۱. ثابت کنید (ب.م.م) دو عدد متوالی ۱ است.

۲. اگر a و b دو عدد اول متمایز (مختلف، متفاوت) باشند، ثابت کنید: $(a, b) = 1$

۳. به کمک (ب.م.م) صورت و مخرج، هر یک از کسرهای زیر را ساده کنید.

$$\frac{1147}{1369} \quad \text{ب.}$$

$$\frac{598}{874} \quad \text{الف.}$$

(راهنمایی: صورت و مخرج را بر (ب.م.م) آن‌ها تقسیم کنید)

۴. اگر حاصل ضرب دو عدد صحیح $7^3 \times 5^2 \times 3 \times 2^5$ باشد، مجموع این دو عدد:

(۱) ممکن است بر ۸ بخش پذیر باشد. (۲) ممکن است بر ۳ بخش پذیر باشد. (۳) ممکن است بر ۵ بخش پذیر باشد.

(۴) ممکن است بر ۴۹ بخش پذیر باشد. (۵) ممکن نیست بر هیچ یک از اعداد ۸، ۳، ۵ یا ۴۹ بخش پذیر باشد.

«مسابقه ریاضی کانگورو - ۲۰۰۶»

۵. عدد صحیح مثبت n دارای ۲ شمارنده مثبت است، در حالی که $n + 1$ دارای ۳ شمارنده مثبت است. عدد $n + 2$ چند شمارنده مثبت دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) به n بستگی دارد.

«مسابقه ریاضی کانگورو - ۲۰۰۷»

۶. اگر (ب.م.م) دو عدد ۱ باشد، می‌گوییم آن دو عدد «نسبت به هم اول» می‌باشند. ثابت کنید به ازای همه‌ی مقادیر طبیعی n ، دو عدد $7n + 9$ و $3n + 4$ نسبت به هم اولند.

۷. (ک.م.م) سه عدد ۳۶، ۶۳ و ۱۴۰ را بیابید.

۸. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) دو عدد ۸۱ و ۱۰۸ بر چند عدد اول بخش پذیر است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

«هفتمین دوره آزمون روبوکاپ - ۱۳۸۷»

۹. با توجه به الگوی مقابل مقدار x کدام عدد می‌تواند باشد؟

| | | | | |
|----|-----|-----|----|----|
| ۷۲ | ۶۰ | ۱۸۰ | ۳۰ | ۳۶ |
| ۱۲ | ۶۰ | ۳۰ | ۶ | |
| ۱۲ | x | ۶ | | |
| ۶ | ۶ | | | |

۱۲ (۱)

۲۴ (۲)

۳۰ (۳)

۶۰ (۴)

«هفتمین دوره آزمون روبوکاپ - ۱۳۸۷»

۱۰. اگر m و n دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول باشند و $\frac{2020}{909} \times \frac{707}{1414} = \frac{m}{n}$ آنگاه $m + n$ برابر است با:

۳۸ (۴)

۱۱۰۹ (۳)

۱۹ (۲)

۱۹۱۹ (۱)

«هشتمین دوره آزمون روبوکاپ - ۱۳۸۸»

۱۱. ب.م.م دو عدد x و y برابر است با ۶ و ب.م.م دو عدد x و z برابر است با ۸. اگر $50 < x < 95$ باشد، عدد x چند است؟

عدد اول

تعریف عدد اول را می‌دانید. به هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ که فقط دو شمارنده‌ی طبیعی دارد، عدد اول می‌گویند. یکی از این شمارنده‌ها عدد ۱ و شمارنده‌های دیگر خود عدد است.

مانند: ۳ که فقط دو شمارنده‌ی مثبت دارد: ۱ و ۳
و یا ۱۷ که شمارنده‌های مثبت آن ۱ و ۱۷ می‌باشند.

مثال ۱۱ آیا عدد 307 اول است؟

حل. بخش‌پذیر بودن 307 بر اعداد اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ... را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} 307 \overline{) 2} \\ \underline{0} \\ 207 \\ \underline{0} \\ 207 \\ \underline{0} \\ 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 307 \overline{) 3} \\ \underline{0} \\ 307 \\ \underline{0} \\ 7 \end{array} \qquad 307$$

... بر ۵ بخش‌پذیر نیست بر ۳ بخش‌پذیر نیست بر ۲ بخش‌پذیر نیست

اما تا کجا پیش برویم؟

توجه کنید که

$$2 \times 2 = 4, \quad 3 \times 3 = 9, \quad \dots, \quad 17 \times 17 = 289, \quad 19 \times 19 = 361$$

عدد ۳۶۱ اولین عدد مرکبی است که بر هیچ‌یک از اعداد اول ۲، ۳، ۵، ...، ۱۷ بخش‌پذیر نیست. $307 < 361$ پس بخش‌پذیری را تا ۱۷

بررسی می‌کنیم ...

«ادامه به عهده‌ی شما»

چند نکته

۱. توجه داشته باشید که ۲ تنها عدد اول زوج است.

۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳، بر عدد ۶ همواره ۱ یا ۵ است.

زیرا: با توجه به الگوریتم تقسیم هر عدد طبیعی در تقسیم بر ۶ به یکی از صورت‌های زیر نوشته می‌شود:

$$6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5$$

در بین اینها $6k, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4$ همیشه مرکب‌اند.

۳. اگر عدد اول p عدد a^n را بشمارد، آن‌گاه p عدد a را می‌شمارد به‌طور مثال 20^{17} بر عدد اول ۵ بخش‌پذیر است مشاهده می‌کنید که 20

هم بر ۵ بخش‌پذیر است.

تمرین‌های بخش چهارم

۱. آیا عدد ۳۲۳ اول است؟

۲. چند تا از اعداد زیر اول اند؟

$$۹۳! + ۲, ۹۳! + ۳, ۹۳! + ۴, \dots, ۹۳! + ۹۶$$

۳. عدد $۱۵^{۱۳۹۳} + ۲۰^{۱۳۹۳}$ اول است یا مرکب؟ چرا؟

۴. چند عدد اول کوچک‌تر از ۱۳۷۶ وجود دارد که مجموع ارقام آن ۲ است؟

۶ (۵)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

«المپیاد ریاضی - ۱۳۷۶»

۵. مقدار x را چنان بیابید که $x - ۵$ و $x + ۱۰$ هر دو اول باشند.

۶. یک عدد اول را «بسیار اول» گوئیم اگر هر قطعه از رقم‌های متوالی آن نیز عددی اول به وجود آورند. اعداد «بسیار اول» دورقمی عبارتند از

$۲۳, ۳۷, ۵۳$ و ۷۳ . چند عدد «بسیار اول» سه‌رقمی وجود دارد؟

«المپیاد ریاضی ایران - ۱۳۸۶»

۷. در عبارت $n^2 + n + ۴۱$ به جای n عدد ۱ را قرار دهید. آیا عدد حاصل، اول است؟

به جای n عدد ۲ را قرار دهید. آیا عدد حاصل، اول است؟

به جای n هر بار اعداد $۳, ۴, ۵$ و ... را جاگذاری کنید و هر بار اول بودن آن را بررسی کنید. آیا می‌توان گفت عبارت $n^2 + n + ۴۱$

به ازای همه‌ی اعداد طبیعی n ، عدد اول تولید می‌کند؟ چرا؟

۸. اگر p عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد.

الف. ثابت کنید $۲۳ + p^2$ بر ۸ بخش پذیر است.

ب. ثابت کنید $۲۳ + p^2$ بر ۳ بخش پذیر است.

۹. کریستین گلدباخ در سال ۱۶۹۰ در شهر کونیگسبرگ متولد شد. او در سال ۱۷۴۲ به لئونارد اویلر نامه‌ای نوشت و حدس خود را بیان کرد. این حدس تاکنون اثبات یا رد نشده است.

حدس گلدباخ این است که «هر عدد طبیعی زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.» و «هر عدد طبیعی

فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت»

به طور مثال:

$$۴ = ۲ + ۲$$

$$۶ = ۳ + ۳$$

$$۸ = ۳ + ۵$$

و ...

$$۱۹ = ۵ + ۳ + ۱۱$$

$$۲۳ = ۳ + ۳ + ۱۷$$

و ...

الف. هر یک از اعداد $۸^۰$ ، ۶۴ و ۱۰۲ را به صورت مجموع دو عدد اول بنویسید.

ب. هر یک از اعداد ۱۰۱ ، ۹۷ و ۶۳ را به صورت مجموع سه عدد اول بنویسید.

۱۰. عددی را «هشتی» می‌نامیم که حاصل جمع هر دو تا از شمارنده‌های مثبت آن بر ۸ بخش پذیر باشد. (مانند ۷ که شمارنده‌های مثبت آن ۱ و ۷ می‌باشند و $۱ + ۷ = ۸$ و ۸ بر ۸ بخش پذیر است.) چند عدد «هشتی» در بین اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۸۰ وجود دارد؟

۱۱. چهار عدد طبیعی داریم. حاصل جمع هر دو تا از آن‌ها را می‌نویسیم و همه‌ی اعداد به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم ثابت کنید عدد نهایی مرکب است.

۱۲. اگر p و $p + ۲$ اعدادی اول باشند و $p > ۳$ باشد، ثابت کنید مجموع این دو عدد اول بر ۱۲ بخش پذیر است.

۱۳. اعداد x, y, z و t چهار عدد طبیعی اند به طوری که $xy = ۶$ ، $xz = ۱۲$ ، $zt = ۵۰$ و $yt = ۲۵$ مقدار xt برابر است با:

۳۰ (۴)

۷۵ (۳)

۳۰۰ (۲)

۱۵۰ (۱)

«سومین دوره‌ی آزمون روبوکاپ - ۱۳۸۳»

۱۴. اگر p و q دو عدد اول متوالی باشند (بین p و q عدد اول دیگری نباشد) و x یک عدد طبیعی باشد به طوری که $۲x - p = q$ در مورد x چه می‌توان گفت؟

(۴) وجود ندارد

(۳) یا اول است یا مرکب

(۲) مرکب است

(۱) اول است

«هشتمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ - ۱۳۸۸»

۱۵. کدام عدد زیر اول است؟

۱۱۲۱۱ (۲)

۱۴۰۹ (۱)

۵^{۱۱} + ۵^{۱۳} + ۵^{۱۵} + ... + ۵^{۹۹} + ۴۵۲ + ۱ (۴)

۲۶۱۹۸ + ۱۲۵۵۹ + ۱ (۳)

«نهمین دوره‌ی آزمون روبوکاپ - ۱۳۸۸»

