۱

نامساوی حسابی ـ هندسی

احتمالاً شما با نامساوی $a+b \geq ۲\sqrt{ab}$ آشنا هستید. این نامساوی حالت خاصی از نامساوی حسابی ـ هندسی است. نامساوی حسابی ـ هندسی یکی از پرکاربردترین نامساوی‌ها در المپیاد است، به طوری که در بسیاری از مسائل، در اثبات‌مان به آن نیاز پیدا می‌کنیم. در این فصل اول از همه، مثال‌هایی را حل می‌کنیم که شما را با نحوه‌ی استفاده از این نامساوی آشنا کند. بعد از آن با نگاه بهتری به حل مسائل می‌پردازیم و نامساوی‌ها را بر مبنای حالت تساوی استفاده می‌کنیم. در ادامه نیز به شما استفاده از تکنیک‌های مختلف مانند استفاده از فرض‌های مسئله یا تغییر متغیر و یا استفاده از ضرایب نامعین و ...را آموزش می‌دهیم. حال به بیان صورت نامساوی حسابی ـ هندسی می‌پردازیم.

۱-۱ نامساوی حسابی ـ هندسی

فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، n عدد حقیقی و نامنفی باشند، در این صورت داریم:

$$\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n}$$

که صورت‌های مهم معادل آن عبارتند از:

$$a_۱+a_۲+\cdots+a_n \geq n.\sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n}$$

$$\left(\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{n}\right)^n \geq a_۱a_۲\cdots a_n$$

حالت تساوی آن نیز زمانی رخ می‌دهد که: $a_۱=a_۲=\cdots=a_n$

نتایج مهم

۱. برای n عدد حقیقی و نامنفی مانند $a_1,\cdots,a_n$ با مجموع ثابت $(a_1+a_2+\cdots+a_n=S)$ داریم:

حداکثر عبارت $a_1a_2\cdots a_n$ برابر $(\frac{S}{n})^n$ است و این مقدار بیشینه زمانی اتفاق می‌افتد که $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{S}{n}$.

۲. برای n عدد حقیقی و نامنفی مانند $a_1,\cdots,a_n$ با حاصل‌ضرب ثابت $(a_1a_2\cdots a_n=p)$ داریم:

حداقل عبارت $a_1+a_2+\cdots+a_n$ برابر $n\times\sqrt[n]{p}$ است و این مقدار کمینه زمانی اتفاق می‌افتد که $a_1=a_2=\cdots=a_n=\sqrt[n]{p}$.

حالت‌های خاص

	$n=2$	$n=3$	$n=4$
فرض	$a,b\geq 0$	$a,b,c\geq 0$	$a,b,c,d\geq 0$
حالت اول	$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$	$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$	$\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$
حالت دوم	$a+b\geq 2\sqrt{ab}$	$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$	$a+b+c+d\geq 4\sqrt[4]{abcd}$
حالت سوم	$(\frac{a+b}{2})^2\geq ab$	$(\frac{a+b+c}{3})^3\geq abc$	$(\frac{a+b+c+d}{4})^4\geq abcd$
حالت تساوی	$a=b$	$a=b=c$	$a=b=c=d$

اثبات نامساوی حسابی ـ هندسی

این نامساوی اثبات‌های متعددی دارد. در اینجا یک اثبات با استفاده از استقرای ریاضی بیان می‌کنیم:

پایه‌ی استقرا:

$$n=2:\ \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\Leftrightarrow\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0$$

که عبارت آخر با توجه به مربع کامل بودن، بدیهی است. در ضمن حالت تساوی زمانی است که $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ یا به عبارتی $a=b$ باشد.

گام استقرایی: فرض کنید برای هر n عدد حقیقی و نامنفی مانند $a_1,\cdots,a_n$ داشته باشیم

$$\begin{cases}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1,a_2,\cdots,a_n}\\ \text{حالت تساوی}\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n\end{cases}$$

قبل از اثبات گام استقرایی، لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم:

$$\frac{np^{n+1}+q^{n+1}}{n+1}\geq p^nq$$

اثبات لم:

$$\begin{aligned}\frac{np^{n+1}+q^{n+1}}{n+1}-p^nq&=\frac{1}{n+1}\left(np^n(p-q)-q(p^n-q^n)\right)\\&=\frac{p-q}{n+1}\left(np^n-q(p^{n-1}+p^{n-2}q+\cdots+q^{n-1})\right)\\&=\frac{p-q}{n+1}\left((p^n-p^{n-1}\times q)+(p^n-p^{n-2}\times q^2)+\cdots+(p^n-q^n)\right)\\&=\frac{(p-q)^2}{n+1}\left((p^{n-1})+(p^{n-2}(p+q))+\left(p^{n-3}\times(p^2+pq+q^2)\right)\right.\\&\quad\left.+\cdots+\left(p^n+p^{n-2}\times q+\cdots+q^{n-1}\right)\right)\end{aligned}$$

که به وضوح عبارت آخر نامنفی است و در ضمن حالت تساوی زمانی است که $p-q=0$ و یا $p=q$. حال می‌خواهیم گام استقرایی را ثابت کنیم:

$$S_{n+1}=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)+a_{n+1}}{n+1}\geq\frac{n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+a_{n+1}}{n+1}$$

قرار دهید $a_1a_2\cdots a_n=p^{n(n+1)}$ و $a_{n+1}=q^{n+1}$. در این صورت داریم:

$$S_{n+1}\geq\frac{np^{n+1}+a^{n+1}}{n+1}\geq p^nq=\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}}$$

در ضمن حالت تساوی نیز زمانی است که:

$$\begin{cases}a_1+a_2+\cdots+a_n\geq n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\\ \overset{\text{فرض استقرا}}{\Rightarrow}(\text{حالت تساوی}\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n)\\ \dfrac{np^{n+1}+q^{n+1}}{(n+1)}\geq p^nq\\ p=q\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad(\text{حالت تساوی}\quad\Leftrightarrow\quad a_1=a_2=\cdots=a_n=a_{n+1})$$

پس گام استقرایی ثابت شد و این نامساوی برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است.

۱-۲ چگونه از نامساوی حسابی ـ هندسی استفاده کنیم

مثال ۱-۱ برای عدد طبیعی n و عدد حقیقی و مثبت a نشان دهید:

$$na+۱ \geq (n+۱)\sqrt[n+۱]{a^n}$$

حل:

$$na+۱ = \underbrace{a+a+\cdots+a}_{\text{بار } n}+۱ \geq (n+۱)\sqrt[n+۱]{a\times a\times\cdots\times a\times ۱}$$

$$= (n+۱)\sqrt[n+۱]{a^n}$$

مثال ۲-۱ برای اعداد حقیقی و مثبت x, y, z به طوری که $x^۲+y^۲+z^۲=xyz$. ثابت کنید:

الف) $xyz \geq ۲۷$ ب) $xy+yz+zx \geq ۲۷$ ج) $x+y+z \geq ۹$

حل:

(الف)

$$xyz = x^۲+y^۲+z^۲ \geq ۳\sqrt[۳]{x^۲y^۲z^۲} \Rightarrow \sqrt[۳]{xyz} \geq ۳ \Rightarrow xyz \geq ۲۷$$

(ب)

$$xy+yz+zx \geq ۳\sqrt[۳]{(xy)(yz)(zx)} = \sqrt[۳]{x^۲y^۲z^۲} \geq ۳\sqrt[۳]{۲۷^۲} = ۲۷$$

(ج)

$$x+y+z \geq ۳\sqrt[۳]{xyz} \geq ۳\sqrt[۳]{۲۷} = ۹$$

مثال ۳-۱ فرض کنید a و b اعدادی طبیعی هستند. ثابت کنید:

$$\frac{ab(a^۲+b^۲)}{a+b} \geq \sqrt[a+b]{a^{۳b}.b^{۳a}}$$

حل:

$$ab(a^۲+b^۲) = b\times a^۳ + a\times b^۳$$

$$= \underbrace{a^۳+a^۳+\cdots+a^۳}_{\text{بار } b} + \underbrace{b^۳+b^۳+\cdots+b^۳}_{\text{بار } a}$$

$$\geq (a+b)\sqrt[a+b]{a^۳\times a^۳\times\cdots\times a^۳\times b^۳\times b^۳\times\cdots\times b^۳}$$

$$= (a+b)\sqrt[a+b]{a^{۳b}.b^{۳a}}$$

مثال ۱-٤ برای عداد حقیقی و طبیعی و مثبت a، b و c ثابت کنید:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq ۸abc$$

حل:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (۲\sqrt{ab})(۲\sqrt{bc})(۲\sqrt{ca}) = ۸abc$$

مثال ۱-۵ برای اعداد حقیقی و مثبت $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ به طوری که $a_۱a_۲\cdots a_n = ۱$ ثابت کنید:

$$(۱+a_۱)(۱+a_۲)\cdots(۱+a_n) \geq ۲^n$$

حل:

$$\begin{aligned}(۱+a_۱)(۱+a_۲)\cdots(۱+a_n) &\geq (۲\sqrt{a_۱})(۲\sqrt{a_۲})\cdots(۲\sqrt{a_n})\\ &= ۲^n\sqrt{a_۱a_۲\cdots a_n} = ۲^n\end{aligned}$$

مثال ۱-۶ برای اعداد حقیقی و مثبت x، y و z به طوری که $x, y, z \geq ۲$ ثابت کنید:

$$(y^۳+x)(z^۳+y)(x^۳+z) \geq ۱۲۵xyz$$

حل: چون $y \geq ۲$ است پس $y^۳ \geq ۴y$ می‌باشد (عبارت‌های مشابه آن). از طرفی داریم:

$$۴y + x = y+y+y+y+x \geq ۵\sqrt[۵]{y^۴x}$$

و عبارت‌های مشابه آن نیز به همین شکل اثبات می‌شوند. حال داریم:

$$\begin{aligned}(y^۳+x)(z^۳+y)(x^۳+۲) &\geq (۴y+x)(۴z+y)(۴x+z)\\ &\geq (۵\sqrt[۵]{y^۴x})(۵\sqrt[۵]{z^۴y})(۵\sqrt[۵]{x^۴z})\\ &= ۱۲۵\sqrt[۵]{x^۵y^۵z^۵} = ۱۲۵xyz\end{aligned}$$

مثال ۱-۷ برای اعداد حقیقی و مثبت $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ و $b_۱, b_۲, \cdots, b_n$ ثابت کنید:

$$\frac{۱}{\prod_{i=۱}^{n} a_i} + \frac{۱}{\prod_{i=۱}^{n} b_i} \geq \frac{۲^{n+۱}}{\prod_{i=۱}^{n}(a_i+b_i)}$$

حل: از آن‌جایی که $a_i + b_i \geq ۲\sqrt{a_i b_i}$، داریم:

$$\prod_{i=۱}^{n}(a_i + b_i) \geq ۲^n \prod_{i=۱}^{n}\sqrt{a_i b_i}$$

از طرفی طبق نامساوی حسابی ـ هندسی داریم:

$$\frac{۱}{\prod\limits_{i=۱}^{n} a_i} + \frac{۱}{\prod\limits_{i=۱}^{n} b_i} \geq ۲\sqrt{\frac{۱}{\prod\limits_{i=۱}^{n} a_i} \times \frac{۱}{\prod_{i=۱}^{n} b_i}} = ۲\prod_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{۱}{a_i b_i}}$$

$$\Rightarrow \left(\prod_{i=۱}^{n}(a_i + b_i)\right)\left(\frac{۱}{\prod\limits_{i=۱}^{n} a_i} + \frac{۱}{\prod\limits_{i=۱}^{n} b_i}\right) \geq \left(۲^n \prod_{i=۱}^{n}\sqrt{a_i b_i}\right)\left(۲\prod_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{۱}{a_i b_i}}\right) = ۲^{n+۱}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\prod\limits_{i=۱}^{n} a_i} + \frac{۱}{\prod\limits_{i=۱}^{n} b_i} \geq \frac{۲^{n+۱}}{\prod\limits_{i=۱}^{n}(a_i + b_i)}$$

مثال ۱-۸ برای اعداد حقیقی و مثبت x، y و z به طوری که $x + y + z = ۳$ ثابت کنید:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx$$

حل:

$$۲(xy + yz + zx) = (x + y + z)^۲ - x^۲ - y^۲ - z^۲ = ۹ - x^۲ - y^۲ - z^۲$$

$$\text{حکم مسئله} \Leftrightarrow ۲\sqrt{x} + ۲\sqrt{y} + ۲\sqrt{z} \geq ۲(xy + yz + zx) = ۹ - x^۲ - y^۲ - z^۲$$

$$\Leftrightarrow x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۲\sqrt{x} + ۲\sqrt{x} + ۲\sqrt{y} + ۲\sqrt{z} \geq ۹$$

از طرفی داریم: $x^۲ + ۲\sqrt{x} = x^۲ + \sqrt{x} + \sqrt{x} \geq ۳\sqrt[۳]{x^۲.\sqrt{x}.\sqrt{x}} = ۳x$ (و عبارت‌های مشابه آن). بنابراین داریم:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۲\sqrt{x} + ۲\sqrt{y} + ۲\sqrt{z} \geq ۳x + ۳y + ۳z = ۹$$

بنابراین مسئله ثابت می‌شود.

مثال ۱-۹ برای اعداد حقیقی و مثبت a، b و c ثابت کنید: (a، b و c اضلاع مثلث هستند)

$$\frac{(b + c - a)^۴}{a(a + b - c)} + \frac{(c + a - b)^۴}{b(b + c - a)} + \frac{(a + b - c)^۴}{c(c + a - b)} \geq ab + bc + ca$$

حل:

$$\begin{cases} \dfrac{(b+c-a)^۴}{a(a+b-c)} + a(a+b-c) \geq ۲\sqrt{\dfrac{(b+c-a)^۴}{a(a+b-c)}.a(a+b-c)} = ۲(b+c-a)^۲ \\ \dfrac{(c+a-b)^۴}{b(b+c-a)} + b(b+c-a) \geq ۲\sqrt{\dfrac{(c+a-b)^۴}{b(b+c-a)}.b(b+c-a)} = ۲(c+a-b)^۲ \\ \dfrac{(a+b-c)^۴}{c(c+b-b)} + c(c+a-b) \geq ۲\sqrt{\dfrac{(a+b-c)^۴}{c(c+a-b)}.c(c+a-b)} = ۲(a+b-c)^۲ \end{cases}$$

از جمع طرفین نامساوی بالا داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{(b+c-a)^۴}{a(a+b-c)} + \frac{(c+a-b)^۴}{b(b+c-a)} + \frac{(a+b-c)^۴}{c(c+a-b)} + a^۲ + b^۲ + c^۲ \\ &\geq ۶(a^۲+b^۲+c^۲) - ۴(ab+bc+ca) \\ \Rightarrow &\frac{(b+c-a)^۴}{a(a+b-c)} + \frac{(c+a-b)^۴}{b(b+c-a)} + \frac{(a+b-c)^۴}{c(c+a-b)} \\ &\geq ۵(a^۲+b^۲+c^۲) - ۴(ab+bc+ca) \\ &\geq ۵(ab+bc+ca) - ۴(ab+bc+ca) = ab+bc+ca \end{aligned}$$

توجه کنید که نامساوی آخر، با توجه به نامساوی $a^۲+b^۲+c^۲ \geq ab+bc+ca$ به‌دست می‌آید. بنابراین مسئله حل می‌شود. یک نکته که احتمالاً در راه‌حل بالا از چشم شما دور مانده و خیلی مهم است، جلوگیری از ایجاد عبارت‌های منفی در نامساوی است. در اینجا ممکن بود $a+b-c$ منفی باشد، اما با توجه به شرط اضلاع مثلث بودن، این مشکل حل شده است.

مثال ۱-۱۰ a، b و c عددهایی طبیعی هستند، ثابت کنید:

$$۳^{a+b+c} \geq (۱+\frac{b+c}{a})^a(۱+\frac{c+a}{b})^b(۱+\frac{a+b}{c})^c$$

حل: با توجه به نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{۳}{a+b+c} &= \frac{\overbrace{(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{a}+\cdots+\frac{۱}{a})}^{a\text{ تا}} + \overbrace{(\frac{۱}{b}+\frac{۱}{b}+\cdots+\frac{۱}{b})}^{b\text{ تا}} + \overbrace{(\frac{۱}{c}+\frac{۱}{c}+\cdots+\frac{۱}{c})}^{c\text{ تا}}}{a+b+c} \\ &\geq \sqrt[a+b+c]{(\frac{۱}{a})^a.(\frac{۱}{b})^b.(\frac{۱}{c})^c} \end{aligned}$$

$$= (\frac{۱}{a})^{\frac{a}{a+b+c}}(\frac{۱}{b})^{\frac{b}{a+b+c}}(\frac{۱}{c})^{\frac{c}{a+b+c}}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} ۳^{a+b+c} &\geq (a+b+c)^{a+b+c}(\frac{۱}{a})^{a}.(\frac{۱}{b})^{b}.(\frac{۱}{c})^{c} \\ &\geq \left(\frac{a+b+c}{a}\right)^{a}.\left(\frac{a+b+c}{b}\right)^{b}.\left(\frac{a+b+c}{c}\right)^{c} \\ &= \left(۱+\frac{b+c}{a}\right)^{a}.\left(۱+\frac{c+a}{b}\right)^{b}.\left(۱+\frac{a+b}{c}\right)^{c} \end{aligned}$$

مثال ۱-۱۱ برای اعداد طبیعی a، b و c نشان دهید:

$$\left(\frac{a+b+c}{۳}\right)^{a+b+c} \geq a^{b}.b^{c}.c^{a}$$

حل: بنابر نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$\sqrt[a+b+c]{a^{b}.b^{c}.c^{a}} \leq \frac{\overbrace{(a+a+\cdots+a)}^{b \text{ تا}}+\overbrace{(b+b+\cdots+b)}^{c \text{ تا}}+\overbrace{(c+c+\cdots+c)}^{a \text{ تا}}}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow\ a^{b}.b^{c}.c^{a} \leq \left(\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right)^{a+b+c}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right)^{a+b+c} &\leq \left(\frac{a+b+c}{۳}\right)^{a+b+c} \\ &\Leftrightarrow\ ۳ab+۳bc+۳ca \leq (a+b+c)^{۲} \\ &\Leftrightarrow\ (a-b)^{۲}+(b-c)^{۲}+(c-a)^{۲} \geq ۰ \end{aligned}$$

مثال ۱-۱۲ به ازای هر عدد طبیعی n به طوری که

$$S_n = ۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n}$$

نشان دهید:

$$(n-۱)^{\frac{-۱}{n-۱}} < n-S_n$$

حل: بنابر نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$\frac{n-S_n}{n-۱}=\frac{(۱-۱)+(۱-\frac{۱}{۲})+\cdots+(۱-\frac{۱}{n})}{n-۱}$$
$$\geq \sqrt[n-۱]{\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۲}{۳}\cdots(\frac{n-۲}{n-۱})(\frac{n-۱}{n})}=(\frac{۱}{n})^{\frac{۱}{n-۱}}$$
$$\Rightarrow n-S_n\geq (n-۱)n^{-\frac{۱}{n-۱}}>(n-۱)^{-\frac{۱}{n-۱}}$$
$$\Rightarrow n-S_n>(n-۱)^{\frac{-۱}{n-۱}}$$

از آن‌جا که نامساوی حسابی هندسی را برای اعدادی به کار بردیم که با هم برابر نیستند، پس حالت تساوی نداریم.

مثال ۱-۱۳ k و n عددهایی طبیعی‌اند. نشان دهید:

$$n^{kn}\geq (n^k+n^{k-۱}+\cdots+۱)^{n-۱}$$

حل: بنابر نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$n^k=\frac{(n^{k+۱}-۱)+۱}{n}=\frac{(n-۱)(n^k+n^{k-۱}+\cdots+۱)+۱}{n}$$
$$\geq \sqrt[n]{(n^k+\cdots+n+۱)^{n-۱}\cdot ۱}$$
$$\Rightarrow\ n^{kn}\geq (n^k+\cdots+۱)^{n-۱}$$

مثال ۱-۱۴ n عددی طبیعی است. نشان دهید:

$$(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt[۳]{۶}-\sqrt{۲})\cdots(\sqrt[n+۱]{(n+۱)!}-\sqrt[n]{n!})<\frac{n!}{(n+۱)^n}$$

حل: با استفاده از نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$\sqrt[n+۱]{۱\times(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt[۳]{۶}-\sqrt{۲})\cdots(\sqrt[n+۱]{(n+۱)!}-\sqrt[n]{n!})}$$
$$<\frac{۱+(\sqrt{۲}-۱)+(\sqrt[۳]{۶}-\sqrt{۲})+\cdots+(\sqrt[n+۱]{(n+۱)!}-\sqrt[n]{n!})}{n+۱}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n+1]{(\sqrt{2}-1)(\sqrt[3]{6}-\sqrt{2})\cdots(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!})} < \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2}-1)\cdots(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}) < \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n}$$

از آن‌جا که نامساوی حسابی هندسی را برای اعدادی به کار بردیم که با هم برابر نیستند، پس حالت تساوی نداریم.

اکنون می‌خواهیم به بررسی تکنیک‌های مورد استفاده در نامساوی حسابی ـ هندسی بپردازیم.

۱. تبدیل کردن یک عبارت از نوع حسابی به عبارتی از نوع هندسی

مثال ۱-۱۵ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b، کم‌ترین مقدار ممکن برای $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ را بیابید.

اثبات:

$$S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = 2$$

و زمانی که $a = b > 0$ باشد، مقدار S برابر ۲ می‌شود. پس جواب مسئله همان ۲ است.

حال می‌خواهیم مثال بالا را با داشتن دامنه‌های متفاوت بررسی کنیم.

مثال ۱-۱۶ برای عدد حقیقی و مثبت a به طوری که $a \geq 3$، کم‌ترین مقدار ممکن برای $S = a + \frac{1}{a}$ را بیابید.

اثبات نادرست:

$$S = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a.\frac{1}{a}} = 2 \Rightarrow \min S = 2$$

علت: طبق حالت تساوی در نامساوی حسابی هندسی، $S = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{a}$ که در نتیجه $a = 1$ باید باشد و چون در فرض ما $a \geq 3$ است پس حالت $S = 2$ رخ نخواهد داد.

تلاش برای حدس زدن کم‌ترین مقدار ممکن S:

a	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	$\cdots$	۳۰
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\cdots$	$\frac{1}{30}$
S	$3+\frac{1}{3}$	$4+\frac{1}{4}$	$5+\frac{1}{5}$	$6+\frac{1}{6}$	$7+\frac{1}{7}$	$8+\frac{1}{8}$	$9+\frac{1}{9}$	$10+\frac{1}{10}$	$11+\frac{1}{11}$	$\cdots$	$30+\frac{1}{30}$

از مشاهده‌ی جدول حدس می‌زنیم، کم‌ترین مقدار ممکن برای S در حالتی است که $a = 3$ باشد و در نتیجه $\min S = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ باشد.

حال با توجه به این‌که در نامساوی حسابی ـ هندسی، حالت تساوی زمانی است که همه‌ی متغیرها برابر باشند، برای این‌که در $a = 3$، کم‌ترین مقدار S به‌دست بیاید، باید در نامساوی‌هایی که به کار می‌گیریم،

$a=۳$ حالت تساوی تمام این نامساوی‌ها باشد. بنابراین نمی‌توانیم، نامساوی حسابی ـ هندسی را برای a و $\frac{۱}{a}$ به کار بگیریم زیرا $\frac{۱}{۳}\neq ۳$. برای رفع این مشکل ضرایبی را به متغیرها نسبت می‌دهیم. در این‌جا باید ضریب α را طوری تعیین کنیم که بتوانیم برای $(\alpha a, \frac{۱}{a})$ نامساوی حسابی هندسی بزنیم.

$$\alpha a=\frac{۱}{a}\overset{a=۳}{\Rightarrow}\alpha=\frac{۱}{۹}$$

حال S را با توجه به ضریبی که به‌دست آوردیم، بازنویسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} S=a+\frac{۱}{a}=(\frac{۱}{۹}\times a+\frac{۱}{a})+\frac{۸}{۹}\times a \\ \frac{۱}{۹}a+\frac{۱}{a}\geq ۲\sqrt{\frac{۱}{۹}\times a\times\frac{۱}{a}}=\frac{۲}{۳} \\ a\geq ۳\ \Rightarrow\ \frac{۸}{۹}\times a\geq\frac{۸}{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow\ S\geq\frac{۱۰}{۳}$$

و برای $a=۳$، مقداری S برابر $\frac{۱۰}{۳}$ می‌شود. پس $\frac{۱۰}{۳}$ جواب مسئله می‌باشد.

مثال ۱-۱۷ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b به طوری که $a+b\leq ۱$، کم‌ترین مقدار ممکن برای $S=ab+\frac{۱}{ab}$ را بیابید.

حل: نادرست:

$$S=ab+\frac{۱}{ab}\geq ۲\sqrt{ab.\frac{۱}{ab}}=۲\ \Rightarrow\ \min S=۲$$

علت: زیرا حالت تساوی برای زمانی است که $ab=\frac{۱}{ab}\ \Leftarrow\ ab=۱$ که در آن صورت $\frac{۱}{۲}\leq\frac{a+b}{۲}\leq\sqrt{ab}=۱$. که به وضوح تناقض است. پس حالت $S=۲$ رخ نخواهد داد.

تلاش برای ساده‌سازی مسئله: توجه داشته باشید که S از دو متغیر a و b ساخته شده است. ما با تغییر متغیر $t=\frac{۱}{ab}$ یا $t=ab$، مسئله را به مسئله‌ای تک متغیره تبدیل می‌کنیم. با تغییر متغیر $t=\frac{۱}{ab}$ داریم: $S=t+\frac{۱}{t}$. حال وقتی که تغییر متغیر انجام دهیم، باید دامنه‌ی متغیر جدید را بیابیم:

$$t=\frac{۱}{ab}\geq\frac{۱}{(\frac{a+b}{۲})^۲}\geq\frac{۱}{(\frac{۱}{۲})^۲}=۴$$

حال با توجه به این‌که متغیر t می‌تواند تمام مقادیر $[۴,+\infty)$ را تولید کند، پس مسئله‌ی اولیه دقیقاً معادل مسئله زیر می‌شود.

مسئله‌ی جدید: برای عدد حقیقی و مثبت t به‌طوری‌که $t \geq ۴$، حداقل مقدار ممکن برای $S = t + \frac{۱}{t}$ را بیابید.

حل: اولاً حدس می‌زنیم که مقدار مورد نظر به ازای $t = ۴$ به‌دست آید. پس حالت تساوی در همه‌ی نامساوی‌ها باید $t = ۴$ باشد. حال با توجه به روش ضریب‌گذاری، اگر بخواهیم برای $(\alpha t, \frac{۱}{t})$ نامساوی حسابی ـ هندسی بزنیم باید داشته باشیم:

$$\alpha t = \frac{۱}{t} \overset{t=۴}{\Rightarrow} \alpha = \frac{۱}{۱۶}$$

با توجه به ضریب به‌دست آمده، S را بازنویسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} S = t + \frac{۱}{t} = (\frac{۱}{۱۶} \times t + \frac{۱}{t}) + \frac{۱۵}{۱۶} \times t \\ \frac{۱}{۱۶}t + \frac{۱}{t} \geq ۲\sqrt{\frac{۱}{۱۶} \times t \times \frac{۱}{t}} = \frac{۱}{۲} \\ t \geq ۴ \ \Rightarrow \ \frac{۱۵}{۱۶} \times t \geq \frac{۱۵}{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow \ S \geq \frac{۱۷}{۴}$$

در ضمن برای $t = ۴$ مقدار S دقیقاً برابر $\frac{۱۷}{۴}$ می‌شود. پس جواب مسئله همان $\frac{۱۷}{۴}$ است.
اثبات مسئله‌ی اصلی بدون تبدیل به مسئله‌ای دیگر:

$$S = ab + \frac{۱}{ab} = \left(ab + \frac{۱}{۱۶ab}\right) + \frac{۱۵}{۱۶ab} \geq ۲\sqrt{ab.\frac{۱}{۱۶ab}} + \frac{۱۵}{۱۶(\frac{a+b}{۲})^۲} \geq \frac{۱۷}{۴}$$

و برای $a = b = \frac{۱}{۲}$ مقدار S دقیقاً برابر $\frac{۱۷}{۴}$ می‌شود.

مثال ۱-۱۸ برای اعداد حقیقی و مثبت a، b و c به طوری که $a + b + c \leq \frac{۳}{۲}$ کم‌ترین مقدار ممکن برای $S = a + b + c + \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}$ را بیابید.

حل نادرست:

$$S = a + b + c + \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} \geq ۶\sqrt[۶]{abc.\frac{۱}{a}.\frac{۱}{b}.\frac{۱}{c}} = ۶ \ \Rightarrow \ \min S = ۶$$

علت:

$$\text{حالت تساوی} \ : \ a = b = c = \frac{۱}{a} = \frac{۱}{b} = \frac{۱}{c} \ \Rightarrow \ a = b = c = ۱$$

$$\Rightarrow \ a + b + c > \frac{۳}{۲} \ \text{تناقض}$$

حل: حدس می‌زنیم حالت مینیمم برای $a=b=c=\frac{۱}{۲}$ باشد.

$$\begin{cases} a=b=c=\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{\alpha a}=\frac{۱}{\alpha b}=\frac{۱}{\alpha c}=\frac{۲}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲}{\alpha}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha=۴$$

$$\Rightarrow S=a+b+c+\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}$$

$$=\left(a+b+c+\frac{۱}{۴a}+\frac{۱}{۴b}+\frac{۱}{۴c}\right)+\frac{۳}{۴}\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right)$$

$$\begin{cases} a+b+c+\frac{۱}{۴a}+\frac{۱}{۴b}+\frac{۱}{۴c} \geq ۶\sqrt[۶]{abc.\frac{۱}{۴a}.\frac{۱}{۴b}.\frac{۱}{۴c}}=۳ \\ \frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c} \geq ۳\times\sqrt[۳]{\frac{۱}{a}.\frac{۱}{b}.\frac{۱}{c}}=\frac{۳}{\sqrt[۳]{abc}} \geq \frac{۳}{\frac{a+b+c}{۳}} \geq \frac{۳}{\frac{\frac{۳}{۲}}{۳}}=۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow S \geq ۳+\frac{۳}{۴}\times ۶=\frac{۱۵}{۲}$$

برای $a=b=c=\frac{۱}{۲}$ نیز مقدار S برابر $\frac{۱۵}{۲}$ خواهد شد. پس جواب مسئله $\frac{۱۵}{۲}$ است.

مثال ۱-۱۹ برای اعداد حقیقی و مثبت a، b و c به طوری که $a+b+c \leq \frac{۳}{۲}$، کم‌ترین مقدار ممکن برای $S=\sqrt{a^۲+\frac{۱}{b^۲}}+\sqrt{b^۲+\frac{۱}{c^۲}}+\sqrt{c^۲+\frac{۱}{a^۲}}$ را بیابید.

حل نادرست:

$$S \geq ۳\sqrt[۳]{\sqrt{a^۲+\frac{۱}{b^۲}}\times\sqrt{b^۲+\frac{۱}{c^۲}}\times\sqrt{c^۲+\frac{۱}{a^۲}}}=۳\sqrt[۶]{(a^۲+\frac{۱}{b^۲})(b^۲+\frac{۱}{c^۲})(c^۲+\frac{۱}{a^۲})}$$

$$\geq ۳\sqrt[۶]{(۲\sqrt{a^۲\cdot\frac{۱}{b^۲}})(۲\sqrt{b^۲\cdot\frac{۱}{c^۲}})(۲\sqrt{c^۲\cdot\frac{۱}{a^۲}})}=۳\sqrt[۶]{۸}=۳\sqrt{۲} \Rightarrow \min S=۳\sqrt{۲}$$

علت: برای این‌که همه‌ی نامساوی‌ها به تساوی تبدیل شوند باید داشته باشیم:

$$a=b=c=\frac{۱}{a}=\frac{۱}{b}=\frac{۱}{c} \Rightarrow a=b=c=۱ \Rightarrow a+b+c>\frac{۳}{۲}$$ تناقض

حل: حدس می‌زنیم حالت مینیمم برای $a=b=c=\frac{۱}{۲}$ باشد.

$$\begin{cases} a^۲=b^۲=c^۲=\frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{\alpha a^۲}=\frac{۱}{\alpha b^۲}=\frac{۱}{\alpha c^۲}=\frac{۴}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{۴}{\alpha}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \alpha=۱۶$$

حال S را با توجه به ضریب به‌دست آمده بازنویسی می‌کنیم:

$$S = \sqrt{a^{۲} + \underbrace{\frac{۱}{۱۶b^{۲}} + \cdots + \frac{۱}{۱۶b^{۲}}}_{\text{۱۶ مرتبه}}} + \sqrt{b^{۲} + \underbrace{\frac{۱}{۱۶c^{۲}} + \cdots + \frac{۱}{۱۶c^{۲}}}_{\text{۱۶ مرتبه}}} + \sqrt{c^{۲} + \underbrace{\frac{۱}{۱۶a^{۲}} + \cdots + \frac{۱}{۱۶a^{۲}}}_{\text{۱۶ مرتبه}}}$$

$$\geq \sqrt{۱۷ \cdot \sqrt[۱۷]{\frac{a^{۲}}{۱۶^{۱۶}b^{۳۲}}}} + \sqrt{۱۷ \cdot \sqrt[۱۷]{\frac{b^{۲}}{۱۶^{۱۶}c^{۳۲}}}} + \sqrt{۱۷ \cdot \sqrt[۱۷]{\frac{c^{۲}}{۱۶^{۱۶}a^{۳۲}}}}$$

$$= \sqrt{۱۷}\left(\sqrt[۱۷]{\frac{a}{۱۶^{۸}b^{۱۶}}} + \sqrt[۱۷]{\frac{b}{۱۶^{۸}c^{۱۶}}} + \sqrt[۱۷]{\frac{c}{۱۶^{۸}a^{۱۶}}}\right)$$

$$\geq \sqrt{۱۷} \times \left[۳ \times \sqrt[۳]{\sqrt[۱۷]{\frac{a}{۱۶^{۸}b^{۱۶}}} \times \sqrt[۱۷]{\frac{b}{۱۶^{۸}c^{۱۶}}} \times \sqrt[۱۷]{\frac{c}{۱۶^{۸}a^{۱۶}}}}\right]$$

$$= ۳\sqrt{۱۷}. \sqrt[۱۷]{\frac{۱}{۱۶^{۸}a^{۵}b^{۵}c^{۵}}}$$

$$= \frac{۳\sqrt{۱۷}}{۲\sqrt[۱۷]{(۲a \cdot ۲b \cdot ۲c)^{۵}}} \geq \frac{۳\sqrt{۱۷}}{۲\sqrt[۱۷]{(\frac{۲a+۲b+۲c}{۳})^{۱۵}}} \geq \frac{۳\sqrt{۱۷}}{۲}$$

برای $a = b = c = \frac{۱}{۲}$ مقدار S برابر $\frac{۳\sqrt{۱۷}}{۲}$ خواهد شد. پس جواب مسئله $\frac{۳\sqrt{۱۷}}{۲}$ می‌باشد.

۲. تبدیل کردن یک عبارت از نوع هندسی به عبارتی از نوع حسابی

در این روش نیز توجه به حالت تساوی بسیار مهم است یعنی باید با ضریب‌گذاری برای اعداد سعی کنیم تمام متغیرها را برابر کنیم. این ضریب‌گذاری می‌تواند با استفاده از فرض‌های مسئله و یا گذاشتن اعداد حقیقی به عنوان ضریب باشد. معمولاً با گذاشتن اعداد حقیقی به عنوان ضریب متغیرها حالت تساوی را ایجاد می‌کنیم. در بعضی مواقع نیز با اضافه کردن چند عدد به عبارت داده شده، تعداد متغیرها را برای نامساوی زدن، متناسب می‌کنیم.

مثال ۱-۲۰ برای اعداد حقیقی و مثبت a، b و c به طوری که $a + b + c = ۱$، بیش‌ترین مقدار ممکن برای $S = \sqrt[۳]{a+b} + \sqrt[۳]{b+c} + \sqrt[۳]{c+a}$ را بیابید.

حل نادرست:

$$\begin{cases} \sqrt[۳]{a+b} = \sqrt[۳]{(a+b) \times ۱ \times ۱} \leq \dfrac{(a+b)+۱+۱}{۳} \\ \sqrt[۳]{b+c} = \sqrt[۳]{(b+c) \times ۱ \times ۱} \leq \dfrac{(b+c)+۱+۱}{۳} \\ \sqrt[۳]{c+a} = \sqrt[۳]{(c+a) \times ۱ \times ۱} \leq \dfrac{(c+a)+۱+۱}{۳} \end{cases}$$

از جمع سه نامساوی بالا نتیجه می‌گیریم:

$$S = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \frac{۲(a+b+c)+۶}{۳} = \frac{۸}{۳} \Rightarrow \max S = \frac{۸}{۳}$$

علت:

$$S = \frac{۸}{۳} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=۱ \\ b+c=۱ \\ c+a=۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲(a+b+c) = ۳ \Rightarrow ۱ = a+b+c = \frac{۳}{۲} \quad \text{تناقض}$$

پس S هیچ‌وقت نمی‌تواند مقدار $\frac{۸}{۳}$ را کسب کند، پس $\frac{۸}{۳}$ نمی‌تواند بیش‌ترین مقدار ممکن برای S باشد.

حل: حدس می‌زنیم حالت ماکزیمم برای $a=b=c=\frac{۱}{۳}$ باشد که در این صورت $a+b=b+c=c+a=\frac{۲}{۳}$. حال با توجه به حالت تساوی،نامساوی‌های زیر را استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{\frac{۹}{۴}} \times \sqrt[3]{(a+b)\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}} \leq \sqrt[3]{\frac{۹}{۴}} \times \left(\frac{(a+b)+\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۳}}{۳}\right) \\ \sqrt[3]{b+c} = \sqrt[3]{\frac{۹}{۴}} \times \sqrt[3]{(b+c)\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}} \leq \sqrt[3]{\frac{۹}{۴}} \times \left(\frac{(b+c)+\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۳}}{۳}\right) \\ \sqrt[3]{c+a} = \sqrt[3]{\frac{۹}{۴}} \times \sqrt[3]{(c+a)\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}} \leq \sqrt[3]{\frac{۹}{۴}} \times \left(\frac{(c+a)+\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۳}}{۳}\right) \end{cases}$$

از جمع طرفین سه نامساوی بالا داریم:

$$S = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \sqrt[3]{\frac{۹}{۴}} \times \frac{۲(a+b+c)+۴}{۳}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{۹}{۴}} \times \frac{۶}{۳} = \sqrt[3]{۱۸}$$

برای $a=b=c=\frac{۱}{۳}$ نیز مقدار S برابر $\sqrt[3]{۱۸}$ می‌شود. پس جواب مسئله $\sqrt[3]{۱۸}$ می‌باشد.

مثال ۱-۲۱ برای اعداد حقیقی و مثبت a، b و c به طوری که $a+b+c=۳$، بیش‌ترین مقدار ممکن برای $S = \sqrt[3]{a(b+۲c)} + \sqrt[3]{b(c+۲a)} + \sqrt[3]{c(a+۲b)}$ را بیابید.

حل: حدس می‌زنیم حالت ماکزیمم برای $a=b=c=۱$ برقرار باشد زیرا در عبارت‌هایی که نسبت به متغیرها متقارن هستند معمولاً (نه همیشه) حالت ماکزیمم (یا مینیمم) زمانی است که متغیرها برابر باشند.

با توجه به این‌که $a=b=c=1$ داریم $b+2c=c+2a=a+2b=3$. حال با توجه به حالت تساوی، نامساوی‌های زیر را استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a(b+2c)} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times \sqrt[3]{(3a)(b+2c)\times 3} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times \left(\frac{(3a)+(b+2c)+3}{3}\right) \\ \sqrt[3]{b(c+2a)} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times \sqrt[3]{(3b)(c+2a)\times 3} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times \left(\frac{(3b)+(c+2a)+3}{3}\right) \\ \sqrt[3]{c(a+2b)} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times \sqrt[3]{(3c)(a+2b)\times 3} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times \left(\frac{(3c)+(a+2ab+3}{3}\right) \end{cases}$$

از جمع طرفین سه نامساوی بالا داریم:

$$S = \sqrt[3]{a(b+2c)} + \sqrt[3]{b(c+2a)} + \sqrt[3]{c(a+2b)} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times \frac{6(a+b+c)+9}{3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times 9 = 3\sqrt[3]{3}$$

برای $a=b=c=1$ نیز مقدار S برابر $3\sqrt[3]{3}$ خواهد شد.

مثال ۱-۲۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a، b و c به طوری که $a \geq 2$، $b \geq 6$ و $c \geq 12$، بیش‌ترین مقدار ممکن برای $S = \frac{bc\sqrt{a-2} + ca\sqrt[3]{b-6} + ab\sqrt[4]{c-12}}{abc}$ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} bc\sqrt{a-2} = \frac{bc}{\sqrt{2}}\sqrt{(a-2)\times 2} \leq \frac{bc}{\sqrt{2}} \times \frac{(a-2)+2}{2} = \frac{abc}{2\sqrt{2}} \\ ca\sqrt[3]{b-6} = \frac{ca}{\sqrt[3]{9}}\sqrt[3]{(b-6)\times 3\times 3} \leq \frac{ca}{\sqrt[3]{9}} \times \frac{(b-6)+3+3}{3} = \frac{abc}{3\sqrt[3]{9}} \\ ab\sqrt[4]{c-12} = \frac{ab}{\sqrt[4]{64}} \times \sqrt[4]{(c-12)\times 4\times 4\times 4} \leq \frac{ab}{\sqrt[4]{64}} \times \frac{(c-12)+4+4+4}{4} \\ \qquad = \frac{abc}{8\sqrt{2}} \end{cases}$$

با توجه به نامساوی‌های بالا داریم:

$$S \leq \frac{1}{abc} \times \left(\frac{abc}{2\sqrt{2}} + \frac{abc}{3\sqrt[3]{9}} + \frac{abc}{8\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{9}}$$

حال برای این‌که در نامساوی‌های بالا حالت تساوی برقرار شود باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a-2=2 \\ b-6=3 \\ c-12=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=9 \\ c=16 \end{cases}$$

برای اعداد $a=۴$، $b=۹$ و $c=۱۶$ نیز مقدار S برابر $\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۹}}+\frac{۵}{۸\sqrt{۲}}$ می‌شود.

مثال ۱-۲۳ ثابت کنید $S=۱+\sqrt{\frac{۲+۱}{۲}}+\sqrt[۳]{\frac{۳+۱}{۳}}+\cdots+\sqrt[n]{\frac{n+۱}{n}}<n+۱$.

حل:

$$\begin{aligned}\sqrt[k]{\frac{k+۱}{k}}&=\sqrt[k]{\frac{k+۱}{k}\times\underbrace{۱\times۱\times\cdots\times۱}_{k-۱\ \text{مرتبه}}}\leq\frac{\frac{k+۱}{k}+۱+۱+\cdots+۱}{k}\\&=\frac{\frac{k+۱}{k}+(k-۱)}{k}=۱+\frac{۱}{k^۲}\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}S&\leq ۱+(۱+\frac{۱}{۲^۲})+(\frac{۱}{۳^۲})+\cdots+(۱+\frac{۱}{n^۲})\\&=n+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots+\frac{۱}{n^۲}\\&<n+\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\cdots+\frac{۱}{(n-۱)\times n}\\&=n+(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳})+\cdots+(\frac{۱}{n-۱}-\frac{۱}{n})\\&=n+۱-\frac{۱}{n}<n+۱\end{aligned}$$

مثال ۱-۲۴ ثابت کنید $\sqrt[n]{۱+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{۱-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}<۲$.

حل:

$$\begin{cases}\sqrt[n]{۱+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}=\sqrt[n]{(۱+\frac{\sqrt[n]{n}}{n})\times\underbrace{۱\times۱\times\cdots\times۱}_{n-۱\ \text{بار}}}\overset{*}{<}\frac{(۱+\frac{\sqrt[n]{n}}{n})+(n-۱)}{n}\\ \qquad=۱+\frac{\sqrt[n]{n}}{n^۲}\\ \sqrt[n]{۱-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}=\sqrt[n]{(۱-\frac{\sqrt[n]{n}}{n})\times\underbrace{۱\times۱\times\cdots\times۱}_{n-۱\ \text{بار}}}<\frac{(۱-\frac{\sqrt[n]{n}}{n})+(n-۱)}{n}\\ \qquad=۱-\frac{\sqrt[n]{n}}{n^۲}\end{cases}$$

* : نامساوی به صورت اکید می‌باشد زیرا حالت تساوی به وضوح برقرار نیست زیرا $۱ \neq ۱ + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$.
حال با توجه به نامساوی‌های بالا داریم:

$$\sqrt[n]{۱+\frac{\sqrt[۴]{n}}{n}}+\sqrt[n]{۱-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}} < (۱+\frac{\sqrt[n]{n}}{n^۲})+(۱-\frac{\sqrt[n]{n}}{n^۲}) = ۲$$

۳. نکاتی در مورد عبارت‌های دارای درجه‌ی یکسان

درجه‌ی یک عبارت: درجه‌ی عبارت $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ برابر است با $(\alpha+\beta+\gamma)$. حال از روی این تعریف مثال‌هایی برای عبارت‌های درجه ۳ بیان می‌کنیم:

$$a^۳, b^۳, c^۳, a^۲b, b^۲c, c^۲a, \frac{a^۴}{b}, \frac{a^۴}{c}, \frac{c^۴}{a}$$
$$, \frac{a^۴}{a+b}, \frac{a^۵}{(a+b)(a+c)}, \frac{a^۶}{(a^۲+bc)(b+c)}, \dots$$

درجه‌ی یک چندجمله‌ای: بزرگ‌ترین درجه در میان درجات جملات چندجمله‌ای، همان درجه‌ی چندجمله‌ای است. برای روشن شدن موضوع به مثال‌های زیر توجه کنید:

$F(a,b,c)=ab+bc+ac \ \Rightarrow\ ۲ = F$ درجه‌ی

$G(a,b,c)=a^۲b^۲+ab+bc+ac \ \Rightarrow\ ۴ = F$ درجه‌ی

$H(a,b,c)=ab+a^۲b+a^۴bc+c^۲a \ \Rightarrow\ ۶ = F$ درجه‌ی

چندجمله‌ای همگن: چندجمله‌ای است که درجه‌ی همه‌ی عبارت‌های آن برابر باشد مانند $F(a,b,c) = a^۲b+a^۳+abc$.

بررسی یک مشکل: اگر $F(a,b,c)$ و $G(a,b,c)$ چندجمله‌ای‌های همگن و به ترتیب دارای درجات k و k' باشد به طوری که $k \neq k'$، آن وقت اگر دامنه‌ی ما R^+ باشد، نمی‌توان به طور قطع عبارت‌های مانند $F(a,b,c) \geq G(a,b,c)$ و یا برعکس را بیان کرد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱-۲۵ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید $a^{۲۰۰۰}+b^{۲۰۰۰}+c^{۲۰۰۰} \geq a+b+c$.

بررسی: فرض کنید مثال بالا برای هر $a, b, c > ۰$ درست باشد. قرار دهید $a=b=c>۰$ آن وقت باید داشته باشیم

$$۳a^{۲۰۰۰} \geq ۳a \ \Leftrightarrow\ a^{۲۰۰۰} \geq a \qquad (\forall a > ۰)$$

اما این رابطه فقط برای $a \in [۱, +\infty)$ برقرار است و برای $a \in (۰, ۱)$ غلط می‌باشد. پس نتایج زیر به‌دست می‌آیند.

۱. حکم بالا برای هر $a, b, c > ۰$ غلط می‌باشد.

۲. اگر دامنه را به جای $a, b, c > ۰$ قرار دهیم $a, b, c \geq ۱$ آن وقت چون $a^{۲۰۰۰} \geq a$، $b^{۲۰۰۰} \geq b$ و $c^{۲۰۰۰} \geq c$ نتیجه می‌شود $a^{۲۰۰۰} + b^{۲۰۰۰} + c^{۲۰۰۰} \geq a + b + c$.

۳. اگر دامنه را به جای $a, b, c > ۰$ قرار دهیم $a, b, c \in (۰, ۱)$ آن وقت چون $a^{۲۰۰۰} < a$، $b^{۲۰۰۰} < b$ و $c^{۲۰۰۰} < c$. نتیجه می‌شود $a^{۲۰۰۰} + b^{۲۰۰۰} + c^{۲۰۰۰} < a + b + c$.

نتیجه‌ای که از این بحث می‌گیریم این است که اگر $F(a, b, c)$ و $G(a, b, c)$ چندجمله‌ای‌های همگن با درجه‌ی متفاوت باشند برای این‌که بتوانیم رابطه‌ای بین آن‌ها بنویسیم باید دامنه‌ای به غیر از R^+ داشته باشیم. توجه کنید مشکل بالا زمانی اتفاق می‌افتد که دو طرف همگن با درجه‌ی غیریکسان باشند و دامنه نیز $\mathbb{R}^+$ باشد.

حال در ادامه مسائلی را مطرح می‌کنیم که درجه‌ی هر دو طرف نامساوی برابر باشد. ایده‌ی رایجی که در این مسائل استفاده می‌کنیم این است که نامساوی حسابی هندسی را با کمک طرفین نامساوی استفاده می‌کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱-۲۶ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید $\frac{a^۲}{b} + \frac{b^۲}{c} + \frac{c^۲}{a} \geq a + b + c$.

حل: توجه کنید درجه‌ی دو طرف نامساوی با هم برابر است. حال با استفاده از نامساوی حسابی ـ هندسی داریم:

$$\begin{cases} \frac{a^۲}{b} + b \geq ۲\sqrt{\frac{a^۲}{b}.b} = ۲a \\ \frac{b^۲}{c} + c \geq ۲\sqrt{\frac{b^۲}{c}.c} = ۲b \\ \frac{c^۲}{a} + a \geq ۲\sqrt{\frac{c^۲}{a}.a} = ۲c \end{cases}$$

از جمع سه نابرابری بالا داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{a^۲}{b} + \frac{b^۲}{c} + \frac{c^۲}{a} + (a + b + c) \geq ۲(a + b + c) \\ \Rightarrow &\frac{a^۲}{b} + \frac{b^۲}{c} + \frac{c^۲}{a} \geq a + b + c \end{aligned}$$

و با توجه به حالت تساوی نامساوی‌ها به وضوح داریم:

$$\text{حالت تساوی} \Leftrightarrow a = b = c$$

مثال ۱-۲۷ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید $\frac{a^۳}{b^۲} + \frac{b^۳}{c^۲} + \frac{c^۳}{a^۲} \geq a + b + c$.

حل: با استفاده از نامساوی حسابی ـ هندسی داریم:

$$\begin{cases} \frac{a^۳}{b^۲} + b + b \geq ۳\sqrt[۳]{\frac{a^۳}{b^۲}.b.b} = ۳a \\ \frac{b^۳}{c^۲} + c + c \geq ۳\sqrt[۳]{\frac{b^۳}{c^۲}.c.c} = ۳b \\ \frac{c^۳}{a^۲} + a + a \geq ۳\sqrt[۳]{\frac{c^۳}{a^۲}.a.} = ۳c \end{cases}$$

از جمع طرفین نامساوی‌های بالا داریم:

$$\frac{a^۳}{b^۲} + \frac{b^۳}{c^۲} + \frac{c^۳}{a^۲} + ۲(a + b + c) \geq ۳(a + b + c)$$
$$\Rightarrow \frac{a^۳}{b^۲} + \frac{b^۳}{c^۲} + \frac{c^۳}{a^۲} \geq a + b + c$$

در ضمن با توجه به حالت تساوی نامساوی‌ها داریم:

$$\text{حالت تساوی} \Leftrightarrow a = b = c$$

مثال ۱-۲۸ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید: $\frac{a^۳}{b^۲} + \frac{b^۳}{c^۲} + \frac{c^۳}{a^۲} \geq \frac{a^۲}{b} + \frac{b^۲}{c} + \frac{c^۲}{a}$.

حل: **روش اول. لم**: با توجه به دو مثال قبل داریم $\frac{a^۲}{b} + \frac{b^۲}{c} + \frac{c^۲}{a} \geq a + b + c$.

حال به نامساوی‌های حسابی ـ هندسی زیر که ما را سمت چپ نابرابری به سمت راست نابرابری می‌رساند، توجه کنید:

$$\begin{cases} \frac{a^۳}{b^۲} + a \geq ۲\sqrt{\frac{a^۳}{b^۲}.a} = ۲\frac{a^۲}{b} \\ \frac{b^۳}{c^۲} + b \geq ۲\sqrt{\frac{b^۳}{c^۲}.b} = ۲\frac{b^۲}{c} \\ \frac{c^۳}{a^۲} + c \geq ۲\sqrt{\frac{c^۳}{a^۲}.c} = ۲\frac{c^۲}{a} \end{cases}$$

از جمع طرفین نامساوی‌های بالا داریم:

$$\frac{a^۳}{b^۲}+\frac{b^۳}{c^۲}+\frac{c^۳}{a^۲}+(a+b+c)\geq ۲(\frac{a^۲}{b}+\frac{b^۲}{c}+\frac{c^۲}{a})$$
$$\overset{\text{لم}}{\Rightarrow}\frac{a^۳}{b^۲}+\frac{b^۳}{c^۲}+\frac{c^۳}{a^۲}\geq\frac{a^۲}{b}+\frac{b^۲}{c}+\frac{c^۲}{a}$$

در ضمن با توجه به حالت تساوی نامساوی‌های بالا داریم:

$$\text{حالت تساوی}\ \Leftrightarrow\ a=b=c$$

روش دوم. لم: $x^۳+y^۳\geq xy(x+y)\quad(\forall x,y>۰)$

اثبات اول لم:

$$\begin{cases}x^۳+x^۳+y^۳\geq ۳\sqrt[۳]{x^۳\cdot x^۳\cdot y^۳}=۳x^۲y\\ y^۳+y^۳+x^۳\geq ۳\sqrt[۳]{y^۳\cdot y^۳\cdot x^۳}=۳y^۲x\end{cases}$$
$$\Rightarrow ۳(x^۳+y^۳)\geq ۳(x^۲y+xy^۲)\ \Rightarrow\ x^۳+y^۳\geq xy(x+y)$$

اثبات دوم لم:

$$x^۳+y^۳=(x+y)(x^۲+y^۲-xy)\geq(x+y)(۲xy-xy)=xy(x+y)$$

حال به اثبات سؤال می‌پردازیم:

$$\begin{cases}\frac{a^۳}{b}+b=\frac{a^۳+b^۳}{b^۲}\geq\frac{ab(a+b)}{b^۲}=\frac{a^۲}{b}+a\\ \frac{b^۳}{c^۲}+c=\frac{b^۳+c^۳}{c^۲}\geq\frac{bc(b+c)}{c^۲}=\frac{b^۲}{c}+b\\ \frac{c^۳}{a^۲}+a=\frac{c^۳+a^۳}{a^۲}\geq\frac{ca(c+a)}{a^۲}=\frac{c^۲}{a}+c\end{cases}$$

از جمع طرفین سه نامساوی بالا داریم:

$$\frac{a^۳}{b^۲}+\frac{b^۳}{c^۲}+\frac{c^۳}{a^۲}+(a+b+c)\geq\frac{a^۲}{b}+\frac{b^۲}{c}+\frac{c^۲}{a}+(a+b+c)$$
$$\Rightarrow\frac{a^۳}{b^۲}+\frac{b^۳}{c^۲}+\frac{c^۳}{a^۲}\geq\frac{a^۲}{b}+\frac{b^۲}{c}+\frac{c^۲}{a}$$

مثال ۱-۲۹ برای اعداد حقیقی و مثبت a,b,c ثابت کنید: $\frac{a^۳}{bc}+\frac{b^۳}{ca}+\frac{c^۳}{ab}\geq a+b+c$.

حل: توجه کنید که درجه‌ی هر دو طرف نامساوی برابر ۱ می‌باشد.

حال با استفاده از نامساوی حسابی ـ هندسی سعی می‌کنیم از سمت چپ نامساوی به سمت راست آن برسیم:

$$\begin{cases} \frac{a^۳}{bc}+b+c \geq ۳\sqrt[۳]{\frac{a^۳}{bc}.b.c}=۳a \\ \frac{b^۳}{ca}+c+a \geq ۳\sqrt[۳]{\frac{b^۳}{ca}.c.a}=۳b \\ \frac{c^۳}{ab}+a+b \geq ۳\sqrt[۳]{\frac{c^۳}{ab}.a.b}=۳c \end{cases}$$

با جمع طرفین نامساوی‌های بالا داریم:

$$\frac{a^۳}{bc}+\frac{b^۳}{ca}+\frac{c^۳}{ab}+۲(a+b+c) \geq ۳(a+b+c)$$
$$\Rightarrow \frac{a^۳}{bc}+\frac{b^۳}{ca}+\frac{c^۳}{ab} \geq a+b+c$$

با توجه به حالت تساوی نامساوی‌های بالا داریم:

$$\text{حالت تساوی} \Leftrightarrow a=b=c$$

مثال ۱-۳۰ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید: $\frac{a^۳}{b}+\frac{b^۳}{c}+\frac{c^۳}{a} \geq ab+bc+ca$.

حل: در این اثبات به نحوه استفاده از طرفین نامساوی دقت کنید:

$$\begin{cases} \frac{a^۳}{b}+\frac{b^۳}{c}+bc \geq ۳\sqrt[۳]{\frac{a^۳}{b}.\frac{b^۳}{c}.bc}=۳ab \\ \frac{b^۳}{c}+\frac{c^۳}{a}+bc \geq ۳\sqrt[۳]{\frac{b^۳}{c}.\frac{c^۳}{a}.ac}=۳bc \\ \frac{c^۳}{a}+\frac{a^۳}{b}+ab \geq ۳\sqrt[۳]{\frac{c^۳}{a}.\frac{a^۳}{b}.ab}=۳ca \end{cases}$$

با جمع طرفین نامساوی‌های بالا داریم:

$$۲\left(\frac{a^۳}{b}+\frac{b^۳}{c}+\frac{c^۳}{a}\right)+(ab+bc+ca) \geq ۳(ab+bc+ca)$$
$$\Rightarrow \frac{a^۳}{b}+\frac{b^۳}{c}+\frac{c^۳}{a} \geq ab+bc+ca$$

در ضمن با توجه به حالت تساوی نامساوی‌های بالا داریم:

$$\text{حالت تساوی} \Leftrightarrow a = b = c$$

مثال ۱-۳۱ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید: $\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3} \geq \frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}$.

حل: با توجه به این‌که عبارت‌های هر دو طرف از درجه ۲ هستند، می‌توانیم برای نامساوی حسابی ـ هندسی از عبارت‌های درجه‌ی ۲ دیگر نیز استفاده کنیم زیرا خروجی نامساوی همچنان عبارتی از نوع درجه ۲ باقی خواهد ماند.

$$\begin{cases} \frac{a^5}{b^3}+\frac{a^5}{b^3}+\frac{a^5}{b^3}+\frac{a^5}{b^3}+b^2 \geq 5\sqrt[5]{(\frac{a^5}{b^3})^4 \cdot b^2} = 5\frac{a^4}{b^2} \\ \frac{b^5}{c^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{b^5}{c^3}+c^2 \geq 5\sqrt[5]{(\frac{b^5}{c^3})^4 \cdot c^2} = 5\frac{b^4}{c^2} \\ \frac{c^5}{a^3}+\frac{c^5}{a^3}+\frac{c^5}{a^3}+\frac{c^5}{a^3}+a^2 \geq 5\sqrt[5]{(\frac{c^5}{a^3})^4 \cdot a^2} = 5\frac{c^4}{a^2} \end{cases}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2} \geq a^2+b^2+c^2$$

$$\begin{cases} \frac{a^4}{b^2}+b^2 \geq 2\sqrt{\frac{a^4}{b^2}.b^2} = 2a^2 \\ \frac{b^4}{c^2}+c^2 \geq 2\sqrt{\frac{b^4}{c^2}.c^2} = 2b^2 \\ \frac{c^4}{a^2}+a^2 \geq 2\sqrt{\frac{c^4}{a^2}.c^2} = 2c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}+(a^2+b^2+c^2) \geq 2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow \frac{a^4}{b^2}+\frac{42}{c^2}+\frac{c^4}{a^2} \geq a^2+b^2+c^2$$

حال با توجه به حالات تساوی نامساوی‌های بالا نتیجه می‌گیریم برای حالت تساوی باید $a = b = c$ شود در ضمن اگر $a = b = c$ شود، حالت تساوی نیز برقرار خواهد شد. بنابراین

$$\text{حالت تساوی} \Leftrightarrow a = b = c$$