

آشنایی با مبانی ریاضیات

سخنی با دبیر

از آنجا که مخاطبین این کتاب دانش‌آموزان ممتاز رشته‌ی ریاضی هستند در فصل اول همانند سه فصل دیگر پا را فراتر از کتاب درسی گذاشته و مباحث را مبسوط‌تر توضیح داده‌ایم، مخصوصاً:

- در معرفی سورها، سورصغر نیز معرفی شده است تا برای دانش‌آموزان تیزهوش پیدا کردن تقیض سورها دامنهی وسیع‌تری داشته باشد.
- معماهای گوناگونی از منطق ریاضی ارائه شده است تا کاربرد منطق را دانش‌آموزان لمس کنند.
- در فصل مجموعه‌ها علاوه بر این که به نمودار ون بها داه شده است ورود خوبی به جبر مجموعه‌ها شده است. درست است که مطلوب کتاب جبر مجموعه‌ها نیست ولی اگر قرار باشد از سیاست کتاب درسی که برای عموم دانش‌آموزان نوشته شده است تبعیت کنیم آن‌گاه دانش‌آموزان تیزهوش لذتی از درس نخواهند برد.
- در نظام قبلی هم در درس جبر و احتمال توجه ویژه‌ای به «افراز» نشده بود و فقط معرفی و سپس ارتباط آن با روابط هم‌ارزی ذکر شده بود ولی در کنکور سراسری شمارش تعداد افرازاها با شرایط گوناگون چندین نوبت مورد پرسش قرار گرفته بود که بسیار فراتر از کتاب درسی بود، بنابراین هم به خاطر گره زدن افراز با مبحث شمارش و هم به خاطر رعایت جوانب احتیاط که شاید باز در کنکور سراسری به شمارش تعداد افرازاها بها داده شود، ما هم به این شمارش بها داده‌ایم.

سخنی با دانش‌آموز

در ۱۰ سال گذشته مقدماتی از ریاضیات را فراگرفتید ولی واقعیت این است که تا منطق ریاضی را به خوبی یاد نگیرید در درک مفاهیم عمیق ریاضی به مشکل برخورد خواهید خورد. کلید حل خیلی از معماهای ریاضی در یادگیری منطق نهفته است، بنابراین تلاش کنید به درس اول از این فصل توجه ویژه داشته باشد. این به آن معنا نیست که دروس دیگر اهمیت ندارند، بلکه آن دو درس نیز در جای خود قابل توجه است ولی چون آن دو مورد مجموعه‌هاست و شما با مبحث مجموعه‌ها در سنوات گذشته آشنا بوده‌اید توضیح اضافی‌ای در مورد آن بحث به ذهن نمی‌رسد.

از منطق ریاضی می‌توان به عنوان دستور زبان ریاضی یاد نمود. در منطق ریاضی گزاره‌ها با هم ترکیب شده و گزاره‌هایی جدید پدید می‌آورند که با توجه به درستی و یا نادرستی گزاره‌های اولیه، درستی گزاره‌ی پدید آمده بررسی می‌شود. با توجه به توضیحات فوق به نظر می‌رسد ابتدا باید گزاره را بیش‌تر شناخت.



گزاره. همان‌طور که در هندسه‌ی سال دهم بیان شد گزاره جمله‌ای است خبری که دقیقاً درست است و یا نادرست (گرچه ممکن است درست یا نادرست بودن آن برای ما مشخص نباشد).

به جملات خبری زیر دقت کنید:

● عدد ۱۱ از عدد ۴ بزرگ‌تر است.

● عدد ۳۵ عددی زوج است.

● در روستای خاکی از توابع شهرستان سراب لوله‌کشی گاز وجود دارد.

هر سه جمله‌ی فوق گزاره هستند که ارزش درستی آن‌ها به ترتیب «درست»، «نادرست» و «نامعلوم» است. البته گزاره‌ی سوم بالاخره دقیقاً ارزش درستی دارد و یا نادرست بنابراین از حالت گزاره بودن خارج نمی‌شود. همچنین جملات احساسی، امری و پرسشی گزاره محسوب نمی‌شوند. هیچ‌یک از عبارات «عجب آدم خوش‌اخلاقی!»، «لطفاً یقه‌ی پیراهنتان را درست کنید» و «نمره‌ی فیزیکتان چند شده است؟» گزاره نمی‌باشند.

با این حساب معلوم می‌شود که هر گزاره‌ای یا ارزش درست دارد یا نادرست که ارزش درست را با «د» یا «T» نمایش می‌دهند و ارزش نادرست را با «ن» یا «F».

یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد، یعنی گزاره فقط یک ارزش دارد. برای مثال گزاره‌ی «هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت» در ریاضیات یک حدس است که به آن حدس گلدباخ گویند. (در ریاضیات به مسائل حل نشده‌ای که تا به حال کسی نتوانسته آن را حل کند حدس گفته می‌شود). حدس گلدباخ را تا به حال کسی نتوانسته است اثبات کند و نیز تا به حال برای رد درستی آن گزاره نیز کسی نتوانسته مثال نقض بیاورد. حدس گلدباخ یک گزاره است و فقط یک ارزش دارد که شاید در آینده‌ای نه چندان دور روشن شود.

از دیگر حدس‌های ریاضیات می‌توان به حدس لژاندر، حدس کولاتز و... اشاره کرد.

جدول ارزش گزاره‌ها

معمولاً گزاره را با حروفی مانند p, q, r و ... نشان می‌دهند. بنابراین اگر گزاره‌ای مانند p مورد بحث باشد می‌توان جدول درستی آن را به صورت مقابل نشان داد: همچنین اگر تعداد گزاره‌های مورد بحث دو گزاره‌ی p و q باشند و یا سه گزاره مانند p, q, r آن‌گاه جدول ارزش آن‌ها به ترتیب به صورت‌های زیر خواهد بود:

جدول ارزش درستی سه گزاره

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

جدول ارزش درستی یک گزاره

p
د
ن

جدول ارزش درستی دو گزاره

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن



اگر تعداد گزاره‌های مورد بحث n باشد با علم به این که هر گزاره دو حالت دارد «درست» یا «نادرست» با توجه به اصل ضرب معلوم می‌شود که تعداد سطرهای جدول ارزش درستی آن n گزاره 2^n سطر خواهد بود.

گزاره‌نما

به هر یک از عبارات زیر توجه کنید:

- a عددی اول است.
- حاصل عبارت $x^2 + 3x - 1$ برابر ۳۹ است.
- در خانواده‌ای چهار فرزندی احتمال آن که پشامد A رخ دهد $\frac{15}{16}$ است.
- حاصل $f(x)$ در تابع $f(x) = 3^x + 2$ برابر ۵ است.
- حاصل عبارت $x^2 + y^2$ برابر ۱۳ است.

هیچ یک از عبارات فوق گزاره نیستند چون هیچ یک از آن‌ها ارزش درستی و یا نادرستی‌شان معلوم نیست و بستگی به این که به جای متغیر یا متغیرهای به کار رفته در هر یک از آن‌ها چه چیزی به کار رود ممکن است گزاره درست و یا غلط باشد. به عنوان مثال گزاره‌ی نخست به ازای $a = 17$ تبدیل به گزاره‌ای می‌شود که ارزش درستی پیدا می‌کند و به ازای $a = 27$ آن عبارت تبدیل به گزاره‌ای نادرست می‌شود.

چنین عباراتی که در هر یک از آن‌ها یک یا چند متغیر به کار رفته است و به ازای بعضی مقدار یا عبارات به جای آن متغیرها عبارت داده شده تبدیل به گزاره‌ای درست می‌شود و به ازای بعضی مقدار یا عبارات دیگر به جای آن متغیرها عبارت داده شده تبدیل به گزاره‌ای نادرست می‌شود را گزاره‌نما می‌گویند.



از بین عبارات زیر گزاره و گزاره‌نما را مشخص کنید:

- (الف) کدام عدد اول، زوج است؟
- (ب) مجموع هر دو عدد اولی، عددی است مرکب.
- (ج) عدد 5243 در تقسیم بر ۱۱ باقی‌مانده‌ی ۴ دارد.
- (د) رقم یکان عدد توان‌دار 5243^k برابر k است.
- (ه) ایران شهرهای زیبایی دارد.
- (و) مجموع دو عدد طبیعی x و y برابر ۳ است.
- (ز) حاصل $7!$ برابر $6! \times m$ است.
- (ح) در پرتاب دو تاس با یکدیگر احتمال آن که حداقل یکی از تاس‌ها ۲ باشد $\frac{1}{6}$ است.
- (ط) آلودگی هوا حال آدم را به هم می‌زند.
- (ی) مجموع مربع سینوس زاویه‌ی x با مربع کسینوس همان زاویه برابر ۱ است.
- (الف) نه گزاره است و نه گزاره‌نما.
- (ب) گزاره‌ای است با ارزش «نادرست».
- (ج) گزاره‌ای است با ارزش «نادرست» که علت نادرستی آن را در سال بعد متوجه خواهید شد.
- (د) گزاره‌نماست که متغیرش k بوده و به ازای $k = 8$ تبدیل به گزاره‌ای درست می‌شود.
- (ه) نه گزاره است و نه گزاره‌نما.
- (و) گزاره‌نمایی است که به ازای « $x = 1$ و $y = 2$ » یا « $x = 2$ و $y = 1$ » تبدیل به گزاره‌ای درست می‌شود.
- (ز) گزاره‌نمایی است که به ازای $m = 7$ تبدیل به گزاره‌ای درست می‌شود.
- (ح) گزاره‌ای است با ارزش «نادرست».
- (ط) نه گزاره است و نه گزاره‌نما.
- (ی) عبارت داده شده گزاره‌ای است که همیشه درست بوده و ارزشش مشخص است. البته می‌توان آن را گزاره‌نما نیز گرفت که به ازای تمام زاویه‌ها برای x آن گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای درست می‌شود.

حل.



دامنه و مجموعه جواب

به گزاره‌نمایی مانند گزاره‌نمای اشاره شده در قسمت «د» از مثال قبل توجه کنید. معلوم است که رقم یکان هر عددی از جمله عدد داده شده یکی از ارقام دهگانه‌ی ۰، ۱، ۲، ...، ۹ است، بنابراین مجموعه‌ی $D = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ را که مجموعه‌ی تمام رقم یکان‌هاست دامنه‌ی متغیر برای آن گزاره‌نماست. البته باید توجه کنید که دامنه‌ی متغیر برای یک گزاره‌نما با دیدگاه‌های متفاوت ممکن است گوناگون باشد. به استدلال‌های زیر دقت کنید:

● پویا: رقم یکان هر عددی از جمله عدد 52^{43} یکی از ارقام ۰، ۱، ۲، ...، ۹ است بنابراین: $D_1 = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

● امین: عدد 52^{43} مضرب 10^n نیست بنابراین رقم یکان آن 0 نبوده و داریم: $D_2 = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

● محمد: عدد 52^{43} عددی است زوج بنابراین رقم یکان آن فرد نیست و: $D_3 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید D_1, D_2, D_3 و ... همگی می‌توانند دامنه‌ی متغیر گزاره‌نمای داده شده باشند و همگی آن‌ها یک ویژگی مشترک دارند و آن این‌که مقادیر و یا عباراتی که گزاره‌نما را به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌کنند حتماً در درون آن دامنه‌ی متغیر قرار دارند که این مطلب را در حالت کلی در قالب نکته‌ی ۲ بیان خواهیم کرد.

مجموعه‌ی جواب یک گزاره‌نما نیز مجموعه‌ی مقادیر یا عباراتی است که به جای متغیر و یا متغیرها در گزاره‌نما قرار گیرند تا آن گزاره‌نما را به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل کنند به عنوان مثال مجموعه‌ی جواب گزاره‌نمای «حاصل عبارت $(x-1)(x-2)(x-6)$ برابر 0 است» مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 6\}$ است.

نکته ۲

همان‌طور که مشاهده کردید دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب یک گزاره‌نما را معمولاً به ترتیب D و S نمایش می‌دهند و رابطه‌ی $S \subseteq D$ همیشه برقرار است.

مثال ۲

دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب هر یک از گزاره‌نماهای موجود در مثال ۱ را بنویسید.

$$D = \{0, 1, 2, \dots, 9\} \quad S = \{8\} \quad (د)$$

$$D = \{(x, y) | x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\} \quad S = \{(1, 2), (2, 1)\} \quad (و)$$

$$D = \mathbb{N} \quad S = \{7\} \quad (ز)$$

$$D = \text{مجموعه‌ی تمام زوایا} \quad S = D \quad (ی)$$

حل.

ت ترکیب گزاره‌ها

قرار است دو یا چند گزاره را با ادات ربطی مانند «و»، «یا»، «اگر ... آنگاه ...»، «... اگر و تنها اگر ...» و ... به یکدیگر ربط داده و گزاره‌های مرکبی را درست کنیم که ارزش درستی هر یک از این گزاره‌های مرکب وابسته به ارزش درستی گزاره‌های تشکیل دهنده‌ی آن‌ها متحصراً به فرد به دست خواهد آمد.

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره‌ای مانند p گزاره‌ای است که ارزش آن کاملاً برعکس ارزش درستی p باشد و آن را با $\sim p$ نمایش می‌دهند. به عنوان مثال نقیض گزاره‌ی «روستای خاکی از توابع شهرستان سراب است» به صورت «چنین نیست که روستای خاکی از توابع شهرستان سراب باشد» یا «روستای خاکی از توابع شهرستان سراب نیست» می‌شود که قطعاً یکی از آن دو گزاره ارزش درست و دیگری ارزش نادرست دارد.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

جدول درستی ارزش گزاره‌های p و $\sim p$ در یک جدول به صورت جدول روبه‌رو می‌شود:



جدول ارزش درستی $(\sim p)$ را کشیده و آن را با p مقایسه کنید.

جدول ارزش درستی p و $(\sim p)$ به ترتیب در ستون‌های اول و سوم جدول مقابل نمایان شده‌اند.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

همان‌طور که مشخص است آن دو گزاره یعنی p و $(\sim p)$ کاملاً مشابه هم هستند که در این حالت گویند دو گزاره‌ی p و $(\sim p)$ هم‌ارز هستند و به صورت $(\sim p) \equiv p$ نمایش می‌دهند.

ترکیب عطفی دو گزاره

اگر دو گزاره‌ی p و q با لفظ «و» ترکیب شوند آن‌گاه ترکیب آن دو گزاره را ترکیب عطفی گویند و آن را به صورت « $p \wedge q$ » نمایش می‌دهند. ارزش گزاره‌ی حاصل از ترکیب عطفی دو گزاره‌ی p و q یعنی $p \wedge q$ وقتی درست است که هر دو گزاره‌ی p و q ارزش درستی داشته باشند. به عنوان مثال ترکیب جملات زیر را در نظر بگیرید:

- I. «هر مثلث سه ضلع دارد» و «شیراز مرکز استان فارس است»
- II. «هر مثلث سه ضلع دارد» و «تبریز مرکز استان فارس است»
- III. «هر مثلث چهار ضلع دارد» و «شیراز مرکز استان فارس است»
- IV. «هر مثلث چهار ضلع دارد» و «تبریز مرکز استان فارس است»

در ۴ ترکیب فوق، در ترکیب اول هر دو جمله ارزش درستی داشته و جمله‌ی حاصل از ترکیب آن دو گزاره نیز ارزش درستی دارد. در ترکیب دوم جمله‌ی اول ارزش درست و جمله‌ی دوم ارزش نادرستی داشته و ارزش جمله‌ی حاصل از ترکیب آن دو جمله نادرست است. در ترکیب سوم جمله‌ی اول ارزش نادرست و جمله‌ی دوم ارزش درستی داشته و ارزش جمله‌ی حاصل از ترکیب آن دو جمله، نادرست است. و بالاخره این‌که در ترکیب چهارم هر دو جمله ارزش نادرست داشته و ارزش جمله‌ی حاصل از ترکیب آن دو جمله، نادرست است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

جدول ارزش درستی ترکیب عطفی دو گزاره‌ی p و q به صورت جدول مقابل است:

جمله‌ی همیشه درست را با T و جمله‌ی همیشه غلط را با F نشان می‌دهند، بنابراین با توجه به تعریف ترکیب عطفی دو گزاره خواهیم داشت:

$$p \wedge F \equiv F, \quad p \wedge T \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p, \quad p \wedge \sim p \equiv F$$

ترکیب فصلی دو گزاره

اگر دو گزاره‌ی p و q با لفظ «یا» ترکیب شوند آن‌گاه ترکیب آن دو گزاره را ترکیب فصلی گویند و آن را به صورت « $p \vee q$ » نمایش می‌دهند. ارزش گزاره‌ی حاصل از ترکیب فصلی دو گزاره‌ی p و q یعنی $p \vee q$ وقتی درست است که حداقل یکی از دو گزاره‌ی p و q درست باشند. به عنوان مثال اگر در جملات چهارگانه از مثال ترکیب عطفی، به جای لفظ «و» از لفظ «یا» استفاده کنیم آن‌گاه ارزش هر یک از جملات حاصل از ترکیب سه‌گانه نخست «درست» و ارزش گزاره‌ی حاصل از چهارمین ترکیب «نادرست» است، بنابراین

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

جدول ترکیب فصلی دو گزاره‌ی p و q به صورت مقابل است:

با توجه به تعریف ترکیب فصلی دو گزاره هم‌ارزی‌های زیر نتیجه می‌شوند:

$$p \vee T \equiv T, \quad p \vee F \equiv p, \quad p \vee p \equiv p, \quad p \vee \sim p \equiv T$$

باید توجه داشت که در زبان فارسی بعضی اوقات «یا» معنای متفاوتی دارد. مثلاً منظور از جمله‌ی «محمد امروز به مدرسه یا پارک می‌رود» آن است که محمد دقیقاً یکی از آن دو کار را انجام می‌دهد و هر دو را نمی‌تواند انجام دهد که به آن **بای مانع جمع** گویند و با بای منطقی فرق دارد.

خواص ترکیب‌های عطفی و فصلی

۱. **جابه‌جایی.** هر دو ترکیب مورد نظر دارای خاصیت جابه‌جایی می‌باشند، یعنی:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \quad , \quad p \vee q \equiv q \vee p$$

۲. **شرکت‌پذیری.** هر دو ترکیب عطفی و فصلی دارای خاصیت شرکت‌پذیری نیز هستند، یعنی:

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad , \quad p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

۳. **پخششی.** عمل \vee بر روی \wedge و نیز عمل \wedge بر روی \vee دارای خاصیت پخششی است، یعنی:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad , \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

برای اثبات روابط فوق می‌توان از جدول درستی ارزش گزاره‌ها استفاده نمود. به عنوان مثال جدول مربوط به خاصیت پخششی عمل \wedge بر روی عمل \vee به شکل زیر است:

p	q	r	(q ∨ r)	p ∧ (q ∨ r)	(p ∧ q)	(p ∧ r)	(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود در تمامی حالات هشت‌گانه‌ی ممکن ارزش $p \wedge (q \vee r)$ با ارزش $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ یکسان است.

۴. **قانون دمرگان.** روابط دمرگان معروف هستند به سادگی از روی جدول قابل اثبات هستند:

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad , \quad \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

۵. **قانون جذب.** روابط زیر نیز که به قوانین جذب معروف هستند برقرارند:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad , \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

که مورد دوم را ثابت می‌کنیم:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge T) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (T \vee q) \equiv p \wedge T \equiv p$$

۶. **قانون شبه جذب.** به روابط زیر قوانین شبه جذب می‌گویند:

$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \quad , \quad p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$

اثبات روابط فوق نیز به سادگی انجام می‌شود.



مثال ۴

با استفاده از نمادهای \wedge و \vee جواب هر یک از معادلات زیر را بنویسید:

$$(x - 4)(y - 8) = 0 \quad (\text{ب}) \qquad (x - 4)^2 + (y - 8)^4 = 0 \quad (\text{الف})$$

حل. (الف) وقتی مجموع دو عبارت نامنفی برابر ۰ شده است باید هر دو صفر باشند، پس:

$$[(x - 4)^2 = 0] \wedge [(y - 8)^4 = 0] \Rightarrow [x = 4] \wedge [y = 8]$$

(ب) وقتی حاصل ضرب دو عبارت ۰ شده است آن‌گاه حداقل یکی از آن دو عبارت صفر است، پس:

$$[(x - 4) = 0] \vee [(y - 8) = 0] \Rightarrow [x = 4] \vee [y = 8]$$

یعنی معادله‌ی فوق بی‌شمار جواب دارد به این صورت که $x = 4$ و y هر عدد دلخواهی و یا $y = 8$ و x هر عدد دلخواهی.

ترکیب شرطی

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

اگر دو گزاره‌ی p و q به صورت «اگر p آنگاه q » با هم ترکیب شده باشند آنگاه ترکیب آن دو گزاره را شرطی گویند و آن را به صورت $p \Rightarrow q$ نمایش می‌دهند. p را مقدم و q را پیرو یا تالی گویند. همچنین p را فرض و q را حکم نیز می‌نامند. ارزش $p \Rightarrow q$ فقط وقتی نادرست است که گزاره‌ی p درست و گزاره‌ی q نادرست باشد. پس جدول درستی ارزش $p \Rightarrow q$ با توجه به درستی p و q به صورت مقابل است:

نکته ۳

اگر در یک گزاره‌ی شرطی مقدم ارزش نادرستی داشته باشد بدون توجه به ارزش درستی تالی، نتیجه می‌گیریم که ارزش $p \Rightarrow q$ درست است و در این صورت می‌گوییم «جمله به اثنای مقدم درست است». همچنین اگر تالی ارزش درستی داشته باشد بدون توجه به ارزش مقدم می‌فهمیم که ارزش $p \Rightarrow q$ درست است.

گزاره‌ی مرکب $p \Rightarrow q$ را به صورت‌های:

- p شرط کافی برای q است.
 - q شرط لازم برای p است.
- نیز می‌خوانند، بنابراین:

نکته ۴

در گزاره‌های شرطی، همیشه فرض برای حکم کافی است و حکم برای فرض لازم.

به عنوان مثال می‌دانیم اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد آنگاه قطرهای آن با یکدیگر برابرند که می‌توان آن گزاره‌ی شرطی را به صورت زیر نیز بیان کرد:

- مستطیل بودن یک چهارضلعی شرط کافی برای آن است که قطرهایش برابر باشند.
 - برابر بودن اقطار یک چهارضلعی شرط لازم برای مستطیل بودن آن است.
- با توجه به تعریف ترکیب شرطی دو گزاره‌ی p و q معلوم می‌شود که همه‌ی هم‌ارزی‌های زیر برقرارند:

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow p \equiv T & p \Rightarrow \sim p \equiv \sim p \\ p \Rightarrow T \equiv T & T \Rightarrow p \equiv p \\ F \Rightarrow p \equiv T & p \Rightarrow F \equiv \sim p \\ T \Rightarrow T \equiv T & F \Rightarrow F \equiv T \end{array}$$



مثال ۵

هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ثابت کنید:

- (الف) $(p \Rightarrow q) \equiv (q \vee \sim p)$
 (ب) $(q \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q) \equiv (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$

حل:

(الف)

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$q \vee \sim p$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

(ب)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$q \vee \sim p$	$p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	سمت چپ	سمت راست
د	د	ن	ن	د	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د	ن	ن	د	د	د

همان‌طور که در مثال قبل دیدید عبارت $p \Rightarrow q$ (پا عبارت $q \vee \sim p$ هم‌ارز است و می‌توان آن را جایگزین کرد.

عبارت $\sim q \Rightarrow \sim p$ که عکس نقیض $p \Rightarrow q$ نامیده می‌شود یا آن هم‌ارز است و می‌توان آن را جایگزین کرد.

حال که با ترکیب شرطی آشنا شدید لازم است با خواص زیر که به قوانین ادخال فاصل و حذف عاطف هستند آشنا شوید:

- قانون ادخال فاصل $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$
- قانون حذف عاطف $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

اثبات هر یک از هم‌ارزی‌های فوق با استفاده از ترسیم جدول به سادگی امکان‌پذیر است.

با استفاده از نکته‌ی ۶ ثابت کنید اگر مربع عددی طبیعی، فرد باشد آن‌گاه خود آن عدد نیز فرد است.

مثال ۶

حل:

$$[(a^2 = \text{زوج}) \Rightarrow (a^2 = \text{فرد})] \equiv [(a = \text{زوج}) \Rightarrow (a = \text{فرد})]$$

همان‌طور که دیده می‌شود اثبات گزاره‌ی سمت راست که عکس نقیض گزاره‌ی سمت چپ است ساده‌تر می‌باشد:

$$a = 2k \Rightarrow a^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2 = 2q = \text{زوج}$$

با استفاده از نکته‌ی ۶ ثابت کنید اگر مکعب عددی مضرب ۷ نباشد آن‌گاه خود آن عدد نیز مضرب ۷ نخواهد بود.

مثال ۷

حل:

$$[(a^3 \neq 7k) \Rightarrow (a \neq 7k)] \equiv [(a = 7k) \Rightarrow (a^3 = 7k)]$$

اثبات گزاره‌ی سمت راست به سادگی انجام‌پذیر است.



ترکیب دوشرطی

هرگاه p و q دو گزاره باشند آن‌گاه $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را ترکیب دو شرطی نامیده و آن را به صورت $p \Leftrightarrow q$ نشان می‌دهند و آن را به یکی از صورت‌های زیر می‌خوانند:

- اگر p آن‌گاه q و برعکس.
- p شرط لازم و کافی است برای q .
- p اگر و تنها اگر q .

به عنوان مثال در هندسه‌ی سال گذشته متوجه شدید که از متوازی‌الاضلاع بودن یک چهارضلعی (گزاره‌ی p) می‌توان نتیجه گرفت که قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند (گزاره‌ی q) و برعکس. بنابراین می‌توان نوشت:

(قطرهای $ABCD$ همدیگر را نصف می‌کنند) \Leftrightarrow (چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است)

و آن را به یکی از مدل‌های زیر می‌خوانیم:

- در متوازی‌الاضلاع قطرهای همدیگر را نصف می‌کنند و برعکس.
- شرط لازم و کافی برای آن‌که یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد آن است که قطرهایش یکدیگر را نصف کنند.
- یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش یکدیگر را نصف کنند.

جدول ارزش درستی گزاره‌های مربوط به $p \Leftrightarrow q$ را رسم کنید.



p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د



نکته ۷

ارزش ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ درست است هرگاه یا هر دو گزاره‌ی p و q ارزش درستی داشته باشند و یا هر دوی آن‌ها ارزش نادرست.

به سادگی ثابت می‌شود که $p \Leftrightarrow q$ با هر دو گزاره‌ی $q \Leftrightarrow \sim p$ و $\sim p \Leftrightarrow q$ هم ارز است.

سورهای سه‌گانه

سورهای سه‌گانه علائمی ریاضی هستند که در صورت لزوم در نوشتن جملاتی به صورت ریاضی به کار می‌روند. سورها می‌توانند قبل از گزاره‌نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند. به عنوان مثال « $5x + 1$ مربع کامل است» یک گزاره‌نما است ولی «وجود دارد عدد صحیحی مانند x به طوری که به ازای آن حاصل $5x + 1$ مربع کامل باشد» گزاره است.

(الف) سور عمومی وقتی که تمام اعضاء یک مجموعه دارای خاصیت مشخصی باشند، آن‌گاه برای نشان دادن آن از این سور استفاده می‌کنند که علامت آن \forall می‌باشد. به عنوان مثال معادل جمله‌ی «مربع هر عدد طبیعی، خود عددی است طبیعی» به صورت زیر است:

$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad a^2 \in \mathbb{N}$$

(ب) سور وجودی وقتی که بعضی از اعضاء مجموعه‌ای دارای خاصیت مشخصی باشند، آن‌گاه برای نشان دادن آن، از این سور استفاده می‌کنند که علامت آن \exists است. به عنوان مثال معادل جمله‌ی «بعضی از اعداد طبیعی مضرب صحیحی از ۳ هستند» به صورت زیر است:

$$\exists a \in \mathbb{N}, \quad a = 3k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



(ج) سور صفر وقتی که هیچ یک از اعضاء مجموعه‌ای دارای خاصیت مشخصی نباشند، آن‌گاه برای نشان دادن آن از این سور استفاده می‌کنند که علامت آن $\#$ است. به عنوان مثال معادل جمله‌ی «هیچ یک از اعداد گویا متعلق به مجموعه اعداد گنگ نیستند» به صورت زیر است:

$$\#a \in \mathbb{Q} \quad , \quad a \in \mathbb{Q}'$$

● گزاره‌نمایی که با سور عمومی همراه شود وقتی به یک گزاره‌ی درست تبدیل می‌شود که هر عضوی از دامنه‌ی متغیر در گزاره‌نما صدق کند به عبارتی دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

● گزاره‌نمایی که با سور وجودی همراه شود وقتی به یک گزاره‌ی درست تبدیل می‌شود که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

ارزش درستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:



- (الف) $\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad x^2 \leq x^4$
 (ب) $\exists a \in \mathbb{O} \quad , \quad (a + 5) \in \mathbb{E}$
 (ج) $\#x \in \mathbb{N} \quad , \quad \frac{x^2}{5} \in \mathbb{N}$
 (د) $\forall x \in \mathbb{N} \quad , \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad , \quad xy = 1$

(در سؤال فوق لازم به یادآوری است که \mathbb{O} نشان‌گر مجموعه اعداد فرد و \mathbb{E} نشان‌گر مجموعه اعداد زوج است.)

حل:

(الف) ترجمه: توان دوم تمام اعداد حقیقی از توان چهارمشان کم‌تر یا مساوی است.

این گزاره ارزش نادرستی دارد چون اعداد بین 0 و 1 چنین ویژگی‌ای را ندارند.

(ب) ترجمه: وجود دارد عددی فرد که وقتی با عدد 5 جمع می‌شود حاصلش زوج شود.

این گزاره ارزش درستی دارد چون تمام اعداد فرد این ویژگی را دارند. بنابراین اگر سور وجودی تبدیل به سور عمومی هم می‌شد ارزش گزاره درست بود.

(ج) ترجمه: عددی طبیعی وجود ندارد که مربعش بر 5 بخش‌پذیر باشد.

این گزاره ارزش نادرستی دارد چون مربع اعداد $5, 10, 15, 20, \dots$ بر 5 بخش‌پذیرند.

(د) ترجمه: برای هر عدد طبیعی، عدد طبیعی‌ای یافت می‌شود که حاصل ضربشان 1 شود.

این گزاره ارزش نادرستی دارد چون برای عدد طبیعی‌ای مانند 2 ، عدد طبیعی y یافت نمی‌شود.

نقیض سورها

مدل کلی جملات ساده و نه ترکیبی به زبان سورها به یکی از سه شکل زیر است:

- (I) $\forall x \quad , \quad P(x)$
 (II) $\exists x \quad , \quad P(x)$
 (III) $\#x \quad , \quad P(x)$

که در هر یک از آن $P(x)$ یک گزاره است. نقیض هر یک از آن‌ها به اشکال زیر است:

- (I) $\sim [\forall x \quad , \quad P(x)] \equiv \exists x \quad , \quad \sim P(x)$
 (II) $\sim [\exists x \quad , \quad P(x)] \equiv \begin{cases} \forall x \quad , \quad \sim P(x) \\ \#x \quad , \quad P(x) \end{cases}$
 (III) $\sim [\#x \quad , \quad P(x)] \equiv \exists x, P(x)$





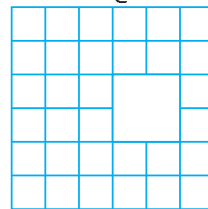
- ۱ کدام یک از جملات زیر گزاره و کدام یک گزاره‌نما هستند؟
 (الف) مکعب هر عدد طبیعی از مربع آن بزرگ‌تر است.
 (ب) هر متوازی‌الاضلاعی یک لوزی است.
 (ج) تعداد اعداد اول دورقمی زیاد است.
 (د) کدام یک از مثلث‌ها، مثلثی متساوی‌الساقین هستند؟
 (ه) چهارضلعی ABCD دوزنقه است.
 (و) مربع عدد a بر ۱۱ بخش پذیر است.
 (ز) آب‌وهوای استان کردستان آب‌وهوایی لطیف و دلپذیر است.
 (ح) ورزشگاه وی‌سنته کالدرون ۷۴۹۵۰ نفرگنجایش تماشاچی دارد.
 (ط) عدد حقیقی a چنان است که:

$$(a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4$$

(ی) عدد حقیقی a چنان است که:

$$(a + 2)^2 = a^2 + 3a + 1$$

- ۲ در جاهای خالی عدد یا عبارتی چنان قرار دهید تا گزاره‌های حاصل ارزش درستی داشته باشند:
 (الف) عدد $\square + 81$ عددی اول است.
 (ب) ملیت ابوعلی سینا \square بوده است.
 (ج) گزاره جمله‌ای \square است.
 (د) عدد ۲۴۰ به تعداد \square مقسوم‌علیه مثبت دارد.
 (ه) مجموع زوایای داخلی یک \square ضلعی محدب برابر 180° درجه است.
 (و) مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۲۲ برابر \square است.
 (ز) در شکل زیر به تعداد \square مربع در سازه‌های مختلف وجود دارد.



(ح) حاصل $f(2)$ در تابع $f(x) = \frac{x^y - 2}{x^2 + 5}$ برابر \square است.

- ۳ مجموعه جواب هر یک از گزاره‌نماهای زیر را مشخص کنید:
 (الف) عدد اولی است دورقمی به طوری که $a + 2$ مربع کامل است.
 (ب) $(a - 3)^2 = a^2 + 4a + 1$
 (ج) a رقم یکان اعداد مربع کامل است.
 (د) تمام مربع کامل‌ها را بر ۲۴ تقسیم کرده‌ایم. S مجموعه‌ی باقی‌مانده‌های حاصل است.

- ۴ نقیض هر یک از عبارات زیر را بنویسید:
 (الف) هر مثلث متساوی‌الاضلاعی، متساوی‌الساقین است.
 (ب) در امتحانات پایان ترم حداقل ۴ نفر از دانش‌آموزان کلاس مردود شده‌اند.
 (ج) عدد a نه بر ۲ بخش پذیر است و نه بر ۳.
 (د) عدد a از عدد b بزرگ‌تر است.
 (ه) از هر نقطه‌ای غیرواقع بر خط d دقیقاً یک خط به موازات d می‌توان رسم کرد.
 (و) روز سه‌شنبه پدر یا مادرتان به مدرسه خواهند آمد.
 (ز) در پرتاب دو تاس با یکدیگر حداقل یکی از دو تاس ۵ ظاهر شده است.
 (ح) در انتخاب ۴ سؤال از بین ۱۰ سؤال به تصادف، شماره‌ی دقیقاً ۳ سؤال عددی زوج شده است.
 (ط) هیچ یک از اعداد اول زوج نیستند.
 (ی) هر آدم عاقلی یا به مسافرت می‌رود یا ورزش می‌کند.
 (ک) بعضی از اعداد طبیعی حداقل به یکی از اعداد ۲، ۵ یا ۷ بخش پذیرند.
 (ل) وجود دارد چهارضلعی‌ای که هم قطرهایش هم‌دیگر را نصف می‌کنند و هم زاویه‌ی قائمه دارد.
 (م) $\{1, 2, 5\} \subseteq \{1, 5, 9, 11\}$
 (ن) اگر چهارضلعی ABCD دوزنقه باشد آن‌گاه قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند.
 (س) اگر امروز باران بیارد من هم به خانه می‌روم و هم روزه می‌گیرم.
 (ع) شرط لازم و کافی برای آن‌که عدد طبیعی‌ای مربع کامل باشد آن است که تعداد شمارنده‌های مثبتش فرد باشد.
 (ف) هر آدمی، هر غذایی را دوست دارد.

۵ گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

P: سینوس زاویه‌ی 30° برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}$ است.

Q: در پرتاب یک تاس احتمال آمدن ۳ برابر $\frac{1}{6}$ است.

R: مجموعه‌ی چهارعضوی ۱۶ زیرمجموعه دارد.

با توجه به ارزش درستی گزاره‌های فوق ارزش درستی هر یک از گزاره‌های ترکیبی زیر را تعیین کنید:

- (a) $p \Rightarrow q$
 (b) $(p \wedge r) \vee (\sim q)$
 (c) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$
 (d) $(r \wedge \sim p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

g. حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

h. عدد صحیح مثبتی مانند x وجود دارد به طوری که $8 - 3x \geq x + 6$

۱۱ عبارات‌های ریاضی زیر که به زبان سورها نوشته شده‌اند را با زبان فارسی بازنویسی کنید:

- (i) $\exists a \in \mathbb{E} : 2a \in \mathbb{O}$
 (j) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \in [0, \sqrt{2}]$
 (k) $\forall x \in \mathbb{N} : (x+1) \in \mathbb{N}$
 (l) $\forall a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{Z} ; |a-b| \in \mathbb{N}$
 (m) $\exists a \in \mathbb{Z} : \left(\frac{a}{2} \in \mathbb{Z}\right) \wedge \left(\frac{a}{3} \in \mathbb{Z}\right)$
 (n) $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = x + 3$
 (o) $\forall n \in \mathbb{N} : (2^{2^n} + 1) \in \mathbb{P}$
 (p) $\forall x \in (-\infty, 0) : x - \frac{1}{x} \leq -2$

۱۲ نقیض تمام گزاره‌های موجود در سؤالات ۱۰ و ۱۱ را بنویسید.
 در ادامه تعدادی سؤال و معمای منطقی آورده می‌شود که بی‌ارتباط با این فصل که منطق ریاضی است، نیستند*:

۱۳ در یک باشگاه ورزشی ۲۵۳ نفر عضو هستند. هر فرد یا فقط فوتبال یا فقط بسکتبال و یا فقط والیبال بازی می‌کند. بعضی از این افراد همیشه راست می‌گویند و بقیه همیشه دروغ می‌گویند. از هر عضو باشگاه سه سؤال می‌پرسیم:

سؤال اول: آیا شما فوتبالیست هستید؟

سؤال دوم: آیا شما بسکتبالیست هستید؟

سؤال سوم: آیا شما والیبالیست هستید؟

۸۶ نفر به سؤال اول، ۸۸ نفر به سؤال دوم و ۱۲۹ نفر به سؤال سوم پاسخ مثبت داده‌اند. در این باشگاه چند دروغگو وجود دارد؟

«سؤال مسابقه‌ی ربوکاپ در سال ۱۳۸۹»

۱۴ مینا، احمد، شهره و رضا برای صبحانه هر یک غذای مورد علاقه‌ی خود را خوردند. این صبحانه عبارت بود از کره، ذرت، شیر و تخم‌مرغ. اما هر یک، نوعی از آن را خوردند. با توجه به سرخ‌های زیر تعیین کنید چه کسی ذرت خورد؟ (هیچ دو نفری یک نوع غذا نخورده‌اند)

● مینا نزد برادر خود که شیر خورد ننشسته بود.

● خواهری که تخم‌مرغ خورد، در سمت چپ مینا نشسته بود.

● رضا شیر یا ذرت نخورد.

۱۵ سه دوست به نام‌های حسین، سهراب و رسول در یک مهمانی شرکت کردند. مشخص شد که یکی از آن‌ها مهندس برق، دیگری ناشر *

(این سؤالات از کتاب منطق ریاضی از انتشارات خوشخوان است که مؤلف آن آقای حسن باطنی است).

$$(e) (\sim p \vee \sim q) \wedge (r \Rightarrow \sim p)$$

$$(f) (p \vee \sim r) \Leftrightarrow (r \Rightarrow p)$$

۶ جدول ارزش درستی هر یک از گزاره‌های ترکیبی زیر را رسم کنید:

$$(a) p \Rightarrow (p \vee \sim q)$$

$$(b) q \wedge (\sim q \Rightarrow p)$$

$$(c) (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow \sim p)$$

$$(d) (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim r)$$

$$(e) (q \Leftrightarrow r) \vee (\sim q \Leftrightarrow r)$$

۷ هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ثابت کنید:

$$(a) p \vee (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \vee r)$$

$$(b) [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \equiv [(p \wedge q) \Rightarrow r]$$

$$(c) (\sim p \wedge q) \wedge (\sim q \vee \sim p) \equiv q \wedge \sim p$$

$$(d) (p \vee q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv \sim p \Rightarrow p$$

$$(e) [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \wedge r \equiv r$$

۸ هم‌ارزی‌های زیر را بدون استفاده از جدول اثبات کنید:

$$(a) (p \vee \sim q) \wedge [p \wedge (\sim q \vee r)] \equiv p \wedge (\sim q \vee r)$$

$$(b) [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \equiv [(p \wedge q) \Rightarrow r]$$

$$(c) p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$$

$$(d) p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$$

$$(e) p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

$$(f) [\sim p \wedge [(q \Rightarrow r) \vee \sim p]] \Rightarrow \sim (p \wedge q) \equiv T$$

۹ ثابت کنید اگر تعداد شمارنده‌های مثبت عددی زوج باشد آن‌گاه آن عدد غیر مربع کامل است.

۱۰ هر یک از عبارات زیر را با به کار بردن نماد سورها، به زبان ریاضی بازنویسی کنید.

a. مربع هر عدد حقیقی، نامنفی است.

b. بعضی از اعداد طبیعی بر ۱۱ بخش پذیرند.

c. برای هر عدد حقیقی، عدد طبیعی‌ای یافت می‌شود که حاصل ضربشان ۱ شود.

d. مربع هیچ عدد طبیعی‌ای به رقم ۸ ختم نمی‌شود.

e. بعضی از اعداد حقیقی چنانند که اگر در هر عدد صحیحی ضرب شود حاصل ۰ شود.

f. هر عدد طبیعی‌ای، زوج یا فرد است.

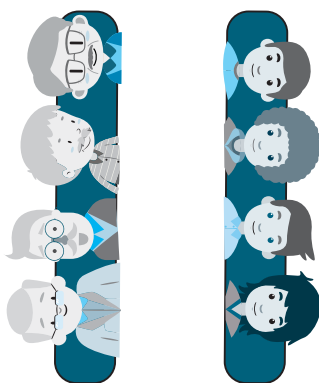


۱۸ هر یک از این چهار نفر («سعید، محسن، کامران و پوریا») یا همیشه راست می‌گویند یا همیشه دروغ. گفته‌های آن‌ها به صورت زیر است:

- کامران به سعید گفت: تو دروغگویی
 - محسن به کامران گفت: تو هم دروغگویی
 - پوریا به محسن گفت: هر دوی آن‌ها دروغ می‌گویند اما تو هم دروغگویی.
- مشخص کنید کدام یک از آن افراد راستگو و کدام یک دروغگویند.

۱۹ در یک پارک دو نیمکت روبه‌روی هم وجود دارد. روی یکی از نیمکت‌ها ۴ پیرمرد به نام‌های A، B، C و D نشسته‌اند و روی نیمکت دیگر ۴ جوان با نام‌های W، X، Y و Z نشسته‌اند. هر یک از افرادی که روی یک نیمکت نشسته‌اند دقیقاً به یکی از افرادی که روی نیمکت مقابل نشسته است نگاه می‌کند.

- پیرمرد A به جوانی نگاه می‌کند که آن جوان به پیرمردی نگاه می‌کند که آن پیرمرد به جوان W نگاه می‌کند.
- پیرمرد B به جوانی نگاه می‌کند که آن جوان به پیرمردی نگاه می‌کند که آن پیرمرد به جوان X نگاه می‌کند.
- پیرمرد C به جوانی نگاه می‌کند که آن جوان به پیرمرد D نگاه می‌کند.
- جوان Z به پیرمردی نگاه می‌کند که آن پیرمرد به جوان Y نگاه نمی‌کند.
- جوان Y به پیرمرد B نگاه نمی‌کند.



با توجه به این که هیچ دو نفری (پیر و جوان) متقابلاً به هم نگاه نمی‌کنند، یعنی مثلاً اگر A به W نگاه می‌کند مطمئناً W به A نگاه نمی‌کند، اکنون دقیقاً مشخص کنید هر کس به چه کسی نگاه می‌کند؟

۲۰ روزی ریاضیدان A میهمان ریاضیدان B می‌شود که کاملاً با منطق ریاضی آشنا هستند!

و سومی معلم است. در ضمن یکی از آن‌ها متولد قزوین، دیگری متولد دامغان و سومی هم متولد سراب است. با توجه به جملات زیر مشخص کنید هر کدام از افراد در چه شهری متولد شده است و چه شغلی دارد:



- مهندس برق تاکنون در شهر دامغان نبوده و از حسین کوچک‌تر است.
- ناشر متولد شهر سراب است و همسرش با همسر حسین نسبت فامیلی دارد.
- رسول می‌گوید: من هرگز در شهر قزوین نبوده‌ام.

۱۶ از طلافروش دزدی شد. می‌دانیم دزد یا دزدها با ماشین فرار کردند. پلیس سه نفر به نام‌های فرزند، تورج و نعمت را دستگیر کرده است. می‌دانیم:



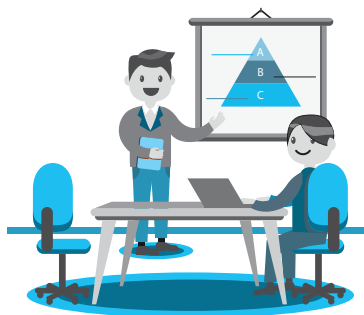
- شخص دیگری به جز این سه نفر در دزدی شرکت نداشته است.
- نعمت بدون کمک فرزاد کاری را انجام نمی‌دهد.
- تورج رانندگی بلد نیست.
- آیا فرزاد در این دزدی شرکت داشته است یا نه؟
- ۱۷ برای ثبت نام در یک مدرسه، متقاضی باید سه کار انجام دهد:

- ملاقات با مدیر
 - دریافت فرم از دفتر
 - دریافت توصیه‌نامه از معلم A یا B
- ترتیب انجام کارها باید به‌گونه‌ای باشد که قبل از گرفتن فرم، مدیر را ملاقات کرده باشد.
- مدیر در روزهای شنبه صبح و سه‌شنبه بعدازظهر و چهارشنبه بعدازظهر حضور دارد. دفتر روزهای سه‌شنبه صبح، چهارشنبه صبح، شنبه بعدازظهر و پنج‌شنبه بعدازظهر باز است. معلم A روزهای دوشنبه صبح و چهارشنبه صبح و معلم B روزهای شنبه صبح و دوشنبه بعدازظهر حضور دارند. علی ثبت نام خود را در یک روز کامل کرده است. از جملات زیر کدام‌ها صحیحند:

- توصیه‌نامه را از معلم A گرفته است.
- توصیه‌نامه را از معلم B گرفته است.
- کلبه‌ی مراحل ثبت نام را در صبح انجام داده است.

«لمیپاد کامپیوتر در سال ۱۳۷۶»





ریاضیدان A: چند تا بچه دارید؟

ریاضیدان B: سه تا.

ریاضیدان A: سن آنها چقدر است؟

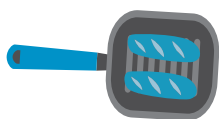
ریاضیدان B: حاصل ضرب سنشان ۳۶ است و مجموع سنشان برابر پلاک خانه‌ی پدر بزرگم است.

ریاضیدان A: ولی من پلاک خانه‌ی پدر بزرگت را نمی‌دانم.

ریاضیدان B: حتی اگر آن را می‌دانستی باز هم نمی‌توانستی سن بچه‌ها را به دست آوری. راهنمایی می‌کنم بزرگ‌ترین آنها در اتاق بالا خوابیده است. و ریاضیدان A به سادگی سن بچه‌ها را به دست آورد.

با علم به این‌که سن هر یک از آن سه فرزند عددی طبیعی است سن آن بچه‌ها را به دست آورید.

۲۱ ماهی‌تابه‌ای فقط گنجایش دو کتلت را دارد و قرار است در کم‌ترین زمان ممکن ۳ کتلت را سرخ کنیم. هر باری که ماهی‌تابه را روی اجاق قرار می‌دهیم ۱۰ دقیقه طول می‌کشد تا فقط یک تمام کتلت‌های موجود در آن سرخ شود آن‌گاه کم‌ترین زمان لازم برای سرخ کردن هر دو روی ۳ کتلت چقدر می‌شود؟



(ل) همه‌ی چهارضلعی‌ها چنانند که یا قطرهایش همدیگر را نصف نمی‌کنند یا زاویه‌ی قائمه ندارند.

$$(م) \{1, 2, 5\} \not\subseteq \{1, 5, 9, 11\}$$

(ن) چهارضلعی ABCD دوزنقه است ولی قطرهایش یکدیگر را نصف نمی‌کنند.

(س) امروز باران می‌بارد و من به خانه نمی‌روم یا روزه نمی‌گیرم.

(ع) از آن‌جا که گزاره‌ی $q \Leftrightarrow p$ به صورت $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ قابل بازنویسی است، پس:

$$\begin{aligned} \sim (p \Leftrightarrow q) &\equiv \sim [(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \\ &\equiv \sim (p \vee q) \vee \sim (\sim p \vee \sim q) \\ &\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim q) \end{aligned}$$

بنابراین نقیض گزاره‌ی دوشروطی داده شده به صورت زیر است: مربع کاملی وجود دارد که تعداد شمارنده‌های مثبتش زوج است یا عددی وجود دارد که تعداد شمارنده‌های مثبتش فرد است ولی مربع کامل نیست.

(ف) وجود دارد آدمی که بعضی از غذاها را دوست ندارد.

۵ با توجه به این‌که ارزش گزاره‌های p ، q و r به ترتیب نادرست، درست و درست است بنابراین:

$$(a) (p \Rightarrow q) \equiv (F \Rightarrow T) \equiv T$$

$$(b) (p \wedge r) \vee (\sim q) \equiv (F \wedge T) \vee (\sim T) \\ \equiv F \vee F \equiv F$$

$$(c) (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \\ \equiv (F \Rightarrow T) \wedge (T \Rightarrow T) \\ \equiv T \wedge T \equiv T$$

$$(d) (r \wedge \sim p) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \\ \equiv (T \wedge \sim F) \Rightarrow (T \Rightarrow F) \\ \equiv T \Rightarrow F \equiv F$$

$$(e) (\sim p \vee \sim q) \wedge (r \Rightarrow \sim p) \\ \equiv (T \vee F) \wedge (T \Rightarrow T) \\ \equiv T \wedge T \equiv T$$

$$(f) (p \vee \sim r) \Leftrightarrow (r \Rightarrow p) \\ (F \vee F) \Leftrightarrow (T \Rightarrow F) \\ \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$$

۱

(الف) گزاره

(ج) هیچ‌یک

(ه) گزاره‌نما

(ز) هیچ‌یک

(ط) هم گزاره و هم گزاره‌نما

(ب) گزاره

(د) هیچ‌یک

(و) گزاره‌نما

(ح) گزاره

(ی) گزاره‌نما

۲

(الف) ۲ (ب) ایرانی (ج) خبری (د) ۲۰

(ه) ۱۲ (و) ۲۵۳ (ز) ۶۸ (ح) ۶

۳

$$S_{\text{الف}} = \{۲۳, ۴۷, ۷۹\}, S_{\text{ب}} = \left\{\frac{۴}{۵}\right\}, S_{\text{ج}} = \{۰, ۱, ۴, ۵, ۶, ۹\}$$

نکته ۸. می‌دانیم هر عدد صحیحی به یکی از ده فرم $۱۰k + ۱$ یا $۱۰k + ۲$ یا $۱۰k + ۳$ یا $۱۰k + ۴$ یا $۱۰k + ۵$ یا $۱۰k + ۶$ یا $۱۰k + ۷$ یا $۱۰k + ۸$ یا $۱۰k + ۹$ است که اگر مربع آن‌ها را به دست آوریم رقم یکان هیچ‌یک از آن‌ها ۲، ۳، ۷ و ۸ نخواهد شد.

$$S_{\text{د}} = \{۰, ۱, ۴, ۹, ۱۲, ۱۶\}$$

همانند نکته‌ی ۸ می‌دانیم هر عدد صحیحی به یکی از دوازده فرم $۱۲k + ۱$ یا $۱۲k + ۲$ یا $۱۲k + ۳$ یا $۱۲k + ۴$ یا $۱۲k + ۵$ یا $۱۲k + ۶$ یا $۱۲k + ۷$ یا $۱۲k + ۸$ یا $۱۲k + ۹$ یا $۱۲k + ۱۰$ یا $۱۲k + ۱۱$ یا $۱۲k + ۱۲$ است که اگر مربع آن‌ها را به دست آوریم خواهیم دید که آن‌ها در تقسیم بر ۲۴ یکی از باقی‌مانده‌های نوشته شده را می‌توانند داشته باشند.

۴

(الف) وجود دارد مثلث متساوی‌الاضلاعی که متساوی‌الساقین نباشد.

(ب) در امتحانات پایان‌ترم حداکثر ۳ نفر از دانش‌آموزان کلاس مردود شده‌اند.

(ج) عدد a حداقل بر یکی از اعداد ۲ یا ۳ بخش پذیر است.

(د) عدد a یا با b مساوی است یا از b کوچک‌تر است.

(ه) وجود دارد نقطه‌ای غیرواقع بر خط d که یا از آن خطی به موازات d نمی‌توان رسم کرد و یا بیش از یک خط به موازات d می‌توان رسم کرد.

(و) روز سه‌شنبه نه پدرتان به مدرسه خواهد آمد و نه مادرتان.

(ز) در پرتاب دو تاس با یکدیگر هیچ‌یک از تاس‌ها ۵ ظاهر نشده‌اند.

(ح) در انتخاب ۴ سؤال از بین ۱۰ سؤال به تصادف شماره‌ی دقیقاً ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۴ سؤال عددی زوج شده است.

(ط) وجود دارد عددی اول که زوج باشد.

(ی) وجود دارد آدم عاقلی که نه مسافرت می‌رود و نه ورزش می‌کند.

(ک) هیچ عدد طبیعی‌ای وجود ندارد که حداقل به یکی از اعداد ۲، ۵ یا ۷ بخش پذیر باشد.



۶

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	کل
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	د
ن	د	ن	ن	د
ن	ن	د	د	د

.a

p	q	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow p$	کل
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن
ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د

.b

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow \sim p$	کل
د	د	ن	د	ن	د
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د	د

.c

p	q	r	$\sim r$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow \sim r$	کل
د	د	د	ن	د	ن	ن
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن	د	ن
د	ن	ن	د	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

.d

q	r	$\sim q$	$q \Leftrightarrow r$	$\sim q \Leftrightarrow r$	کل
د	د	ن	د	ن	د
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د

.e

p	q	r	$q \Rightarrow r$	چپ	$p \vee r$	راست
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د

.a

۷

p	q	r	$q \Rightarrow r$	چپ	$p \wedge q$	راست
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د

.b

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge q$	$\sim q \vee \sim p$	چپ	راست
د	د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	ن	ن

.c

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$q \Rightarrow p$	چپ	راست
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	ن	ن

.d

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	گرفته	چپ
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	د	ن

.e

$$\begin{aligned} \text{چپ} &= (p \vee \sim q) \wedge [p \wedge (\sim q \vee r)] \\ &\equiv [(p \vee \sim q) \wedge p] \wedge (\sim q \vee r) \\ &\equiv p \wedge (\sim q \vee r) = \text{راست} \end{aligned}$$

.a

$$\begin{aligned} \text{چپ} &= [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \\ &\equiv (q \Rightarrow r) \vee \sim p \\ &\equiv (r \vee \sim q) \vee \sim p \\ &\equiv r \vee [\sim q \vee \sim p] \\ &\equiv r \vee \sim (q \wedge p) \\ &\equiv (p \wedge q) \Rightarrow r = \text{راست} \end{aligned}$$

.b





- (a) $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 \geq 0$
 (b) $\exists a \in \mathbb{N} : \frac{a}{11} \in \mathbb{N}$
 (c) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists a \in \mathbb{N} ; x \cdot a = 1$
 (d) $\nexists a \in \mathbb{N} : a^2 - 8 = 10k$
 (e) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{Z} ; xy = 0$
 (f) $\forall A \in \mathbb{N} : (a \in \mathbb{O}) \vee (a \in \mathbb{E})$
 (g) $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} : x + \frac{1}{x} \geq 2$
 (h) $\exists x \in \mathbb{N} : 8 - 3x \geq x + 6$

۱۰

- i. عدد زوجی وجود دارد که سه برابرش فرد باشد.
 j. مربع بعضی از اعداد حقیقی در بازه $[0, \sqrt{2}]$ قرار دارد.
 k. اگر به هر عدد طبیعی ۱ واحد اضافه کنیم عدد حاصل باز هم طبیعی می‌شود.
 l. برای هر عدد طبیعی عدد صحیحی چنان یافت می‌شود که قدرمطلق اختلافشان طبیعی شود.
 m. بعضی از اعداد طبیعی هم بر ۲ بخش پذیرند و هم بر ۳.
 n. برای تمام اعداد حقیقی مانند x تساوی $\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = x + 3$ برقرار است.
 o. به ازای هر عدد طبیعی مانند n حاصل $2^{2^n} + 1$ عددی اول است.
 p. به ازای تمام اعداد حقیقی منفی x ، رابطه $x - \frac{1}{x} \leq -2$ برقرار است.

۱۱

- (a) $\exists a \in \mathbb{R} : a^2 < 0$
 (b) $\nexists a \in \mathbb{N} : \frac{a}{11} \in \mathbb{N}$ یا $\forall a \in \mathbb{N} : \frac{a}{11} \notin \mathbb{N}$
 (c) $\exists x \in \mathbb{R} : \nexists a \in \mathbb{N} ; x \cdot a = 1$
 (d) $\exists a \in \mathbb{N} : a^2 - 8 = 10k (k \in \mathbb{Z})$
 (e) $\nexists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{Z} ; xy = 0$
 (f) $\exists a \in \mathbb{N} : (a \notin \mathbb{O}) \wedge (a \notin \mathbb{E})$
 (g) $\exists x \in \mathbb{R} - \{0\} : x + \frac{1}{x} < 2$
 (h) $\forall x \in \mathbb{N} : 8 - 3x < x + 6$
 (i) $\nexists a \in \mathbb{E} : 3a \in \mathbb{O}$
 (j) $\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 \in [0, \sqrt{2}]$
 (k) $\exists x \in \mathbb{N} : (x + 1) \notin \mathbb{N}$
 (l) $\exists a \in \mathbb{N} : \nexists b \in \mathbb{Z} ; |a - b| \in \mathbb{N}$
 (m) $\nexists a \in \mathbb{Z} : (\frac{a}{2} \in \mathbb{Z}) \wedge (\frac{a}{3} \in \mathbb{Z})$
 یا $\forall a \in \mathbb{Z} : (\frac{a}{2} \notin \mathbb{Z}) \vee (\frac{a}{3} \notin \mathbb{Z})$

۱۲

c. راست $= (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$
 $\equiv (q \vee \sim p) \vee (r \vee \sim p)$
 $\equiv (q \vee r) \vee \sim p$
 $\equiv p \Rightarrow (q \vee r) =$ چپ

d. راست $= (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
 $\equiv (q \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim p)$
 $\equiv (q \wedge r) \vee \sim p$
 $\equiv p \Rightarrow (q \wedge r) =$ چپ

e. چپ $= p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
 $\equiv (q \Rightarrow r) \vee \sim p$
 $\equiv (r \vee \sim q) \vee \sim p$
 $\equiv (r \vee \sim p) \vee \sim q$
 $\equiv (p \Rightarrow r) \vee \sim q$
 راست $= q \Rightarrow (p \Rightarrow r) =$ راست

f. چپ $= \sim p \Rightarrow \sim (p \wedge q)$
 $\equiv \sim (p \wedge q) \vee p$
 راست $= \sim p \vee \sim q \vee p \equiv T =$ راست

۹

از نکته‌ی ۶ که عکس نقیض است استفاده می‌کنیم:

● اگر عددی مربع کامل باشد آن‌گاه تعداد شمارنده‌های مثبت آن فرد است.

اثبات: می‌دانیم تعداد شمارنده‌های مثبت عدد n که در آن

$$n = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot P_k^{\alpha_k}$$

به عوامل اول تجزیه شده است برابر است با:

$$? = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$$

حال اگر عدد مربع کامل باشد تمام α_i ها زوج و در نتیجه تمام پرانتهای $\alpha_i + 1$ فرد شده و حاصل ضرب آن‌ها فرد است.

* **استدلالی دیگر:** اگر عدد n به صورت $n = a \cdot b$ به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی نوشته شود یا \sqrt{n} (اگر n مربع کامل باشد) و یا این‌که یکی از دو عدد a و b از \sqrt{n} کم‌تر و یکی از آن دو عدد از \sqrt{n} بیشتر است بنابراین به‌ازای هر شمارنده‌ای کوچک‌تر از \sqrt{n} برای n یک و فقط یک شمارنده بزرگ‌تر از \sqrt{n} نیز وجود دارد. به این معنا که تعداد شمارنده‌های مثبت کوچک‌تر از \sqrt{n} برای n با تعداد شمارنده‌های مثبت بزرگ‌تر از \sqrt{n} برابر است حال اگر n مربع کامل باشد با احتساب \sqrt{n} که یکی از شمارنده‌های n می‌شود تعداد شمارنده‌های n فرد به‌دست می‌آید.

فرم از دفتر بعد از ملاقات با مدیر است پس این اتفاق در روز شنبه رخ داده است و در نتیجه توصیه‌نامه را از معلم B گرفته است.

بعد از ظهر	صبح	
دفتر	مدیر - معلم B	شنبه
		یکشنبه
معلم B	معلم A	دوشنبه
مدیر	دفتر	سه‌شنبه
مدیر	دفتر - معلم A	چهارشنبه
دفتر		پنجشنبه

۱۸ فرض کنید کامران راست‌گو باشد در این صورت با توجه به جمله‌ی (۱)، سعید دروغ‌گو است و با توجه به جمله‌ی (۲) که محسن به کامران گفت: «تو دروغ‌گویی» چون کامران را راست‌گو فرض کردیم پس محسن دروغ‌گو است.

با این شرایط با توجه به جمله‌ی ۳ پوریا به محسن گفته «تو دروغ‌گویی»، این جمله راست است و در ضمن پوریا گفته هر دو ی آن‌ها (کامران و سعید) دروغ‌گو هستند، این جمله «دروغ است» چون فرض ما این بود که کامران راست‌گو است.

در صورت سؤال آمده، هر یک از این افراد یا همیشه راست می‌گویند، یا همیشه دروغ، اما با فرض ابتدایی ما (که کامران راست‌گو است) به این نتیجه رسیدیم که پوریا در بخشی از گفته‌هایش راست گفته و در بخش دیگر دروغ بنابراین کامران دروغ‌گو است.

محسن گفته: کامران دروغ‌گو است، پس محسن راست‌گو است.

و در نهایت نیز معلوم می‌شود پوریا دروغ‌گو است.

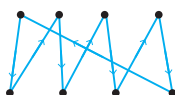
۱۹ چون هیچ دو نفری متقابلاً به هم نگاه نمی‌کنند دو حالت ممکن است پیش آید:

I. این ۸ نفر را بتوان به دو گروه ۴ نفری چنان تقسیم کرد که



متطابق شکل روبه‌رو به هم نگاه کنند.

II. این ۸ نفر به صورت شکل زیر به یکدیگر نگاه کنند:



$$(n) \exists x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} \neq x + 3$$

$$(o) \exists n \in \mathbb{N} : (2^{2^n} + 1) \notin \mathbb{P}$$

$$(p) \exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$$

۱۳ اگر همه راستگو بودند آن‌گاه مجموع تعداد افرادی که به آن سه سؤال جواب مثبت می‌دهند برابر ۲۵۳ می‌شد. اگر یکی از آن ۲۵۳ نفر دروغ‌گو باشد آن‌گاه یک جواب مثبت به منفی و دو جواب منفی به مثبت تبدیل شده و مجموع کل جواب‌های مثبت از ۲۵۳ به ۲۵۴ تبدیل می‌شود. بنابراین به ازای هر دروغ‌گو یک جواب مثبت به مجموع جواب مثبت‌ها اضافه می‌شود. چون اعداد داده شده برابر ۳۰۳ است بنابراین تعداد دروغ‌گوها برابر ۲۵۳ - ۳۰۳ یعنی ۵۰ نفر است.

۱۴ چون به غیر از مینا فقط شهره دختر گروه است با توجه به جمله‌ی دوم معلوم می‌شود که شهره تخم‌مرغ برداشته است. طبق جمله‌ی سوم، رضا شیر یا ذرت نخورده است، پس با توجه به جمله‌ی اول، رضا برادر مینا نیست، بنابراین احمد برادر مینا است و احمد شیر خورده است. رضا ذرت هم نخورده، پس رضا کره خورده است و در نتیجه مینا ذرت خورده است.

۱۵ در جمله‌ی اول آمده است: «مهندس برق از حسین کوچک‌تر است» معلوم می‌شود که حسین مهندس برق نیست. در جمله‌ی دوم آمده است: «همسر ناشر با همسر حسین نسبت فامیلی دارد» بنابراین حسین ناشر نیست، در نتیجه حسین معلم است.

مهندس برق دامغانی نیست، پس یا سرابی است یا قزوینی و از آن‌جا که ناشر سرابی است پس مهندس برق اهل قزوین است و حسین اهل دامغان است.

در جمله‌ی سوم رسول می‌گوید در قزوین نبوده است، بنابراین او مهندس برق نیست و چون معلم، حسین است در نتیجه رسول ناشر است و اهل سراب. و در نهایت معلوم می‌شود سهراب مهندس برق است و اهل قزوین.

۱۶ در مورد توجیح دو حالت وجود دارد:

حالت اول: توجیح در دزدی شرکت نداشته باشد که در این صورت سه اتفاق ممکن است رخ دهد:

۱. نعمت در دزدی باشد که چون نعمت بدون کمک فرزند کاری نمی‌کند پس فرزند در دزدی شرکت داشته است.

۲. فرزند در دزدی باشد.

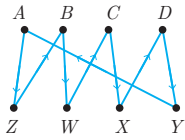
۳. هر دو نفر نعمت و فرزند در دزدی باشند.

حالت دوم: توجیح در دزدی شرکت داشته باشد که چون راندگی بلد نیست پس حتماً همکارش یا فرزند است یا نعمت که اگر نعمت باشد فرزند هم حتماً هست. بنابراین در هر حالی فرزند در دزدی بوده است.

۱۷ اطلاعات مربوط به مسئله را در جدول زیر مشاهده می‌کنید: با توجه به این‌که علی ثبت‌نام خود را در یک روز کامل کرده است و گرفتن



وضعیت دوم: C و D به ترتیب در خانه‌های ۵ و ۷ باشند که در این حالت به شکل زیر خواهیم رسید که با تمام شرایط سازگار است:



۲۰ تمام حالتی که حاصل ضرب ۳ عدد طبیعی برابر ۳۶ باشد عبارتند از:

- | | |
|-------------|-------------|
| ۱) ۱, ۱, ۳۶ | ۲) ۱, ۲, ۱۸ |
| ۳) ۱, ۳, ۱۲ | ۴) ۱, ۴, ۹ |
| ۵) ۱, ۶, ۶ | ۶) ۲, ۲, ۹ |
| ۷) ۲, ۳, ۶ | ۸) ۳, ۳, ۴ |

مجموع اعداد موجود در حالات هشت‌گانه‌ی فوق به ترتیب عبارتند از:

- | | |
|-------|-------|
| ۱) ۳۸ | ۲) ۲۱ |
| ۳) ۱۶ | ۴) ۱۴ |
| ۵) ۱۳ | ۶) ۱۳ |
| ۷) ۱۱ | ۸) ۱۰ |

اگر پلاک یکی از اعداد ۱۰، ۱۱، ۱۴، ۱۶، ۲۱ و ۳۸ می‌بود و ریاضیدان A آن را می‌دانست آن‌گاه جواب به صورت منحصر به فرد مشخص می‌شد و نیازی نبود که ریاضیدان B بگوید که اگر آن را می‌دانستی باز هم نمی‌توانستی سن بچه‌ها را به دست آوری، معلوم می‌شود که پلاک ۱۳ بوده و برایش دو دسته جواب وجود دارد حالت ۵ یا ۶. با راهنمایی‌ای که کرده است یعنی بزرگ‌ترین آن‌ها در اتاق بالا خوابیده است معلوم می‌شود حالت ۶ درست است چون در حالت ۵ بزرگ‌ترین وجود ندارد.

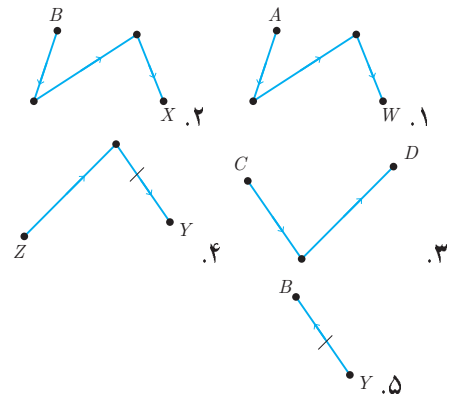
۲۱ ده دقیقه‌ی نخست: سرخ شدن روی کتلت‌های A و B

ده دقیقه‌ی دوم: سرخ شدن روی کتلت C و پشت کتلت A

ده دقیقه‌ی سوم: سرخ شدن پشت کتلت‌های B و C

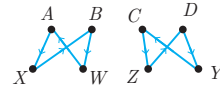
پس کم‌ترین زمان ممکن ۳۰ دقیقه است.

جملات گفته شده در صورت سؤال به اشکال زیر می‌باشند:



بررسی حالت I.

وضعیت اول: اگر جملات ۱ و ۲ در یک چهارضلعی رخ دهند آن‌گاه به شکل زیر خواهیم رسید:

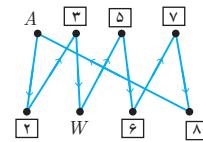


که با شرط ۴ سازگاری ندارند.

وضعیت دوم: اگر جملات ۱ و ۲ در دو چهارضلعی متفاوت رخ دهند چون C و D در دو چهارضلعی متفاوت قرار می‌گیرند آن‌گاه این شرایط با جمله‌ی ۳ سازگاری ندارد، بنابراین حالت I رخ نمی‌دهد.

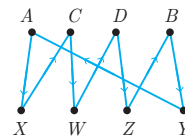
بررسی حالت II.

برای محقق شدن شرط ۱ مطابق شکل زیر A را در خانه‌ی ۱ و W را در خانه‌ی ۴ قرار می‌دهیم:



دو وضعیت پیش می‌آید:

وضعیت اول: C و D به ترتیب در خانه‌های ۳ و ۵ باشند که در این حالت به شکل زیر خواهیم رسید که با شرط ۴ سازگاری ندارد.





تمرین

درس ۱

(ب) زیرمجموعه‌ای از $A = \{1, 2, 3, 4\}$ است به طوری که $X \cap \{2, 3, 5\} = \{2\}$.

(ج) اگر تمام اعداد چهاررقمی قابل ساخت با ارقام ۱، ۲ و ۳ را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم آن‌گاه رتبه‌ی عدد ۲۱۲۲ برابر k می‌شود.

(د) اگر تمام مکعب کامل‌ها را بر ۷ تقسیم کنیم آن‌گاه S مجموعه‌ی باقی‌مانده‌های حاصل است.

۴ نقیض هر یک از عبارات زیر را بنویسید:

(الف) در هر مثلث قائم‌الزاویه‌ای میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است.

(ب) بعضی از ژاپنی‌ها سیاه‌پوست هستند.



(ج) برای هر عدد طبیعی مانند a عددی اول مانند b چنان یافت می‌شود که $a \geq b$.

(د) در دانمارک هیچ فردی یافت نمی‌شود که در یکی از روزهای شنبه یا پنج‌شنبه متولد شده باشد.

(ه) اگر عدد a مربع کامل باشد آن‌گاه تعداد شمارنده‌های مثبت آن فرد است.

(و) عددی که بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد هم بر ۲ بخش‌پذیر است و هم بر ۳.

(ز) عدد ۱ شمارنده‌ی تمام اعداد طبیعی است.

(ح) اگر عدد a بر عدد b بخش‌پذیر باشد آن‌گاه عدد b اول است و عدد a زوج.

(ط) عدد $\sqrt{2}\sqrt{2}$ گنگ است.

(ی) اگر مربع عددی بر ۵۴ بخش‌پذیر باشد آن‌گاه آن عدد هم بر ۲ بخش‌پذیر است و هم بر ۹.

(ک) وجود دارد یک چهارضلعی‌ای که قطرهایش همدیگر را نصف می‌کنند ولی نه زاویه‌ی قائمه دارد و نه زاویه‌ی منفرجه.

(ل) اگر استقلال از پرسپولیس ۶ تا گل خورده است پس آن‌گاه یا استقلال سرور پرسپولیس بوده است و یا پرسپولیس سرور استقلال.

(م) اگر کسی تمام تمرینات این کتاب را به درستی حل کند، تیزهوش است.

(ن) رقم یکان بزرگ‌ترین عدد اول پنج‌رقمی برابر ۳ است.

(س) در پرتاب یک سکه اگر سکه رو بیاید آن‌گاه دو تاس قرمز و سبز را با هم پرتاب می‌کنیم.

۱ کدام یک از جملات زیر گزاره و کدام یک گزاره‌نما هستند؟
(الف) عدد ۱۱ از عدد ۱۱۱ بزرگ‌تر است.

(ب) کتاب‌های انتشارات خوشخوان حرف نداره!

(ج) انتشارات خوشخوان تا ابتدای سال ۱۳۹۶ به تعداد ۷۱۱ عنوان کتاب چاپ کرده است.

(د) تعداد اعداد اول سه‌رقمی برابر k است.

(ه) در پرتاب سه تاس احتمال آمدن مجموع a برابر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ است.

(و) کدام حیوان است که هم پرنده است و هم پستاندار؟

(ز) پدرم ماشینش را گران خریدم است.

(ح) اعداد طبیعی x, y و z یافت نمی‌شوند که برای n های طبیعی بزرگ‌تر از ۲ تساوی $x^n + y^n = z^n$ برقرار باشد.

(ط) تعداد ارقام عدد 3^{1396} از تعداد ارقام عدد 2^{2017} بیش‌تر است.

(ی) رقم یکان عدد طبیعی $A = 2^k + 2^{k+1} + 2^{k+2} + 2^{k+3}$ برابر ۰ است. ($k \in \mathbb{W}$)

۲ در جاهای خالی عدد یا عبارتی چنان قرار دهید تا گزاره‌های حاصل ارزش درستی داشته باشند:

(الف) تعداد شمارنده‌های مثبت عدد 36^0 از تعداد شمارنده‌های مثبت عدد 12^0 تا بیش‌تر است.

(ب)

در شکل مقابل مربع می‌توان رسم کرد که هر چهار رأس آن‌ها نقاطی از نقاط داده شده باشند.

(ج) در بین اعداد طبیعی کوچک‌تر از 10^0 ، عدد اول وجود دارد.

(د) $7 \in \{9, 11 - \text{}, 3\}$

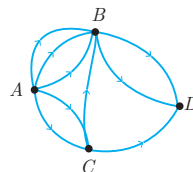
(ه) هر یک از زوایای داخلی ضلعی منتظم برابر 172° است.

(و) مجموع اعداد طبیعی از ۵۳ تا ۹۴ برابر است.

(ز) در تابع $f(x) = \frac{4^x}{4x+2}$ حاصل عبارت S برابر است که در آن:

$$S = f\left(\frac{1}{14}\right) + f\left(\frac{2}{14}\right) + \dots + f\left(\frac{13}{14}\right)$$

(ح) در شکل زیر به طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت.



۳ مجموعه جواب هر یک از گزاره‌نماهای زیر را مشخص کنید:

(الف) a چنان است که $a^2 + 2a^2 = 24$.