۱

جبر ـ اتحاد و تجزیه

۱-۱ اتحاد

اگر یک تساوی به ازای جمیع مقادیر متغیرهایش برقرار باشد، یک اتحاد نامیده می‌شود. به عنوان مثال تساوی‌های $a+b=b+a$ و $a+a^{۲}=a(a+۱)$ اتحاد هستند زیرا بدون توجه به مقادیر a و b همواره برقرار هستند. اما عبارتی مانند $۳x+۱۱=۰$ یک اتحاد نیست زیرا فقط به ازای $x=-\frac{۱۱}{۳}$ معنادار است. در این قسمت با برخی اتحادهای جبری مهم آشنا می‌شویم.

اتحادهای مقدماتی

۱. مربع دوجمله‌ای:

$$(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$$

$$(a-b)^{۲}=a^{۲}-۲ab+b^{۲}$$

اتحاد فرعی: $(a+b)^{۲}-(a-b)^{۲}=۴ab$ یا $(a+b)^{۲}-۲ab=(a-b)^{۲}+۲ab$

۲. مکعب دوجمله‌ای:

$$(a+b)^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}$$

$$(a-b)^{۳}=a^{۳}-۳a^{۲}b+۳ab^{۲}-b^{۳}$$

اتحاد فرعی: $a^{۳}+b^{۳}=(a+b)^{۳}-۳ab(a+b)$

۳. مزدوج:

$$(a+b)(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$$

با توجه به این اتحاد به $(a-b)$ مزدوج $(a+b)$ می‌گویند و بالعکس، به عنوان مثال $۱+\sqrt{۳}$ مزدوج $\sqrt{۳}-۱$ است.

۴. چاق و لاغر:

$$a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})$$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

۵. جمله مشترک: $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

۶. مربع سه‌جمله‌ای: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

تعمیم اتحادهای مقدماتی: اتحادهای فوق را می‌توان به حالت‌های کلی‌تری تعمیم داد که به ترتیب در زیر می‌آیند:

۱. بسط دوجمله‌ای نیوتن:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

در اتحاد فوق $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ است و نیز طبق قرارداد $0! = 1$ است.[1]
به عنوان مثال برای $n = 6$ داریم:

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b^1 + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}a^1b^5 + \binom{6}{6}b^6$$
$$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

نکته ۱. دقت کنید که چون $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ در نتیجه ضریب جمله‌ی iام از اول با ضریب جمله‌ی iام از آخر با هم برابرند.

به عنوان مثال در بسط $(a+b)^6$ ضریب جمله‌ی دوم و ششم برابر ۶ و ضریب جمله‌های سوم و پنجم برابر ۱۵ است.

۲. چاق و لاغر: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$ (n فرد است.)

به عنوان مثال اگر $b = 1$ و $a = 2$ باشد داریم:

$$2^n - 1^n = (2-1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1)$$
$$\rightarrow 2^n - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1$$

۱) نماد $\binom{n}{i}$ در جلسه‌ی اول بخش ترکیبیات به طور کامل مورد بحث قرار گرفته است.

۳. جمله مشترک:

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)=x^n+(a_1+a_2+\cdots+a_n)x^{n-1}$$
$$+(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)x^{n-2}+\cdots+a_1a_2\cdots a_n$$

معلوم است که در سمت راست اتحاد فوق ضریب جمله‌ی x^{n-i} برابر است با مجموع تمام حاصل‌ضرب‌های iتایی از جمله‌های غیرمشترک.

به عنوان مثال با فرض $n=3$ داریم:

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

۴. مربع nجمله‌ای:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\cdots+2a_{n-1}a_n$$

مثال ۱-۱ اگر $\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{3}$ و $x>0$ مطلوبست هر یک از مقادیر زیر:

(الف) $x+\frac{1}{x}$ (ب) $x^3+\frac{1}{x^3}$ (ج) $x^5+\frac{1}{x^5}$

حل:

$$\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{1}{3}\to\frac{x^4+1}{x^2}=3\to x^2+\frac{1}{x^2}=3$$

(الف)

$$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2(x)(\frac{1}{x})\to(x+\frac{1}{x})^2=3+2=5$$

که با توجه به فرض $x>0$ می‌توان نتیجه گرفت که $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$.

(ب) با توجه به اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})(x^2-1+\frac{1}{x^2})=(\sqrt{5})(3-1)=2\sqrt{5}$$

(ج) روش اول:

$$(x+\frac{1}{x})^5=x^5+5x^4(\frac{1}{x})+10x^3(\frac{1}{x})^2+10x^2(\frac{1}{x})^3+5x(\frac{1}{x})^4+(\frac{1}{x})^5$$
$$=x^5+\frac{1}{x^5}+5(x^3+\frac{1}{x^3})+10(x+\frac{1}{x})$$
$$\to(\sqrt{5})^5=x^5+\frac{1}{x^5}+5(2\sqrt{5})+10\sqrt{5})$$
$$\to x^5+\frac{1}{x^5}=25\sqrt{5}-20\sqrt{5}=5\sqrt{5}$$

روش دوم:

$$(x^{۳}+\frac{۱}{x^{۳}})(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}})=x^{۵}+x+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^{۵}}$$
$$\to(۲\sqrt{۵})(۳)=x^{۵}+\frac{۱}{x^{۵}}+\sqrt{۵}$$
$$\to x^{۵}+\frac{۱}{x^{۵}}=۶\sqrt{۵}-\sqrt{۵}=۵\sqrt{۵}$$

مثال ۱-۲ باقی‌مانده‌ی تقسیم $۷+۵^{۲۲}$ بر ۸ برابر است با:

«المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۷٤»

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

حل: عدد ۷ را به صورت $۸-۱$ می‌نویسیم و عددمان را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$۵^{۲۲}-۱+۸=(۵^{۲})^{۱۱}-۱^{۱۱}+۸=(۲۵-۱)\underbrace{(۲۵^{۱۰}+۲۵^{۹}+\cdots+۱)}_{q}+۸$$
$$=۲۴q+۸=۸(۳q+۱)$$

یعنی این عدد مضربی از ۸ است پس باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۸ برابر است با صفر.

نکته ۲. ۱. به ازای هر عدد طبیعی n، $a^{n}-b^{n}$ بر $a-b$ بخش‌پذیر است.
۲. به ازای هر عدد فرد n، $a^{n}+b^{n}$ بر $a+b$ بخش‌پذیر است.

مثال ۱-۳ فرض کنید $(۲+\sqrt{۳})^{n}=۵۰۴۲+b\sqrt{۳}$ که در آن n طبیعی و b صحیح است. b چند است؟

«المپیاد مقدماتی ریاضی ـ ۸٤»

الف) ۱۳۸۴ ب) ۳۵۴۳ ج) ۷۸۰ د) ۵۸۲۲ هـ) ۲۹۱۱

حل: به جز $\sqrt{۳}$ باقی اعداد مسئله صحیح هستند. در بین اتحادها، اتحاد مزدوج بهترین اتحاد برای گویا کردن عبارات رادیکالی است، برای استفاده از اتحاد مزدوج باید مزدوج عدد $(۲+\sqrt{۳})^{n}$ که $(۲-\sqrt{۳})^{n}$

است را نیز داشته باشیم و چون حاصل آن‌ها را نیز باید بدانیم از بسط دوجمله‌ای نیوتن استفاده می‌کنیم:

$$(۲+\sqrt{۳})^n = ۲^n + \binom{n}{۱}۲^{n-۱}(\sqrt{۳})^۱ + \binom{n}{۲}۲^{n-۲}(\sqrt{۳})^۲ + \cdots + (\sqrt{۳})^n$$
$$(۲-\sqrt{۳})^n = ۲^n - \binom{n}{۱}۲^{n-۱}(\sqrt{۳})^۱ + \binom{n}{۲}۲^{n-۲}(\sqrt{۳})^۲ - \cdots + (-۱)^n(\sqrt{۳})^n$$

با یک نگاه عمیق در دو بسط بالا متوجه می‌شویم که اگر $(۲+\sqrt{۳})^n = ۵۰۴۲ + b\sqrt{۳}$ باشد آن‌گاه $(۲-\sqrt{۳})^n = ۵۰۴۲ - b\sqrt{۳}$ خواهد بود، که با ضرب طرفین این تساوی‌ها داریم:

$$(۲+\sqrt{۳})^n(۲-\sqrt{۳})^n = (۵۰۴۲+b\sqrt{۳})(۵۰۴۲-b\sqrt{۳})$$
$$\to(۴-۳)^n = (۵۰۴۲^۲ - ۳b^۲) \to ۳b^۲ = ۵۰۴۲^۲ - ۱$$
$$\to b^۲ = \frac{(۵۰۴۲-۱)(۵۰۴۲+۱)}{۳}$$
$$\to b^۲ = ۷۱^۲ \times ۴۱^۲ \to b = ۷۱ \times ۴۱ = ۲۹۱۱$$

نکته ۳. با توجه به مسئله‌ی حل شده به طورکلی می‌توان گفت که اگر $a, b \in Q$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم:

$$(a+\sqrt{b})^n = X + Y\sqrt{b} \ , \ \ (a-\sqrt{b})^n = X - Y\sqrt{b} \qquad (X, Y \in Q)$$

که از مقایسه‌ی دو رابطه‌ی بالا می‌توان نتیجه گرفت که حاصل عبارت $(a+\sqrt{b})^n + (a-\sqrt{b})^n$ همواره عددی گویاست.

مثال ۱-٤ مجموع ضرایب جملات حاصل از بسط‌های زیر را بیابید.

(الف) $(x+y)^۵$ **(ب)** $(x-۳y+۳z)^{۱۷}$

حل:

(الف) $(x+y)^۵ + x^۵ + ۵x^۴y + ۱۰x^۳y^۲ + ۱۰x^۲y^۳ + ۵xy^۴ + y^۵$

مجموع ضرایب جملات عبارت فوق برابر است با: $۱+۵+۱۰+۱+۵+۱ = ۳۲$

همان طور که مشاهده می‌شود می‌توانستیم از ابتدا با جایگذاری $x = y = ۱$ در عبارت $(x+y)^۵$ به عدد $(۱+۱)^۵ = ۳۲$ برسیم (چرا؟)

(ب) با جای‌گذاری $x = y = z = ۱$ داریم:

$$\text{مجموع ضرایب} = (۱ - ۳ + ۳)^{۱۷} = ۱^{۱۷} = ۱$$

مثال ۱-۵ بزرگ‌ترین ضریب در بسط $(۱ + x)^{۱۰۰}$ چند رقم دارد؟

«المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۶»

الف) کم‌تر از ۱۵ ب) بین ۱۵ تا ۲۵ ج) بین ۲۵ تا ۳۵ د) بین ۳۵ تا ۴۵ هـ) بیش‌تر از ۴۵

حل: با جای‌گذاری $x = ۱$ معلوم می‌شود که مجموع ضرایب بسط $(۱ + x)^{۱۰۰}$ برابر است با $۲^{۱۰۰}$. از طرفی با استفاده از بسط دوجمله‌ای نیوتن داریم:

$$(۱ + x)^{۱۰۰} = ۱ + \binom{۱۰۰}{۱}x + \binom{۱۰۰}{۲}x^{۲} + \cdots + \binom{۱۰۰}{۱۰۰}x^{۱۰۰}$$

به وضوح مشخص است که بسط فوق ۱۰۱ جمله دارد. پس تعداد ضرایب بسط ما ۱۰۱ و مجموع آن‌ها برابر $۲^{۱۰۰}$ است در نتیجه میانگین ضرایب به راحتی به‌دست می‌آید:

$$\text{میانگین ضرایب} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} = \frac{۲^{۱۰۰}}{۱۰۱}$$

مطمئناً بزرگ‌ترین ضریب از میانگین ضرایب بزرگ‌تر است (چرا؟) و از مجموع ضرایب کوچک‌تر می‌باشد. پس:

$$\frac{۲^{۱۰۰}}{۱۰۱} < \text{بزرگ‌ترین ضریب} < ۲^{۱۰۰}$$

همچنین می‌دانیم که عدد $۲^{۱۰}$ یعنی ۱۰۲۴ بسیار نزدیک به عدد $۱۰^{۳}$ یعنی ۱۰۰۰ می‌باشد، بنابراین عدد $\frac{۲^{۱۰۰}}{۱۰۱}$ تقریباً با عدد $\frac{۱۰^{۳۰}}{۱۰۰}$ یعنی $۱۰^{۲۸}$ برابر است که عددی ۲۹ رقمی است. در نتیجه بزرگ‌ترین ضریب بیش از ۲۸ رقم و کم‌تر از ۳۲ رقم خواهد داشت.

دو اتحاد مهم دیگر:

۱. لاگرانژ: $(a^{۲} + b^{۲})(x^{۲} + y^{۲}) = (ax + by)^{۲} + (ay - bx)^{۲}$

به عنوان مثال:

$$۶۲۶ \times ۳۷ = (۶۲۵ + ۱)(۳۶ + ۱) = (۲۵^{۲} + ۱^{۲}) = ۱۵۱^{۲} + ۱۹^{۲}$$

۲. اویلر: $a^۳+b^۳+c^۳=(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲-ab-bc-ca)+۳abc$

با توجه به تساوی بالا

$$a^۲+b^۲+c^۲-ab-bc-ca=\frac{۱}{۲}[(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲]$$

می‌توان اتحاد اویلر را به صورت مقابل بازنویسی کرد:

$$a^۳+b^۳+c^۳=\frac{(a+b+c)}{۲}\left[(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲\right]+۳abc$$

نتایج مهم اتحاد اویلر:

(۱) اگر $a+b+c=۰$ آن‌گاه $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$.

(۲) اگر $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$ آن‌گاه یا $a+b+c=۰$ و یا $a=b=c$.

مثال ۱-۶ اگر $x=b+c-۲a$، $y=c+a-۲b$ و $z=a+b-۲c$ باشند، آن‌گاه حاصل $\frac{x^۳+y^۳+z^۳}{xyz}$ را بیابید.

حل: با اندکی دقت معلوم می‌شود که $x+y+z=۰$، پس با توجه به نتیجه‌ی ۱ اتحاد اویلر داریم:

$$x^۳+y^۳+z^۳=۳xyz\rightarrow\frac{x^۳+y^۳+z^۳}{xyz}=۳$$

مثال ۱-۷ هرگاه بدانیم متغیرهای x و y در برابری $x+۲y=۵$ صدق می‌کنند. آن‌گاه کم‌ترین مقدار $x^۲+y^۲$ را بیابید.

حل: با جاگذاری $a=۱$ و $b=۲$ در اتحاد لاگرانژ خواهیم داشت:

$$(۱^۲+۲^۲)=(x+۲y)^۲+(y-۲x)^۲$$

$$\rightarrow ۵(x^۲+y^۲)=۵^۲+(y-۲x)^۲$$

$$\rightarrow x^۲+y^۲=\frac{۱}{۵}[۵^۲+(y-۲x)^۲]$$

عبارت $x^۲+y^۲$ زمانی به کم‌ترین مقدار خود می‌رسد که $(y-۲x)^۲$ کم‌ترین مقدار را بپذیرد و چون $(y-۲x)^۲$ یک عبارت نامنفی است کم‌ترین مقدارش برابر صفر است که در این حالت مقدار $x^۲+y^۲$ کم‌ترین مقدار ممکن را داشته و برابر با ۵ خواهد بود.

مثال ۱-۸ با استفاده از اتحادها ثابت کنید:

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

حل: با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای تساوی $(x+۱)^۳ - x^۳ = ۳x^۲ + ۳x + ۱$ به‌دست می‌آید.
تساوی فوق به ازای جمیع مقادیر x برقرار است پس با جاگذاری $x = ۱$، $x = ۲$، ...، $x = n$ خواهیم داشت:

$$x = ۱ : ۲^۳ - ۱^۳ = ۳(۱)^۲ + ۳(۱) + ۱$$
$$x = ۲ : ۳^۳ - ۲^۳ = ۳(۲)^۲ + ۳(۲) + ۱$$
$$x = ۳ : ۴^۳ - ۳^۳ = ۳(۳)^۲ + ۳(۳) + ۱$$
$$\vdots$$
$$x = n : (n+۱)^۳ - n^۳ = ۳(n)^۲ + ۳(n) + ۱$$

طرفین تساوی‌های فوق را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&۲^۳ - ۱^۳ + ۳^۳ - ۲^۳ + ۴^۳ - ۳^۳ + \cdots + (n+۱)^۳ - n^۳ \\
&= ۳(\underbrace{۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + n^۲}_{S}) + ۳(۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n) + n \\
&\rightarrow (n+۱)^۳ - ۱^۳ = ۳S + ۳(\frac{n(n+۱)}{۲}) + n \\
&\rightarrow n(n^۲ + ۳n + ۳) - \frac{(۳n(n+۱)}{۲} - n = ۳S \\
&\rightarrow S = \frac{n}{۶}[۲n^۲ + ۶n + ۶ - ۳(n+۱) - ۲] \\
&= \frac{n}{۶}[۲n^۲ + ۳n + ۱] = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}
\end{aligned}$$

نکته ٤. به ازای هر عدد n طبیعی داریم:

$$۱)\ ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$
$$۲)\ ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$
$$۳)\ ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \cdots + n^۳ = [\frac{n(n+۱)}{۲}]^۲ = (۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n)^۲$$

۱-۲ تجزیه

تبدیل یک عبارت جبری به صورت ضرب دو یا چند عبارت جبری را تجزیه‌ی آن عبارت جبری می‌نامند. مثلاً $۲x^۲+۳x+۱$ می‌توان به صورت $(۲x+۱)(x+۱)$ تجزیه کرد زیرا از ضرب $(x+۱)$ در $(۲x+۱)$ عبارت $۲x^۲+۳x+۱$ به وجود می‌آید.

روش‌های تجزیه

۱. استفاده از اتحادها: در اغلب اتحادهایی که در قسمت قبل آوردیم، یک طرف تساوی به صورت حاصل‌ضرب چند عبارت جبری است. به طور مثال تجزیه‌ی عبارت $a^۲+۴b^۲-۴ab$ با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای به صورت $(a-۲b)^۲$ است.

مثال ۱-۹ عبارت $x^۳+y^۳-۳xy+۱$ را تجزیه کنید.

حل: می‌دانیم که در اتحاد اویلر تساوی زیر برقرار است.

$$a^۳+b^۳+c^۳-۳abc=(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲-ab-bc-ca)$$

حال با فرض $a=x$، $b=y$ و $c=۱$ داریم:

$$x^۳+y^۳+۱^۳-۳(x)(y)(۱)=(x+y+۱)(x^۲+y^۲+۱-x-y-xy)$$

۲. فاکتورگیری: در این روش از عوامل مشترک عبارات جبری در صورت مفید بودن فاکتور می‌گیریم به عنوان مثال تجزیه‌ی عبارت $۱۵x^۲y^۴+۲۰x^۳y^۳+۱۵x^۴y^۲$ با فاکتورگرفتن از عبارت $۵x^۲y^۲$ به صورت زیر خواهد بود:

$$۱۵x^۴y^۲+۲۰x^۳y^۳+۱۵x^۲y^۴=۵x^۲y^۲(۳x^۲+۴xy+۳y^۲)$$

۳. دسته‌بندی: هر وقت شکل ظاهری یک عبارت جبری نشان دهنده‌ی اتحادی نباشد، با دسته‌بندی جمله‌ها و استفاده از روابط میان بعضی از آن‌ها، عبارت را برای استفاده از یک اتحاد و یا تولید یک عامل مشترک آماده می‌کنیم. به عنوان مثال برای تجزیه‌ی $xy+x+y+۱$ به صورت زیر ابتدا با دسته‌بندی متغیرها، کل عبارت را آماده‌ی فاکتورگیری می‌کنیم:

$$xy+x+y+۱=x(y+۱)+(y+۱)=(y+۱)(x+۱)$$

مثال ۱-۱۰ عبارت $x^۳+x^۲-y^۳-y^۲$ را تجزیه کنید.

حل: x^{3} و $-y^{3}$ را با هم و x^{2} و $-y^{2}$ را نیز با هم دسته‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}x^{3}+x^{2}-y^{3}-y^{2} &= (x^{3}-y^{3})+(x^{2}-y^{2})\\ &= (x-y)(x^{2}+xy+y^{2})+(x-y)(x+y)\\ &= (x+y)(x^{2}+xy+y^{2}+x+y)\end{aligned}$$

۴. شکستن: در دسته‌بندی جمله گاهی مجبوریم بعضی از جمله‌ها را به جزء‌های دیگری تفکیک کنیم تا بتوانیم آن‌ها را دسته‌بندی کنیم.

مثال ۱-۱۱ عبارت $x^{3}-2x+1$ را تجزیه کنید.

حل: با شکستن عدد ۱ به صورت ۱ − ۲ داریم:

$$\begin{aligned}x^{3}-2x+1 &= x^{3}-2x+2-1=(x^{3}-1)+(2-2x)\\ &= (x-1)(x^{2}+x+1)-2(x-1)=(x-1)(x^{2}+x+1-2)\\ &= (x-1)(x^{2}+x-1)\end{aligned}$$

۵. افزودن و کاستن: گاهی در تجزیه مجبور می‌شویم یک یا چند جمله را به عبارت اضافه و کم کنیم تا تجزیه راحت‌تر شود. این راه از مهم‌ترین راه‌های تجزیه است.

مثال ۱-۱۲ عبارت $x^{4}+4$ را تجزیه کنید.

حل: با افزودن و کاستن جمله‌ی $4x^{2}$ به عبارت داریم:

$$\begin{aligned}x^{4}+4 &= x^{4}+4+4x^{2}-4x^{2}=(x^{4}+4x^{2}+4)-4x^{2}\\ &= (x^{2}+2)^{2}-(2x)^{2}=(x^{2}+2-2x)(x^{2}+2+2x)\end{aligned}$$

مثال ۱-۱۳ عبارت $a^{2}b+a^{2}c+b^{2}a+b^{2}c+c^{2}a+c^{2}b+2abc$ را تجزیه کنید.

حل: $2abc$ را به صورت $abc+abc$ می‌نویسیم و به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&(a^{2}b+b^{2}a)+(b^{2}c+abc)+(c^{2}a+c^{2}b)+(a^{2}c+abc)\\ &= ab(a+b)+bc(a+b)+c^{2}(a+b)+ac(a+b)\end{aligned}$$

$$= (a+b)(ab+bc+c^{2}+ac) = (a+b)[b(a+c)+c(a+c)]$$
$$= (a+b)(b+c)(c+a)$$

مثال ۱-۱۴ اعداد a، b و c باید چه رابطه‌ای داشته باشند تا عبارت $ax^{2}+bx+c$ تجزیه‌پذیر شود؟

حل:

$$ax^{2}+bx+c = a(x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a\left(x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{2}}{4a^{2}}-\frac{b^{2}}{4a^{2}}-\frac{b^{2}}{4a^{2}}+\frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left[(x+\frac{b}{2a})^{2}-(\frac{b^{2}-4ac}{4a^{2}})\right]$$
$$= a\left[(x+\frac{b}{2a})-\frac{\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}\right]\left[(x+\frac{b}{2a})+\frac{\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}\right]$$

همان‌طورکه معلوم است شرط تجزیه‌پذیری، منفی نشدن عبارت $b^{2}-4ac$ است یعنی باید $b^{2}\geq 4ac$ باشد.

نکته ۵. سه‌جمله‌ای درجه دوم $(ax^{2}+bx+c)$ با شرط $b^{2}\geq 4a$ قابل تجزیه شدن است و راه کلی تجزیه‌ی این عبارت فاکتورگیری از a و افزودن و کاستن $\frac{b^{2}}{4a^{2}}$ است. به این روش در اصطلاح «مربع کامل‌سازی» می‌گویند.

مثال ۱-۱۵ عبارت $x^{10}+x^{5}+1$ را تجزیه کنید.

حل:

$$x^{10}+x^{5}+1 = x^{10}+x^{9}-x^{9}+x^{8}-x^{8}+x^{7}-x^{7}+x^{6}-x^{6}$$
$$+x^{5}-x^{5}+x^{4}-x^{4}+x^{3}-x^{3}+x^{2}-x^{2}+x-x+1 =$$
$$= (x^{10}+x^{9}+x^{8})-(x^{9}+x^{8}+x^{7})+(x^{7}+x^{6}+x^{5})-(x^{6}+x^{5}+x^{4})$$
$$+(x^{5}+x^{4}+x^{3})-(x^{3}+x^{2}+x)+(x^{2}+x+1)$$
$$= x^{8}(x^{2}+x+1)-x^{7}(x^{2}+x+1)+x^{5}(x^{2}+x+1)-x^{4}(x^{2}+x+1)$$
$$-x^{4}(x^{2}+x+1)+x^{3}(x^{2}+x+1)-x(x^{2}+x+1)+(x^{2}+x+1)$$
$$= (x^{2}+x+1)(x^{8}-x^{7}+x^{5}-x^{4}+x^{3}-x+1)$$

۶. ریشه‌یابی: اگر یک عبارت جبری به ازای $x = a$ برابر با صفر باشد می‌توان نتیجه گرفت که عبارت جبری فوق‌الذکر بر عبارت $x - a$ بخش‌پذیر است،[۱] یعنی $x - a$ یکی از عوامل است که در تجزیه‌ی این عبارت جبری به وجود می‌آید.

مثال ۱-۱۶ عبارت $x^۳ + ۳x^۲ - ۴$ را تجزیه کنید.

حل: با کمی دقت حاصل عبارت فوق به ازای $x = ۱$، صفر می‌شود، پس عبارت فوق بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است. از تقسیم $x^۳ + ۳x^۲ - ۴$ بر $x - ۱$ خارج‌قسمت $(x^۲ + ۴x + ۴)$ که همان $(x + ۲)^۲$ می‌باشد، به‌دست خواهد آمد. پس:

$$x^۳ + ۳x^۲ - ۴ = (x - ۱)(x + ۲)^۲$$

این جلسه را با حل دو سؤال از المپیادها به پایان می‌رسانیم.

مثال ۱-۱۷ x و y دو عدد صحیح متوالی هستند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد عبارت $x^۲ + y^۲ + (xy)^۲$ درست است؟

«المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۷۷»

الف) مجموعه رقم‌های یکان آن‌ها شامل مجموعه $\{۰, ۱, ۳, ۵, ۶, ۹\}$ است.

ب) همواره مربع کامل است.

ج) به ازای مقادیری از x و y، عددی اول است.

د) همواره عددی مرکب است.

ه) هیچ‌کدام

حل: چون x و y متوالی‌اند می‌توان $y = x + ۱$ فرض کرد، پس:

$$x^۲ + y^۲ + (xy)^۲ = x^۲ + (x + ۱)^۲ + [x(x + ۱)]^۲$$
$$= ۲x^۲ + ۲x + ۱ + [x(x + ۱)]^۲$$
$$۲x^۲ + ۲x + ۱ + [x(x + ۱)]^۲$$
$$= ۱ + ۲x(x + ۱) + [x(x + ۱)]^۲ = [۱ + x(x + ۱)]^۲$$

یعنی عدد حاصل همواره مربع کامل است.

۱) این قضیه به صورت مفصل‌تری در جلسه‌ی سوم مورد بحث قرار گرفته است.

مثال ۱-۱۸ x، y و z سه عدد صحیح دلخواه و دوبه‌دو متمایز از یکدیگر هستند. ثابت کنید: $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ بر $5(x-y)(z-x)(y-z)$ بخش‌پذیر است.

«المپیاد ریاضی شوروی ـ ۱۹۶۲»

حل: اگر $x-y=a$ و $y-z=b$ فرض کنیم، آن‌گاه $z-x=-(a+b)$ خواهد بود. حالا بر اساس تغییر متغیرهای‌مان عبارات را تغییر می‌دهیم:

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5=a^5+b^5-(a+b)^5$$

از طرفی با استفاده از اتحادها داریم:

$$a^5+b^5=(a+b)[a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4]$$
$$(a+b)^5=(a+b)(a+b)^4=(a+b)[a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4]$$

با کم کردن طرفین این تساوی‌ها داریم:

$$\begin{aligned}a^5+b^5-(a+b)^5&=(a+b)[-5a^3b-5a^2b^2-4ab^3]\\&=-5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

پس $a^5+b^5-(a+b)^5$ مضرب صحیحی از $-5ab(a+b)$ است یعنی $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ بر $5(x-y)(z-x)(y-z)$ بخش‌پذیر است.

۳-۱ مسائل

۱. حاصل عبارات زیر را با استفاده از اتحادها بیابید.

(الف) $(۲+x+x^۲)(۲-x+x^۲)$

(ب) $۳(۳x+۲)(x-\frac{۲}{۳})(۸۱x^۴+۳۶x^۲+۱۶)$

(ج) $(۱+۲x)^۵$

(د) $(x+y)(x-۲y)(x^۲+xy+۲y^۲)$

(ه) $(x+۲)(x^۲-۲x+۴)(x^۳-۸)$

(و) $(۳x^۲-۳)^۲(x^۴+x^۲+۱)^۲(x^۶+۱)^۲$

۲. درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

(الف) $(a+b+c)^۳=a^۳+b^۳+c^۳+۳(a+b)(b+c)(c+a)$

(ب) $(a+b+c)^۳=(a+b-c)^۳+(a-b+c)^۳+(-a+b+c)^۳+۲۴abc$

(ج) $(a+b+c)^۳=a^۳+b^۳+c^۳+۳(a+b+c)(ab+bc+ca)+۳abc$

(د) $(x-a)^۲(b-c)+(x-b)^۲(c-a)+(x-c)^۲(a-b)+(a-b)(b-c)(c-a)=۰$

۳. عبارات زیر را تجزیه کنید.

(الف) $(b-c)^۳+(c-a)^۳+(a-b)^۳$

(ب) $x^۴+۷x^۲+۶$

(ج) $x^۳+x^۲+x+۱$

(د) $x^۵+x+۱$

(ه) $x^۴+x^۳+۲x^۲+x+۱$

(و) $x^۷+x^۲+۱$

(ز) $x^۸-x+۱$

(ح) $a^۴+b^۴+c^۴-۲b^۲c^۲-۲c^۲a^۲-۲a^۲b^۲$

(ط) $(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۲۴)-۲۴$

(ی) $x^۴+x^۲+\sqrt{۲}x+۲$

(ک) $(a+b+c)(ab+ac+bc)-abc$

(ل) $۴x^۲+۲y^۲+۶xy+۲x+۳y-۲$

۴. ده ورزشکار در مسابقه‌ی تنیس روی میز، مسابقه می‌دهند. هر دوی آن‌ها، درست یک بار با هم بازی می‌کنند. اولی در $x_۱$ بازی پیروز شد و در $y_۱$ بازی باخت، دومی $x_۲$ بازی را برد و $y_۲$ بازی را شکست خورد و غیره. ثابت کنید: $x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_{۱۰}^۲=y_۱^۲+y_۲^۲+\cdots+y_{۱۰}^۲$.

«المپیاد ریاضی شوروی در سال ۱۹۸۷»

۵. فرض کنید a عددی گنگ باشد. کدام‌یک از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

«**المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۸**»

الف) دست کم یکی از $a^{۳}$ و $a^{۴}-۱$ گنگ است.

ب) دست کم یکی از $a^{۳}-۱$ و $a^{۶}$ گنگ است.

ج) دست کم یکی از $a^{۲}$، $a^{۳}$ و $a^{۵}$ گویا است.

د) $a^{۲}$ و $a^{۳}-۱$ گنگ هستند.

هـ) حداکثر یکی از $a^{۳}+۱$ و $a^{۴}$ گنگ است.

۶. اگر $r^{۲}-r-۱۰=۰$، آن‌گاه در مورد $(r+۱)(r+۲)(r-۴)$ کدام‌یک از جملات زیر درست است؟

«**المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۷٤**»

الف) عددی صحیح است. ب) مثبت و گنگ است. ج) منفی و گنگ است.

د) گویا اما غیرصحیح است. هـ) غیرحقیقی است.

۷. فرض کنید اعداد حقیقی a، b و c در روابط زیر صدق کنند:

$$۲a+b+c=۰ \quad , \quad ab+ac+bc=۰$$

در این صورت کسر $\frac{a^{۲}+۱}{b^{۲}+c^{۲}+۱}$ چند مقدار مختلف را می‌تواند بپذیرد؟

«**المپیاد مقدماتی ریاضی ـ ۱۳۸۱**»

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) بی‌نهایت

۸. فرض کنید مجموعه‌ی A به شکل زیر تعریف شده باشد:

$$A=\{a^{۲}+b^{۲} | a,b\in N\cup\{۰\}\}$$

در این صورت:

«**المپیاد مقدماتی ریاضی ـ ۱۳۸۱**»

الف) برای هر دو دد x و y در A داریم: $x+y\in A$

ب) برای هر دو عدد y و x در A داریم: $|x-y|\in A$

ج) برای هر دو عدد x و y در A داریم: $xy\in A$

د) اگر $x^{۲}\in A$ آن‌گاه $|x|\in A$

هـ) هیچ کدام از موارد بالا صحیح نیست.

۹. سه رقم سمت راست $۲۱^{۶۴}$ کدام است؟

«**المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۷**»

الف) ۶۸۱ ب) ۸۸۱ ج) ۴۸۱ د) ۲۲۱ هـ) ۳۸۱

۱۰. حاصل عبارت $\sqrt{(۴۵-۴\sqrt{۴۱})^۳}-\sqrt{(۴۵+۴\sqrt{۴۱})^۳}$ کدام است؟

«المپیاد مقدماتی ریاضی ـ ۱۳۸۳»

الف) ۵۰۸ ب) ۵۰۴ ج) $۴\sqrt{۴۱}$ د) $۱۰۶\sqrt{۴۱}$ هـ) $۹۰\frac{۳}{۴}$

۱۱. پس از بسط دادن $(۱+۲x+۳x^۲+\cdots+۹x^۸+۱۰x^۹)^۲$، چند تا از ضرایب فرد است؟

«المپیاد ریاضی در ایران ـ ۸۳»

الف) ۱ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ هـ) ۱۰

۱۲. اگر

$$S=\frac{(۲^۳-۱)(۳^۳-۱)(۴^۳-۱)\cdots(۱۰۰^۳-۱)}{(۲^۳+۱)(۳^۳+۱)(۴^۳+۱)\cdots(۱۰۰^۳+۱)}$$

کدام‌یک از مقادیر زیر به S نزدیک‌تر است؟

«المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۷۵»

الف) ۰٫۶ ب) ۰٫۶۷ ج) ۰٫۶۶۷ د) ۰٫۶۶۶۷ هـ) ۰٫۶۶۶۶۷

(راهنمایی: $n^۲-n+۱=(n-۱)^۲+(n-۱)+۱$)

۱۳. ۱۹۶۳ رقم بعد از ممیز را در بیان دهدهی عدد زیر پیدا کنید:

$$A=(\sqrt{۲۶}+۵)^{۱۹۶۳}$$

«المپیاد ریاضی لنینگراد ۱۹۶۳»

۱-٤ حل مسائل

.۳

الف. از اتحاد اویلر استفاده می‌کنیم.

د. جملات $(x^{۴} - x^{۴} + x^{۳} - x^{۳} + x^{۲} - x^{۲})$ را اضافه می‌کنیم.

و. جملات $(x^{۶} - x^{۶} + x^{۵} - x^{۵} + x^{۴} - x^{۴} + x^{۳} - x^{۳})$ را اضافه می‌کنیم.

ز. جملات $(x^{۷} - x^{۷} + x^{۶} - x^{۶} + x^{۵} - x^{۵} + x^{۴} - x^{۴} + x^{۳} - x^{۳} + x^{۲} - x^{۲})$ را اضافه می‌کنیم.

ح. $۲b^{۲}c^{۲}$ را اضافه و کم می‌کنیم $\Leftarrow$ $(a^{۲} - b^{۲} - c^{۲})^{۲} - ۴b^{۲}c^{۲}$

ی. $۲x^{۲}$ و ۱ را اضافه و کم می‌کنیم، حاصل تجزیه: $(x^{۲} + \sqrt{۲} + ۱)(x^{۲} - \sqrt{۲}x + ۱)$

ک. با ضرب عبارت‌ها به چندجمله‌ای: $۲abc + a^{۲}b + ab^{۲} + a^{۲}c + ac^{۲} + bc^{۲} + b^{۲}c$

می‌رسیم که با نوشتن $۲abc = abc + abc$ می‌توان تجزیه نمود.

.٤ مجموع بردها با مجموع باخت‌ها برابر است $x_{۱} + \cdots + x_{۱۰} = y_{۱} + \cdots + y_{۱۰}$

در نهایت از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

.۵ حداقل یکی از $a^{۳}$ و $a^{۴}$ گنگ هستند زیرا اگر هر دوگویا باشد $a = \dfrac{a^{۴}}{a^{۳}}$ هم باید گویا باشد که خلاف فرض است بنابراین حداقل یکی از $a^{۳}$ و $a^{۴} - ۱$ گنگ است.

.۶

$$(r+۱)(r-۴) = r^{۲} - ۳r - ۴ = ۶ - ۲r$$

$$\Rightarrow -۲(r-۳)(r+۲) = -۲(r^{۲} - r - ۶) = -۸ \quad \text{عددی صحیح است}$$

.۷

$$\begin{matrix} ۲a = -(b+c) \\ a(b+c) = -(bc) \end{matrix} \Rightarrow b^{۲} - c^{۲} = ۰ \Rightarrow \frac{a^{۲}+۱}{b^{۲}+c^{۲}+۱} = a^{۲} + ۱$$

یک مقدار می‌گیرد.

.۸ با توجه به اتحاد لاگرانژ $(x^{۲} + y^{۲})(z^{۲} + t^{۲}) = (xz + yt)^{۲} + (xt - yz)^{۲}$

گزینه‌ی (ج) درست است.

.۹ با استفاده از بسط دوجمله‌ای نیوتن $(۱ + ۲۰)^{۶۴}$ سه رقم آخر را به‌دست می‌آوریم که برابر ۶۸۱ است.

.۱۰ اگر دو عدد طبیعی A و B چنان باشند که $A^{۲} - B$ مربع کامل باشند و $C = \sqrt{A^{۲} + B}$:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{۲}} = \sqrt{\frac{A-C}{۲}}$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{۲}} + \sqrt{\frac{A-C}{۲}}$$

که در این سؤال $A = ۴۵$، $B = ۶۵۶$ و $C = ۳۷$.

۱۱. پس از بسط فقط ضرایب جملاتی که از درجه‌ی ۰، ۴، ۸، ۱۲ و ۱۶ می‌باشند فرد می‌شود.

۱۲. با توجه به $n^۲ + n + ۱ = (n + ۱^۲) - (n + ۱) + ۱$ می‌توان S را به صورت زیر ساده کرد:

$$S = \frac{(۲-۱)(۳-۱)\cdots(۱۰۰-۱)(۱۰۰^۲+۱۰۰+۱)}{(۲+۱)(۳+۱)\cdots(۱۰۰+۱)(۲^۲-۲+۱)}$$
$$= \frac{۲(۱۰۰^۲+۱۰۰+۱)}{۳\times ۱۰۰\times ۱۰۱}) \sim ۰٫۶۶۶۷$$

۱۳. می‌دانیم که $(۵+\sqrt{۲۶})^{۱۹۶۳} + (۵+\sqrt{۲۶})^{۱۹۶۳}$ عددی صحیح است، از طرفی

$$-۰٫۱ < ۵ - \sqrt{۲۶} < ۰ \rightarrow -۱۰^{-۱۹۶۳} < (۵-\sqrt{۲۶})^{۱۹۶۳} < ۰$$

پس تمام ۱۹۶۳ رقم بعد از ممیز صفر می‌باشند.