۱

نامساوی‌های مقدماتی

در این فصل به بررسی خواص ابتدایی اعداد و ابزارهای مورد نیاز در بررسی نابرابری‌ها می‌پردازیم. به خواننده پیشنهاد می‌شود قبل از شروع مطالعه کتاب، مقدمه‌ی کتاب را مطالعه کند.

۱-۱ اعداد حقیقی

یکی از خواص اصلی و مهم اعداد حقیقی رابطه‌ی ترتیبی بین آن‌ها است. رابطه‌ی ترتیبی (بزرگ‌تر یا کوچک‌تر بودن اعداد نسبت به هم) به ما اجازه می‌دهد اعداد را با هم مقایسه کنیم و بررسی کنیم که کدام عدد بزرگ‌تر است و یا این‌که اعداد با هم برابر هستند یا خیر. در ادامه ویژگی‌های این رابطه را بررسی کنیم.

خاصیت ۱. هر عدد حقیقی x دقیقاً یکی از خواص زیر را داراست.

الف) $x = 0$

ب) $x > 0$

ج) $x < 0$

یعنی هر عدد حقیقی یا مثبت است یا منفی یا برابر صفر است.

خاصیت ۲. اگر x, y دو عدد مثبت باشند، $x + y$ و xy نیز اعدادی مثبت هستند.

خاصیت ۳. برای اعداد حقیقی a, b، $a > b$ است اگر و تنها اگر $a - b > 0$.

خاصیت ۴. اگر برای اعداد حقیقی a, b، $ab > 0$، آن‌گاه a, b یا هم‌زمان مثبت‌اند یا هم‌زمان منفی هستند و برعکس، یعنی اگر a و b هم‌زمان مثبت یا منفی باشند $ab > 0$.

نتیجه: برای هر عدد حقیقی a، $a^2 \geq 0$.

مثال ۱-۱ فرض کنید $a > b$ اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی c، $a + c > b + c$ و برعکس.

راه‌حل.

$$a > b \;\Leftrightarrow\; a - b > 0 \;\Leftrightarrow\; a - b + (c - c) > 0$$
$$\Leftrightarrow\; (a + c) - (b + c) > \;\Leftrightarrow\; a + c > b + c$$

در این‌جا دو بار از خاصیت سوم و یک بار از خاصیت دوم بالا استفاده کرده‌ایم.

مثال ۱-۲ فرض کنید a, b, c اعدادی حقیقی باشند که $c > 0$ و $a > b$. ثابت کنید $ac > bc$.

راه‌حل.

$$\begin{cases} a > b \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow\; (a - b)c > 0 \;\Rightarrow\; ac - bc > 0 \;\Rightarrow\; ac > bc$$

مثال ۱-۳ فرض کنید a, b, c اعدادی حقیقی باشند که $c > 0$ و $ac > bc$. ثابت کنید $a > b$.

راه‌حل. شبیه مثال قبل است و به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۱-۴ فرض کنید a, b, c اعدادی حقیقی هستند که $c < 0$ و $a > b$. ثابت کنید $ac < bc$.

راه‌حل.

$$\begin{cases} a > b \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b > 0 \\ -c > 0 \end{cases} \Rightarrow\; (a - b)(-c) > 0 \;\Rightarrow\; bc > ac$$

مثال ۱-۵ a, b دو عدد حقیقی هستند. در این صورت عدد حقیقی $x = a - b$ دقیقاً در یکی از خواص زیر صدق می‌کند. (بنابر خاصیت ۱)

الف) $x = 0$

ب) $x > 0$

ج) $x < 0$

و در نتیجه اعداد a, b دقیقاً در یکی از خواص زیر صدق می‌کنند.

الف) اگر $x = 0$ آن‌گاه $a = b$،

ب) اگر $x > 0$ آن‌گاه $a > b$،

ج) اگر $x < 0$ آن‌گاه $a < b$

مثال ۱-۶ فرض کنید a, b اعدادی حقیقی باشند که $a > ۰$ و $b < ۰$. ثابت کنید $ab < ۰$.

راه‌حل.

$$\begin{cases} a > ۰ \\ b < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > ۰ \\ -b > ۰ \end{cases} \Rightarrow -ab > ۰ \Rightarrow ab < ۰$$

مثال ۱-۷ فرض کنید a, b, c اعدادی حقیقی هستند که $a > b, b > c$. ثابت کنید $a > c$.

راه‌حل.

$$\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b > ۰ \\ b - c > ۰ \end{cases} \Rightarrow (a-b)+(b-c) > ۰ \Rightarrow a-c > ۰ \Rightarrow a > c$$

مثال ۱-۸ فرض کنید a, b, c, d اعدادی حقیقی هستند که $a > b$ و $c > d$. ثابت کنید $a + c > b + d$.

راه‌حل.

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b > ۰ \\ c - d > ۰ \end{cases} \Rightarrow (a-b)+(c-d) > ۰ \Rightarrow (a+c)-(b+d) > ۰$$

که معادل است با $a + c > b + d$.

مثال ۱-۹ فرض کنید $b > a > ۰$ و $d > c > ۰$ اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید $bd > ac$.

راه‌حل. c عددی مثبت است و $b > c$. در نتیجه طبق مثال ۱ـ۲ $bc > ac$. از طرفی b عددی مثبت است و $d > c$. پس مجدداً طبق مثال ۱ـ۲ $bd > bc$. در نتیجه:

$$bd > bc > ac \Rightarrow bd > ac$$

نتیجه: اگر $a > b$ اعدادی مثبت باشند، $a^۲ > b^۲$.

مثال ۱-۱۰ فرض کنید $۰ \leq a < b \leq ۱$ اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید:

الف) $۱ \geq \dfrac{b-a}{۱-ab} \geq ۰$

ب) $۱ \geq \dfrac{a}{۱+b} + \dfrac{b}{۱+a} \geq ۰$

ج) $\dfrac{۱}{۴} \geq ab^۲ - ba^۲ \geq ۰$

راه‌حل. الف) بدیهی است $\frac{b-a}{1-ab} \geq 0$. زیرا هم صورت و هم مخرج آن مثبت است. از طرفی:

$$1 \geq \frac{b-a}{1-ab} \Leftrightarrow 1-ab \geq b-a \Leftrightarrow 1+a \geq b(1+a) \Leftrightarrow 1 \geq b$$

ب) واضح است $\frac{b}{1+a} + \frac{a}{1+b} \geq 0$. از طرفی:

$$\begin{aligned} 1 \geq \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} &\Leftrightarrow (1+a)(1+b) \geq a(1+a) + b(1+b) \\ &\Leftrightarrow 1+ab \geq a^2+b^2 \\ &\Leftrightarrow 1-a^2 \geq b^2-ab \Leftrightarrow (1-a)(1+a) \geq b(b-a) \\ &\Leftrightarrow 1+a \geq b-a \end{aligned}$$

که بدیهی است.

ج) مشخص است $ab^2-ba^2 = ab(b-a)$. پس مشخص است $ab^2-ba^2 \geq 0$.

از طرفی به راحتی می‌توان دید $a(b-a) \leq \frac{b^2}{4}$. پس:

$$ab(b-a) \leq b \times \frac{b^2}{4} = \frac{b^3}{4} \leq \frac{1}{4}$$

مثال ۱-۱۱ m, n اعدادی طبیعی هستند. ثابت کنید:

$$\frac{m}{n} < \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{m+2n}{m+n} > \sqrt{2}$$

راه‌حل.

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} < \sqrt{2} &\Leftrightarrow \frac{m+n}{n} < \sqrt{2}+1 \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{m+n} > \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \frac{m+2n}{m+n} > \sqrt{2} \end{aligned}$$

تمرین‌های پایان بخش

۱. اگر $a > ۰$ عددی مثبت باشد، ثابت کنید $\frac{۱}{a} > ۰$.

۲. a, b اعدادی مثبت هستند. ثابت کنید $\frac{a}{b} > ۰$.

۳. فرض کنید $a > ۱$ عددی مثبت است. ثابت کنید $a^۲ > a$.

۴. فرض کنید $a < ۱$ عددی مثبت است. ثابت کنید $a^۲ < a$.

۵. فرض کنید a, b اعدادی حقیقی باشند که $b > ۰$. ثابت کنید $\frac{a}{b} > ۱$ اگر و تنها اگر $a > b$.

۶. برای عدد طبیعی n و اعداد حقیقی مثبت b, a که $a > b$ ثابت کنید $a^n > b^n$.

۱-۲ قدرمطلق

قدرمطلق عدد حقیقی x که با نماد $|x|$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{اگر: } x \geq ۰ \\ -x & \text{اگر: } x < ۰ \end{cases}$$

در حقیقت $|x|$ برابر فاصله‌ی عدد x تا عدد صفر در محور اعداد حقیقی است.

هم‌چنین برای اعداد حقیقی a, b، $|a-b|$ برابر فاصله‌ی اعداد a, b از یکدیگر است.

مثال ۱-۱۲ خواص زیر به سادگی قابل بررسی هستند.

الف) $|x| \geq ۰$

ب) $|x| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$

ج) $|-x| = |x|$

د) $|x|^۲ = x^۲$

ه) $|ab| = |a||b|$

و) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ که $b \neq ۰$

خاصیت ۱. نامساوی مثلث

برای اعداد حقیقی a, b، همیشه رابطه زیر که به آن نابرابری مثلث می‌گوییم، برقرار است.

$$|a| + |b| \geq |a+b|$$

و تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که $ab \geq ۰$.

اثبات. دقت کنید طرفین نامساوی مثلث مثبت هستند. پس:

$$\begin{aligned} |a| + |b| \geq |a+b| &\Leftrightarrow (|a| + |b|)^۲ \geq |a+b|^۲ \\ &\Leftrightarrow a^۲ + b^۲ + ۲|ab| \geq a^۲ + b^۲ + ۲ab \\ &\Leftrightarrow ۲|ab| \geq ۲ab \Leftrightarrow |ab| \geq ab \end{aligned}$$

نامساوی اخیر نتیجه‌ی بدیهی تعریف قدرمطلق است و تساوی زمانی است که $|ab| = ab$، یا معادلاً $ab \geq 0$.

خاصیت ۲. حالت کلی نامساوی مثلث

این خاصیت تعمیم خاصیت ۱ است. برای اعداد حقیقی $a_1, a_2, \cdots, a_n$:

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \geq |a_1 + a_2 + \cdots + a_n|$$

و حالت تساوی زمانی است که همه‌ی اعداد ناصفر در بین $a_1, \cdots, a_n$ هم‌علامت باشند.

اثبات. روی n استقرا بزنید.

نتیجه: برای اعداد حقیقی $a_1, a_2, \cdots, a_n$:

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \geq |\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n|$$

مثال ۱-۱۳ برای اعداد حقیقی x, y, a, b ثابت کنید:

الف) اگر $|x| \leq b$، آن‌گاه $-b \leq x \leq b$

ب) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

راه‌حل. الف) مشخص است که b و $|x|$ هر دو مثبت هستند. در نتیجه:

$$b \geq |x| \;\Rightarrow\; -|x| \geq -b \;\Rightarrow\; b \geq |x| \geq 0 \geq -|x| \geq -b$$

حال با توجه به این‌که $|x|$ برابر x یا $-x$ است، نتیجه می‌گیریم $-b \leq x \leq b$.

ب) مشخص است طرفین نامساوی مثبت هستند. در نتیجه:

$$\begin{aligned} |a - b| \geq \big||a| - |b|\big| &\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq (|a| - |b|)^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq a^2 + b^2 - 2|ab| \\ &\Leftrightarrow -2ab \geq -2|ab| \;\Leftrightarrow\; |ab| \geq ab \end{aligned}$$

که نامساوی اخیر بنابر تعریف درست است.

تمرین‌های پایان بخش

۱. a, b, c, d اعدادی حقیقی هستند که $c \geq d$ و $a \geq b$. ثابت کنید:

$$ac + bd \geq ad + bc$$

۲. a, b, c, d اعدادی حقیقی هستند که $a + d = b + c$. ثابت کنید:

$$(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geq \circ$$

«جمهوری چک ـ اسلواکی ۲۰۰۴»

۳. n عددی طبیعی است. ثابت کنید قسمت اعشاری عدد $\sqrt{۴n^۲ + n}$ از $\frac{۱}{۴}$ کم‌تر است.

٤. a, b, c اعدادی حقیقی هستند. ثابت کنید:

$$|a| + |b| + |c| + |a+b+c| \geq |a+b| + |b+c| + |c+a|$$

۱-۳ چندجمله‌ای درجه‌ی دو $(ax^۲ + bx + c)$

یکی از مفیدترین نامساوی‌ها برای اعداد حقیقی، نامساوی $x^۲ \geq ۰$ است که برای هر عدد حقیقی x برقرار است. با استفاده از نامساوی $x^۲ \geq ۰$، نامساوی‌های دیگر را می‌توان اثبات کرد. (از قبیل نامساوی‌های واسطه و کوشی شوارتز که در فصل‌های آینده بررسی می‌شوند.) از جمله با استفاده از این نامساوی می‌توان حداقل یا حداکثر عبارت $ax^۲ + bx + c$ را به ازای اعداد حقیقی دلخواه a, b, c یافت. از این عبارت به تناوب در مسائل نامساوی استفاده می‌شود.

ابتدا فرض کنید $a > ۰$ باشد. چندجمله‌ای درجه‌ی دو $ax^۲ + bx + c$ به ازای $x = \frac{-b}{۲a}$ حداقل مقدار خود را می‌گیرد و مقدار حداقل نیز برابر $c - \frac{b^۲}{۴a}$ است. زیرا:

$$ax^۲ + bx + c = a(x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{b^۲}{۴a^۲}) + c - \frac{b^۲}{۴a} = a(x + \frac{b}{۲a})^۲ + c - \frac{b^۲}{۴a}$$

از آنجا که $(x + \frac{b}{۲a})^۲ \geq ۰$ و حداقل آن برابر صفر است و به ازای $x = \frac{-b}{۲a}$ برابر صفر می‌شود:

$$ax^۲ + bx + c = a(x + \frac{b}{۲a})^۲ + c - \frac{b^۲}{۴a} \geq c - \frac{b^۲}{۴a}$$

مشابهاً اگر $a < ۰$ باشد، چندجمله‌ای درجه‌ی دو $ax^۲ + bx + c$ به ازای $x = \frac{-b}{۲a}$ حداکثر مقدار خود را می‌گیرد و مقدار حداکثر نیز برابر $c - \frac{b^۲}{۴a}$ است.

$$ax^۲ + bx + c = a(x + \frac{b}{۲a})^۲ + c - \frac{b^۲}{۴a} \leq c - \frac{b^۲}{۴a} = \frac{۴ac - b^۲}{۴a}$$

یادآوری: یک عبارت بسیار مهم در برخورد با چندجمله‌ای $ax^۲ + bx + c$، $b^۲ - ۴ac$ است که به آن مبین چندجمله‌ای گفته می‌شود و از نماد Δ برای نمایش آن استفاده می‌کنیم. به‌طور مثال اگر $\Delta < ۰$ باشد، چندجمله‌ای درجه‌ی دوم ما ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال ۱-۱٤ x, y اعدادی مثبت هستند که $x + y = ۲a$. ثابت کنید حداکثر عبارت xy زمانی است که $x = y = a$.

راه‌حل.

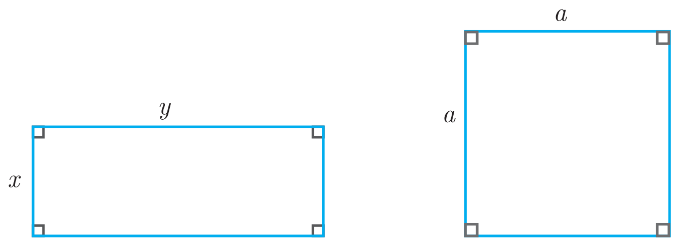
$$x + y = ۲a \Rightarrow y = ۲a - x \Rightarrow xy = x(۲a - x) = ۲ax - x^۲ = -(x - a)^۲ + a^۲$$

در نتیجه:

$$xy = -(x - a)^۲ + a^۲ \leq a^۲$$

و زمانی xy حداکثر خود (یعنی $a^{۲}$) می‌شود که $x = a$. یعنی $x = y = a$.

مثال فوق را می‌توان به‌صورت زیر بررسی کرد. اگر مستطیلی با طول و عرض x, y داشته باشیم که محیط آن برابر $۴a$ باشد، $۲(x + y) = ۴a$، مساحت آن، یعنی xy زمانی حداکثر است که $x = y = a$. یعنی مستطیل، یک مربع باشد.



$۲(x + y) = ۴a$ $x = y = a$

$xy \leq a^{۲}$ $xy = a^{۲}$

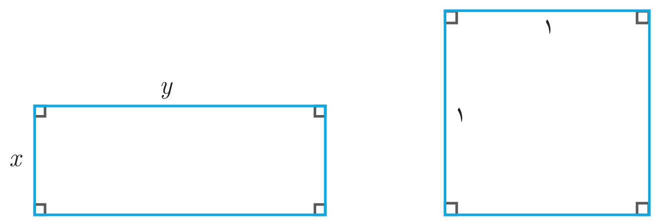
مثال ۱-۱۵ فرض کنید x, y اعدادی مثبت باشند که $xy = ۱$. حاصل $x + y$ زمانی می‌نیمم است که $x = y = ۱$.

راه‌حل. اگر $xy = ۱$، آن‌گاه $y = \frac{۱}{x}$ و در نتیجه

$$x + y = x + \frac{۱}{x} = (\sqrt{x} - \frac{۱}{\sqrt{x}})^{۲} + ۲ \geq ۲$$

پس حداقل مقدار $x + y$ برابر ۲ است و زمانی برابر ۲ است که $\sqrt{x} = \frac{۱}{\sqrt{x}}$ ، یا معادلاً $x = y = ۱$.

مثال فوق را به‌صورت زیر می‌توان بررسی کرد. در همه‌ی مستطیل‌های با اضلاع x, y با مساحت $xy = ۱$، مربع با اضلاع واحد کم‌ترین محیط را دارد.



$xy = ۱$ $x = y = ۱$

$x + y \geq ۲$ $x + y = ۲$

مثال ۱-۱۶ برای هر عدد حقیقی مثبت x، ثابت کنید $x + \frac{۱}{x} \geq ۲$.

راه‌حل.

$$x + \frac{۱}{x} = (\sqrt{x} - \frac{۱}{\sqrt{x}})^۲ + ۲ \geq ۲$$

حالت تساوی زمانی است که $\sqrt{x} = \frac{۱}{\sqrt{x}}$، یا معادلاً $x = ۱$.

مثال ۱-۱۷ a, b, c سه عدد مثبت هستند. ثابت کنید a, b, c می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند اگر و تنها اگر برای هر $p, q > ۰$ که $p + q = ۱$، داشته باشیم:

$$pa^۲ + qb^۲ > pqc^۲$$

(**یادآوری:** اعداد مثبت a, b, c تنها زمانی می‌توانند طول اضلاع یک مثلث باشند که $c > a + b$، $b > a + c$ و $a < b + c$.)

راه‌حل. فرض کنید

$$Q = pa^۲ + qb^۲ - pqc^۲ = pa^۲ + (۱ - p)b^۲ - p(۱ - p)c^۲ = p^۲c^۲ + (a^۲ - b^۲ - c^۲)p + b^۲$$

در نتیجه Q یک چندجمله‌ای بر حسب p و از درجه‌ی دو است. از قبل می‌دانیم Q همیشه مثبت است، اگر و تنها اگر $\Delta < ۰$ باشد. در نتیجه:

$$\begin{aligned}
Q > ۰ \ &\Leftrightarrow \ \Delta = [(a^۲ - b^۲ - c^۲)^۲ - ۴b^۲c^۲] < ۰ \\
&\Leftrightarrow \ [a^۲ - (b + c)^۲][a^۲ - (b - c)^۲] \geq ۰ \\
&\Leftrightarrow \ [a^۲ - b^۲ - c^۲ - ۲bc][a^۲ - b^۲ - c^۲ + ۲bc] < ۰ \\
&\Leftrightarrow \ (a + b + c)(a - b - c)(a - b + c)(a + b - c) < ۰ \\
&\Leftrightarrow \ (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) > ۰
\end{aligned}$$

بدون کم شدن از کلیت مسأله به سادگی می‌توان دید اگر $a \geq b \geq c$، دو تا از عبارت فوق مثبت هستند. پس اگر ضرب هر سه عبارت مثبت است، باید همگی مثبت باشند. در نتیجه:

$$a + b > c \quad , \quad a + c > b \quad , \quad b + c > a$$

تمرین‌های پایان بخش

۱. فرض کنید a, b اعدادی مثبت هستند. ثابت کنید $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq ۲$.

۲. فرض کنید چندجمله‌ای درجه‌ی دو $ax^۲ + bx + c$ در شرایط زیر صدق کند

$$a > ۰ \;,\; a + b + c \geq ۰ \;,\; a - b + c \geq ۰ \;,\; a - c \geq ۰ \;,\; b^۲ - ۴ac \geq ۰$$

ثابت کنید معادله‌ی $ax^۲ + bx + c$ دو جواب حقیقی دارد که در بازه‌ی $[-۱, ۱]$ قرار دارند.

۳. فرض کنید a, b, c اعدادی مثبت باشند. ثابت کنید عبارت‌های زیر نمی‌توانند هم‌زمان درست باشند.

$$a(۱ - b) > \frac{۱}{۴} \,,\; b(۱ - c) > \frac{۱}{۴} \,,\; c(۱ - a) > \frac{۱}{۴}$$

۲

نامساوی‌های واسطه

در این فصل به بررسی نامساوی‌های واسطه می‌پردازیم. نامساوی‌های واسطه یکی از کاربردی‌ترین روش‌ها در برخورد با نامساوی‌ها هستند. در بخش ۱ و ۲، ابتدا چند حالت خاص را بررسی می‌کنیم. در بخش ۳ حالت کلی را معرفی و اثبات کرده و به بررسی کاربردهای آن می‌پردازیم. بخش ۴ به بررسی جزئی‌تر این نامساوی و اشتباهات رایج و نکات ریز در آن اختصاص دارد. بخش ۵ نیز به حل تمرین‌های مشکل‌تر اختصاص دارد.

یادآوری می‌کنیم قبل از مطالعه‌ی کتاب به خواننده توصیه می‌شود روش مطالعه کتاب را در مقدمه‌ی کتاب مشاهده نماید.

۲-۱ نامساوی‌های واسطه با دو متغیر

قضیه ۲-۱

فرض کنید a, b اعدادی حقیقی و مثبت باشند. تعریف کنید

$$QM = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad , \quad AM = \frac{a+b}{2} \quad , \quad GM = \sqrt{ab} \quad , \quad HM = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

میانگین مربعی — میانگین حسابی — میانگین هندسی — میانگین توافقی

در این‌صورت:

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$

و حالت تساوی در هرکدام از این نابرابری‌ها زمانی رخ می‌دهد که $a = b$.
نامساوی‌های بالا را به‌صورت جداگانه ثابت می‌کنیم و برای هرکدام در ادامه مثال ارائه خواهیم کرد.

اثبات قسمت $QM \geq AM$: (نامساوی مربعی ـ حسابی)

برای اثبات رابطه‌ی فوق تنها باید ثابت کنیم:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2) \geq a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

که نامساوی فوق همواره برقرار است و حالت تساوی زمانی است که $a-b=0$ برقرار باشد، یعنی $a=b$.

مثال ۲-۱ فرض کنید x, y اعدادی حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید:

$$2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$$

راه‌حل. بنابر قضیه ۲ـ۱، برای هر دو عدد حقیقی مثبت، $QM \geq AM$. پس:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2} \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geq (\frac{x+y}{2})^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geq \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow 2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$$

اثبات قسمت $AM \geq GM$: (نامساوی حسابی ـ هندسی)

برای اثبات رابطه‌ی فوق تنها باید ثابت کنیم:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

که نامساوی فوق همواره برقرار است و حالت تساوی زمانی است که $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$ برقرار باشد، یعنی $a=b$.

مثال ۲-۲ فرض کنید x, y اعداد حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید:
$$x^۲ + y^۲ \geq ۲xy$$

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱، برای هر دو عدد حقیقی مثبت، $AM \geq GM$. پس:
$$\frac{x^۲ + y^۲}{۲} \geq \sqrt{x^۲y^۲} = xy \;\Rightarrow\; x^۲ + y^۲ \geq ۲xy$$

مثال ۲-۳ فرض کنید $x > ۰$ عددی حقیقی باشد، ثابت کنید:
$$x + \frac{۱}{x} \geq ۲$$

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱:
$$\frac{x + \frac{۱}{x}}{۲} \geq \sqrt{x.\frac{۱}{x}} = ۱ \qquad (AM - GM)$$
$$\Rightarrow\; x + \frac{۱}{x} \geq ۲$$

بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱ حالت تساوی نیز زمانی است که:
$$x = \frac{۱}{x} \;\Rightarrow\; x^۲ = ۱ \;\Rightarrow\; x = ۱$$

مثال ۲-٤ فرض کنید a, b, x اعدادی حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید:
$$ax + \frac{b}{x} \geq ۲\sqrt{ab}$$

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱:
$$\frac{ax + \frac{b}{x}}{۲} \geq \sqrt{ax.\frac{b}{x}} = \sqrt{ab} \qquad (AM - GM)$$
$$\Rightarrow\; ax + \frac{b}{x} \geq ۲\sqrt{ab}$$

مثال ۲-۵ فرض کنید a, b اعدادی حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید:
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq ۲$$
حالت تساوی را نیز بیابید.

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱:
$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{۲} \geq \sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = ۱ \qquad (AM - GM)$$
$$\Rightarrow\; \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq ۲ab$$

حالت تساوی نیز زمانی است که $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$، یعنی $a=b$.

مثال ۲-۶ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید:

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}\geq ab+ac+bc$$

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱:

$$\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲}\geq \sqrt{a^{۲}b^{۲}}=ab \qquad (AM-GM)$$

و

$$\frac{a^{۲}+c^{۲}}{۲}\geq \sqrt{a^{۲}c^{۲}}=ac \qquad (AM-GM)$$

و

$$\frac{b^{۲}+c^{۲}}{۲}\geq \sqrt{b^{۲}c^{۲}}=bc \qquad (AM-GM)$$

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}=\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲}+\frac{a^{۲}+c^{۲}}{۲}+\frac{b^{۲}+c^{۲}}{۲}\geq ab+bc+ac$$

مثال ۲-۷ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید:

$$(a+b)(a+c)(b+c)\geq ۸abc$$

حالت تساوی را نیز بیابید.

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱:

$$\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab} \qquad (AM-GM) \qquad (\text{حالت تساوی } a=b)$$

$$\frac{b+c}{۲}\geq\sqrt{bc} \qquad (AM-GM) \qquad (\text{حالت تساوی } b=c)$$

$$\frac{a+c}{۲}\geq\sqrt{ac} \qquad (AM-GM) \qquad (\text{حالت تساوی } a=c)$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{۲}\times\frac{b+c}{۲}\times\frac{a+c}{۲}\geq\sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ac}=abc$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c)\geq ۸abc$$

همین‌طور حالت تساوی نیز زمانی است که در هر سه نامساوی حسابی هندسی فوق، تساوی رخ دهد. یعنی $a=b$، $b=c$ و $a=c$. در نتیجه حالت تساوی زمانی است که $a=b=c$.

اثبات قسمت $GM \geq HM$: (نامساوی هندسی ـ توافقی)

برای اثبات کافی است ثابت کنیم:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}} \Leftrightarrow \frac{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}{۲} \geq \frac{۱}{\sqrt{ab}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a+b}{ab}}{۲} \geq \frac{۱}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{a+b}{۲} \geq \frac{ab}{\sqrt{ab}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$$

که نامساوی اخیر، همان $(AM - GM)$ است که از قبل صحت آن را می‌دانیم.

مثال ۲-۸ فرض کنید x, y اعدادی حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y} \geq \frac{۲}{\sqrt{xy}}$$

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱:

$$\sqrt{xy} \geq \frac{۲}{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}} \qquad (GM - HM)$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y} \geq \frac{۲}{\sqrt{xy}}$$

تا اینجا قضیه‌ی ۲ـ۱ به تمامی اثبات شد و مثال‌هایی نیز بررسی شد. در ادامه ممکن است از نامساوی‌های زیر نیز استفاده کنیم که نتایج بدیهی از قضیه‌ی ۲ـ۱ هستند.

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$
$$\Rightarrow QM \geq HM \ , \ QM \geq GM \ , \ AM \geq HM$$

مثال ۲-۹ فرض کنید a, b اعدادی حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید:

$$(a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}) \geq ۴$$

راه‌حل. بنابر قضیه‌ی ۲ـ۱:

$$\frac{a+b}{۲} \geq \frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}} \qquad (AM - HM)$$
$$\Rightarrow (a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}) \geq ۴$$

این بخش را با چند تمرین به پایان می‌بریم و در بخش ۵ مثال‌های دشوارتری را بررسی خواهیم کرد.

تمرین‌های پایان بخش

۱. برای اعداد حقیقی و مثبت x, y, z ثابت کنید:

$$xy + yz + zx \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}$$

۲. برای اعداد حقیقی و مثبت x, y ثابت کنید:

$$x^{۲} + y^{۲} + ۱ \geq xy + x + y$$

حالت تساوی را نیز بیابید.

۳. برای اعداد حقیقی و مثبت x, y, z ثابت کنید:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z} \geq \frac{۱}{\sqrt{xy}} + \frac{۱}{\sqrt{yz}} + \frac{۱}{\sqrt{xz}}$$

٤. برای اعداد حقیقی و مثبت x, y, z ثابت کنید:

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z$$

۵. برای اعداد حقیقی و مثبت x, y, z ثابت کنید:

$$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} \geq x\sqrt{y^{۲} + z^{۲}} + y\sqrt{x^{۲} + z^{۲}}$$

حالت تساوی را نیز بیابید.

۶. برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c, d ثابت کنید:

$$a + b + c + d \geq ۴\sqrt[۴]{abcd}$$

حالت تساوی را نیز بیابید.

۷. برای اعداد حقیقی و مثبت a, b ثابت کنید:

$$a^{۴} + b^{۴} + ۸ \geq ۸ab$$

۸. برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c, d ثابت کنید:

الف) $(a + b + c + d)(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{d}) \geq ۱۶$

ب) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c} \geq ۴$

۹. فرض کنید a, b دو عدد حقیقی و مثبت باشد که جمع آن‌ها برابر k است. ثابت کنید حداکثر مقدار ab برابر $\frac{k^۲}{۴}$ است.

۱۰. فرض کنید a, b دو عدد حقیقی مثبت باشند که $ab = k$. ثابت کنید حداقل مقدار $a + b$ برابر $۲\sqrt{k}$ است.

۱۱. فرض کنید $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ اعدادی حقیقی و مثبت با حاصل‌ضرب ۱ باشند. ثابت کنید:

$$(۱ + a_۱)(۱ + a_۲)\cdots(۱ + a_n) \geq ۲^n$$

۱۲. فرض کنید a, b اعداد حقیقی و مثبت هستند. ثابت کنید:

$$\frac{a^۳}{b} + \frac{b^۳}{a} \geq ۲ab$$

۱۳. برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید:

$$۳(a^۲ + b^۲ + c^۲) \geq (a + b + c)^۲ \geq ۳(ab + ac + bc)$$

۱۴. فرض کنید x, y, z اعدادی حقیقی و مثبت باشند که $x + y + z = ۱$. ثابت کنید:

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq ۱$$

۱۵. فرض کنید a, b, c اعدادی حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید:

$$(a + \frac{۱}{b})(b + \frac{۱}{c})(c + \frac{۱}{a}) \geq ۸$$

۱۶. فرض کنید a, b, c اعداد حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{۲}$$

۱۷. برای اعداد مثبت a, b ثابت کنید:

$$(\frac{a+b}{۲})^۴ \geq \frac{ab(a^۲ + b^۲)}{۲}$$

۱۸. برای اعداد مثبت a, b, c, d ثابت کنید:

$$\frac{۱}{ab} + \frac{۱}{cd} \geq \frac{۸}{(a+b)(c+d)}$$

۲-۳ بررسی نامساوی‌های واسطه

در این بخش به بررسی نامساوی‌های واسطه در حالت کلی می‌پردازیم.

قضیه ۲-۳

فرض کنید $a_1, a_2, \cdots, a_n$، n عددی حقیقی و مثبت باشند. تعریف کنید:

$$QM = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \quad , \quad AM = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

میانگین مربعی — میانگین حسابی

$$GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad , \quad HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

میانگین هندسی — میانگین توافقی

در این‌صورت:

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$

و حالت تساوی زمانی است که $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

اثبات. در اینجا تنها نامساوی $AM \geq GM$ را ثابت می‌کنیم. اثبات $QM \geq AM$ و $GM \geq HM$ کاملاً مشابه است و به عنوان تمرین بر عهده‌ی خواننده می‌گذاریم.

اثبات به روش «استقرای قهقرایی» است. گزاره‌ی $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ را با نماد P_n نشان می‌دهیم. برای اثبات به روش استقرای قهقرایی، باید سه گزاره‌ی زیر را ثابت کنیم.

۱. ابتدا ثابت می‌کنیم P_2 برقرار است.

۲. ثابت می‌کنیم درستی P_n، درستی P_{2n} را نتیجه می‌دهد.

۳. ثابت می‌کنیم درستی P_n، درستی P_{n-1} را نتیجه می‌دهد.

اگر «۱، ۲ و ۳» اثبات شوند، آنگاه P_n برای تمام مقادیر $n \geq 2$ برقرار خواهد بود.*

اثبات ۱: این همان نامساوی حسابی ـ هندسی با دو متغیر است که در بخش ۱ اثبات شد.

اثبات ۲: اگر P_n برقرار باشد:

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n} \\ & = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ & \geq 2(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4} + \cdots + \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}) \end{aligned}$$

*) برای اطلاعات بیشتر در مورد استقرای قهقرایی به کتاب‌های ترکیبیات مراجعه کنید.

$$\geq 2n\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\times\sqrt{a_3a_4}\times\cdots\times\sqrt{a_{2n-1}a_{2n}}}$$
$$= 2n\sqrt[2n]{a_1a_2a_3\cdots a_{2n}}$$

پس P_{2n} برقرار است.

اثبات ۳: فرض کنید $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$، $n-1$ عدد مثبت باشند. تعریف کنید

$$g = \sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$$

با استفاده از فرض درستی P_n:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+g}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}g} = \sqrt[n]{g^{n-1}g} = g$$
$$\Rightarrow \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$$

پس P_{n-1} نیز برقرار است. در نتیجه، برای هر عدد طبیعی n، P_n برقرار است.

مثال ۲-۱۷ فرض کنید a, b, c, d اعداد مثبت باشند، ثابت کنید:

$$(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc$$

راه‌حل.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+6abc\\ &\quad+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)\\ &\geq a^3+b^3+c^3+6abc+3(6\sqrt[6]{a^6b^6c^6})\\ &= a^3+b^3+c^3+24abc\end{aligned}$$

مثال ۲-۱۸ برای اعداد حقیقی و مثبت $a_1, a_2, \cdots, a_n$، ثابت کنید:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}) \geq n^2$$

راه‌حل. با استفاده از نامساوی حسابی ـ هندسی:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})$$
$$\geq (n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n})(n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}) = n^2$$

مثال ۲-۱۹ تعریف کنید $H_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}$. ثابت کنید:

$$n(n+۱)^{\frac{۱}{n}} \leq n + H_n \qquad (n \geq ۲)$$

راه‌حل. با نوشتن $n = \underbrace{۱ + ۱ + \cdots + ۱}_{n \text{ تا}}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n + H_n &= n + (۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}) \\ &= (۱+۱) + (۱ + \frac{۱}{۲}) + (۱ + \frac{۱}{۳}) + \cdots + (۱ + \frac{۱}{n}) \\ &= ۲ + \frac{۳}{۲} + \frac{۴}{۳} + \cdots + \frac{n+۱}{n} \geq \\ n\sqrt[n]{۲ \times \frac{۳}{۲} \times \frac{۴}{۳} \times \cdots \times \frac{n+۱}{n}} &= n\sqrt[n]{n+۱} \end{aligned}$$

که همان حکم مطلوب است.

مثال ۲-۲۰ a, b, c اعدادی مثبت با مجموع ۱ هستند. ثابت کنید:

$$(\frac{۱}{a} + ۱)(\frac{۱}{b} + ۱)(\frac{۱}{c} + ۱) \geq ۶۴$$

راه‌حل. بنابر نامساوی $AM - GM$:

$$\frac{۱}{a} + ۱ = \frac{۱}{۳a} + \frac{۱}{۳a} + \frac{۱}{۳a} + ۱ \geq ۴\sqrt[۴]{\frac{۱}{۲۷a^۳}}$$

مشابهاً:

$$\frac{۱}{b} + ۱ \geq ۴\sqrt[۴]{\frac{۱}{۲۷b^۳}} \;،\; \frac{۱}{c} + ۱ \geq ۴\sqrt[۴]{\frac{۱}{۲۷c^۳}}$$

از طرفی بنابر فرض $a + b + c = ۱$:

$$\frac{۱}{۳} = \frac{a+b+c}{۳} \geq \sqrt[۳]{abc} \Rightarrow \frac{۱}{abc} \geq ۳^۳ \qquad (۱)$$

در نتیجه:

$$(\frac{۱}{a} + ۱)(\frac{۱}{b} + ۱)(\frac{۱}{c} + ۱) \geq ۶۴\sqrt[۴]{\frac{۱}{۳^۹ a^۳ b^۳ c^۳}} \geq ۶۴$$

مثال ۲-۲۱ a, b, c اعدادی مثبت هستند. ثابت کنید:

$$a + b + c \geq \frac{۲ab}{a+b} + \frac{۲bc}{b+c} + \frac{۲ca}{c+a}$$

راه‌حل. بنابر نامساوی $AM - HM$:

$$\frac{a+b}{۲} \geq \frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}} = \frac{۲ab}{a+b}$$
$$\frac{a+c}{۲} \geq \frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{c}} = \frac{۲ac}{ac}$$
$$\frac{b+c}{۲} \geq \frac{۲}{\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}} = \frac{۲bc}{b+c}$$

با جمع کردن طرفین رابطه بالا، حکم سؤال نتیجه می‌شود.

مثال ۲-۲۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید:

$$a^۴ + b^۴ + c^۲ \geq \sqrt{۸}abc$$

«روسیه ۱۹۹۲»

راه‌حل. بنابر نامساوی $AM - GM$:

$$a^۴ + b^۴ + c^۲ \geq ۲\sqrt{a^۴b^۴} + c^۲ = ۲a^۲b^۲ + c^۲$$
$$\geq ۲\sqrt{(۲a^۲b^۲) \times c^۲} = ۲\sqrt{۲}abc = \sqrt{۸}abc$$

مثال ۲-۲۳ برای اعداد حقیقی $a, b > ۱$ ثابت کنید:

$$\frac{a^۲}{b-۱} + \frac{b^۲}{a-۱} \geq ۸$$

«روسیه ۱۹۹۲»

راه‌حل.

$$\frac{a^۲}{b-۱} + \frac{b^۲}{a-۱} = \frac{(a-۱)^۲}{b-۱} + \frac{(b-۱)^۲}{a-۱} + ۲(\frac{a-۱}{b-۱} + \frac{b-۱}{a-۱}) + (\frac{۱}{a-۱} + \frac{۱}{b-۱})$$

$$\left(\frac{(a-۱)^۲}{b-۱} + \frac{(b-۱)^۲}{a-۱} + \frac{۱}{a-۱} + \frac{۱}{b-۱}\right) + ۲(\frac{a-۱}{b-۱} + \frac{b-۱}{a-۱}) \geq$$

$$۴\sqrt[۴]{\frac{(a-۱)^۲}{b-۱}\times\frac{(b-۱)^۲}{a-۱}\times\frac{۱}{a-۱}\times\frac{۱}{b-۱}}+۴\sqrt{\frac{a-۱}{b-۱}+\frac{b-۱}{a-۱}}=۸$$

مثال ۲-۲٤ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c, d، ثابت کنید:

$$(a+b+c+d)^۳\geq ۱۶(abc+bcd+cda+dab)$$

راه‌حل. با استفاده از نامساوی $AM-GM$:

$$\begin{aligned}&۱۶(abc+bcd+cda+dab)=۱۶ab(c+d)+۱۶cd(a+b)\\&\leq ۴(a+b)^۲(c+d)+۴(c+d)^۲(a+b)=۴(a+b+c+d)(a+b)(c+d)\\&\leq (a+b+c+d)^۳\end{aligned}$$

مثال ۲-۲۵ جواب‌های مثبت معادله‌ی زیر را بیابید.

$$a^۶+b^۶+c^۶+d^۶+e^۶-۶abcde=-۱$$

راه‌حل.

$$\begin{aligned}&a^۶+b^۶+c^۶+d^۶+e^۶-۶abcd=-۱\\&\Rightarrow\ a^۶+b^۶+c^۶+d^۶+e^۶+۱\\&\qquad\qquad=۶abcde\end{aligned}$$

از طرفی بنابر نامساوی $AM-GM$:

$$a^۶+b^۶+c^۶+d^۶+e^۶+۱\geq ۶\times\sqrt[۶]{a^۶b^۶c^۶d^۶e^۶}=۶abcde$$

و تساوی هنگامی رخ می‌دهد که $a=b=c=d=e=۱$.

پس تنها جواب مثبت معادله $a=b=c=d=e=۱$ است.

مثال ۲-۲۶ a, b دو عدد طبیعی هستند که $ab\geq ۱$. ثابت کنید $۲a^۵+۵b^۲\geq ۷$.

راه‌حل.

$$۲a^۵+۵b^۲=a^۵+a^۵+b^۲+b^۲+b^۲+b^۲+b^۲\geq ۷\sqrt[۷]{a^{۱۰}b^{۱۰}}\geq ۷$$

حالت تساوی نیز زمانی است که $a=b=۱$.

مثال ۲-۲۷ a, b, c اعدادی مثت هستند. ثابت کنید:

$$۳a^۲ + ۲b^۳ + c^۶ \geq ۶abc$$

راه‌حل.

$$۳a^۲ + ۲b^۳ + c^۶ = a^۲ + a^۲ + a^۲ + b^۳ + b^۳ + c^۶ \geq ۶\sqrt[۶]{a^۲a^۲a^۲b^۳b^۳c^۶}$$
$$\Rightarrow \ ۳a^۲ + ۲b^۳ + c^۶ \geq ۶abc$$

مثال ۲-۲۸ a, b اعدادی مثبت و متمایز و n عددی طبیعی است. ثابت کنید:

$$\frac{a + nb}{n + ۱} > \sqrt[n+۱]{ab^n}$$

راه‌حل.

$$\frac{a + nb}{n + ۱} = \frac{a + (\overbrace{b + b + \cdots + b}^{n \text{ تا}})}{n + ۱} \geq \sqrt[n+۱]{ab^n}$$

اما $a \neq b$. پس تساوی اتفاق نمی‌افتد و همیشه $\sqrt[n+۱]{ab^n} < \frac{a + nb}{n + ۱}$.

مثال ۲-۲۹ فرض کنید a, b, c اعدادی مثبت‌اند که $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۳$. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{a^۲ + ۲} + \frac{۱}{b^۲ + ۲} + \frac{۱}{c^۲ + ۲} \geq ۱$$

راه‌حل. بنابر نامساوی $AM - HM$:

$$\frac{۱}{a^۲ + ۲} + \frac{۱}{b^۲ + ۲} + \frac{۱}{c^۲ + ۲} \geq \frac{۹}{(a^۲ + ۲) + (b^۲ + ۲) + (c^۲ + ۲)} = ۱$$

تمرین‌های پایان بخش

۱. k عددی طبیعی و $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ اعدادی مثبت با حاصل‌جمع ۱ هستند. ثابت کنید:

$$a_۱^{-k} + a_۲^{-k} + \cdots + a_n^{-k} \geq n^{k+۱}$$

۲. اعداد مثبت a, b, c, d را در نظر بگیرید که:

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i \geq \sqrt{(n-۱)(\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲)}$$

ثابت کنید a_iها همگی نامنفی‌اند.

۳. $x, y, z \geq ۲$ اعدادی حقیقی هستند. ثابت کنید:

$$(y^۳ + x)(z^۳ + y)(x^۳ + z) \geq ۱۲۵xyz$$

٤. برای مقادیر حقیقی $۰ \leq x \leq ۱$، حداکثر مقدار عبارت $x(۱-x^۳)$ را بیابید.

۵. $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ اعدادی حقیقی و مثبت هستند. $b_۱, b_۲, \cdots, b_n$ جایگشتی از آن‌ها هستند. ثابت کنید:

$$\frac{a_۱}{b_۱} + \frac{a_۲}{b_۲} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq n$$

۶. $a > ۱$ عددی حقیقی و n عددی طبیعی است. ثابت کنید:

$$a^n - ۱ > n(a^{\frac{n+۱}{۲}} - a^{\frac{n-۱}{۲}})$$

۷. a, b, c اعدادی مثبت هستند که $abc = ۱$. ثابت کنید:

$$\frac{۱+ab}{۱+a} + \frac{۱+bc}{۱+b} + \frac{۱+ca}{۱+c} \geq ۳$$

۸. اعداد مثبت $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ را در نظر بگیرید که $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n < ۱$. ثابت کنید:

$$\frac{a_۱a_۲a_۳\cdots a_n[۱-(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)]}{(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)(۱-a_۱)(۱-a_۲)\cdots(۱-a_n)} \leq \frac{۱}{n^{n+۱}}$$

«پیشنهادی المپیاد جهانی ریاضی ۱۹۹۸»

۹. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ اعدادی مثبت هستند که:

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}=1$$

ثابت کنید:

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}\geq(n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$$

۱۰. فرض کنید «$b_1, b_2, \cdots, b_n$» و «$a_1, a_2, \cdots, a_n$» اعدادی مثبت باشند که:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

ثابت کنید:

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}$$

۱۱. a, b, c اعدادی مثبت هستند، ثابت کنید:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$$

«آمریکا ۱۹۹۸»

۱۲. a, b, c اعدادی مثبت با مجموع ۱ هستند. ثابت کنید:

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geq 8$$

۱۳. a, b, c اعدادی مثبت هستند که $abc=1$. ثابت کنید:

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}$$

«چک‌اسلواکی ۲۰۰۵»

۱۴. a, b, c اعدادی مثبت‌اند که $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1$. ثابت کنید:

$$abc\geq 8$$

۱۵. برای اعداد مثبت a, b, c ثابت کنید:

$$\frac{(a+b+c)^2}{3}\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$$

«روسیه ۱۹۹۱»

۱۶. برای اعداد گویای مثبت $q_۱, q_۲, \cdots, q_n$ که $q_۱ + q_۲ + \cdots + q_n = ۱$ و اعداد مثبت و حقیقی $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ ثابت کنید:

$$a_۱q_۱ + a_۲q_۲ + \cdots + q_nq_n \geq a_۱^{q_۱}a_۲^{q_۲}\cdots a_n^{q_n}$$

(توضیح: $q_۱, q_۲, \cdots, q_n$ می‌توانند اعداد حقیقی مثبت نیز باشند. ولی اثبات آن به مفاهیمی پیچیده‌تر از سطح این کتاب نیاز دارد و بدون اثبات آن را در ادامه استفاده می‌کنیم.)

۱۷. x, y, z اعدادی مثبت هستند که $xyz = ۱$. ثابت کنید:

$$\frac{x^۳}{(۱+y)(۱+z)} + \frac{y^۳}{(۱+x)(۱+z)} + \frac{z^۳}{(۱+x)(۱+y)} \geq \frac{۳}{۴}$$

«پیشنهادی المپیاد جهانی ریاضی ۱۹۹۸»

۱۸. $n > ۲$ عددی طبیعی است. ثابت کنید:

$$(\frac{n+۱}{۲})^n > n!$$

۱۹. ثابت کنید چندجمله‌ای $۳x^۳ - ۶x^۲ + ۴$ در اعداد حقیقی مثبت، ریشه ندارد.

۲۰. $n > ۲$ عددی طبیعی است. ثابت کنید:

$$\prod_{i=۰}^{n}\binom{n}{i} \leq (\frac{۲^n - ۲}{n-۱})^{n-۱}$$

۲۱. جواب‌های معادله‌ی زیر را در اعداد مثبت بیابید.

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ - (ab + bc + cd + da) + \frac{۲}{۵} = ۰$$

۲۲. $n > ۲$ عددی طبیعی است. ثابت کنید:

$$n^n < (۲n-۱)(۲n-۳)\cdots(۳)(۱) = \frac{(۲n)!}{۲^n n!}$$

۲۳. a, b, c اعدادی مثبت‌اند که $abc = ۱$. ثابت کنید:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$$

۲۴. a, b, c اعدادی مثبت‌اند که $a + b + c = ۳$. ثابت کنید:

$$\frac{a}{۱+b^۲} + \frac{b}{۱+c^۲} + \frac{c}{۱+a^۲} \geq \frac{۳}{۲}$$