روز اول — زمان: ۲۷۰ دقیقه

۱ ثابت کنید برای هر p که عددی اول است، $10^p + 11^p$ نمی‌تواند توان nام یک عدد طبیعی باشد. $(n \geq 2)$

۲ عمو نقاش در اقدامی بی‌سابقه تصمیم به رنگ‌آمیزی نقاطی از فضا با مختصات صحیح می‌گیرد. او در هر گام یک دسته ۲۷تایی از نقاط با مختصات صحیح که تشکیل یک مکعب $2 \times 2 \times 2$ می‌دهند، انتخاب می‌کند و آن نقاط را رنگ می‌کند (هر ضلع این مکعب شامل ۳ نقطه است). ثابت کنید در یک رنگ‌آمیزی که شامل ۲۰۱۱ گام است، نقطه‌ای از فضا وجود دارد که فردبار رنگ شده است.

۳ مثلث حاده‌الزاویه ABC به مرکز ارتفاعی H مفروض است. CH، AB را در D قطع می‌کند و K قرینه‌ی H نسبت به AB می‌باشد. پای عمودهای وارد از D بر AC ، BC و AK به ترتیب Q، R و P می‌باشد. ثابت کنید قرینه‌ی وسط AC نسبت به مرکز دایره‌ی محیطی $\overset{\triangle}{PQR}$ روی BK قرار دارد.

روز دوم زمان: ۲۷۰ دقیقه

۴ تمام چندجمله‌ای‌های $P(x)$ با ضرایب حقیقی را بیابید که به ازای هر x حقیقی داشته باشیم:

$$xP(x).P(x+۱) = xP(x^۲) + (۱+x^۲)P(x)$$

۵ مثلث حاده‌الزاویه ABC به مرکز ارتفاعی H مفروض است. AH، BH و CH اضلاع مقابل‌شان را به ترتیب در D، E و F قطع می‌کنند. M وسط BC و K پای عمود وارد از A بر EF می‌باشد. ثابت کنید: $M\hat{H}A = D\hat{K}A$.

۶ n نقطه در صفحه قرار دارد که هیچ سه‌تایی هم‌خط نیستند. از میان پاره‌خط‌های واصل میان این n نقطه، mتا را انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید از میان این m پاره‌خط حداقل $\lceil\frac{۲m}{n}\rceil$ پاره‌خط وجود دارد که در شرط‌های زیر صدق می‌کند:

(الف) این پاره‌خط‌ها یک مسیر پیوسته تشکیل دهند (یعنی انتهای هر یک ابتدای دیگری باشد غیر از پاره‌خط انتهایی).

(ب) با شروع از اولین پاره‌خط مسیر و حرکت به سمت آخر روی این پاره‌خط‌ها، طول آن‌ها یک دنباله‌ی صعودی تشکیل دهد.

حل آزمون

حل آزمون ۱

۱ می‌توانید ثابت کنید برای $p = ۲$ و $p = ۳$ حکم مسأله برقرار است. بنابراین مسأله را برای $p \geq ۵$ حل می‌کنیم. در این صورت p به فرم $۶k \pm ۱$ می‌باشد. دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

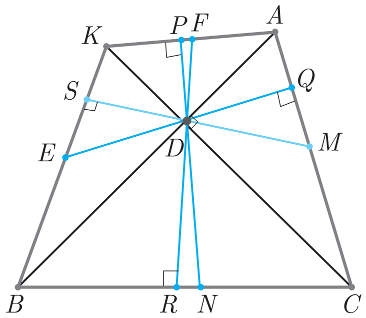
$$(۱) \ : \ p = ۶k + ۱ \ \Rightarrow \ ۱۱^p + ۱۰^p \overset{۹}{\equiv} ۲^p + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۶۴^k \times ۲ + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۳$$

$$(۲) \ : \ p = ۶k + ۵ \ \Rightarrow \ ۱۱^p + ۱۰^p \overset{۹}{\equiv} ۲^p + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۶۴^k \times ۳۲ + ۱ \overset{۹}{\equiv} -۳$$

پس بنابراین $۱۱^p + ۱۰^p$ به فرم $۳ \pm ۹t$ می‌باشد در نتیجه توان عدد ۳ در تجزیه‌ی این عدد به عوامل اول برابر ۱ می‌شود پس $۱۱^p + ۱۰^p$ هیچ‌گاه توان nام یک عدد طبیعی نمی‌شود.

۲ مؤلفه‌های مختصات را اگر به پیمانه‌ی ۳ در نظر بگیریم هر مکعب که انتخاب می‌شود لزوماً تمام ۲۷ حالت مختصات یک نقطه را در پیمانه‌ی ۳ می‌پوشاند. چون تعداد گام‌ها ۲۰۱۱ یعنی فرد است پس حتماً حالتی از ۲۷ حالت آمده که دقیقاً فردبار رنگ‌آمیزی شده است. در میان نقاطی که حالت آن‌ها (یعنی مختصات‌شان در پیمانه‌ی ۳) با آن‌که فردبار رنگ‌آمیزی شده است یکسان است، حتماً یکی هست که فردبار رنگ شده است یعنی بر فرض اگر حالت $(۱, ۲, ۰)$ فردبار رنگ شده باشد یکی از نقاطی که مختصاتش به پیمانه‌ی ۳، $(۱, ۲, ۰)$ می‌شود فردبار رنگ شده است چرا که در غیر این صورت اگر تمام نقاط زوج‌بار رنگ شده باشد، کلاً حالت $(۱, ۲, ۰)$ هم زوج‌بار رنگ شده است.

۳ قرینه‌ی H نسبت به AB روی دایره‌ی محیطی $\overset{\triangle}{ABC}$ است. بنابراین $AKBC$ محاطی است. داریم:



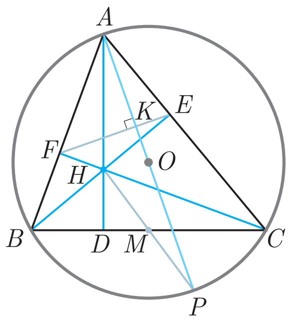
$$C\hat{D}N = P\hat{D}K = ۹۰^\circ - A\hat{K}D = K\hat{A}D = D\hat{C}B \ \Rightarrow$$ N وسط BC است.

به همین ترتیب M، E و F اوساط اضلاع چهارضلعی $AKBC$اند. می‌دانیم اوساط اضلاع یک چهارضلعی تشکیل یک متوازی‌الاضلاع می‌دهند. اما با توجه به این‌که قطرهای $AKBC$ برهم عمودند پس $MNEF$ مستطیل است. با توجه به شکل P و R روی دایره‌ای به قطر FN قرار دارند. اما دایره‌ی

به قطر FN همان دایره‌ی محیطی مستطیل $MNEF$ است و چون $E\hat{Q}M = M\hat{S}E = 90^\circ$. Q و S هم روی این دایره قرار دارند. بنابراین مرکز دایره‌ی محیطی $\overset{\triangle}{PQR}$ همان مرکز مستطیل $MNEF$ است که قرینه‌ی M نسبت به آن همان E است که روی BK قرار دارد.

۴ اگر $P(x)$ چندجمله‌ای باشد که کمترین درجه‌ی جملات آن k باشد و کمترین درجه‌ی جملات $P(x+1)$ برابر k' باشد، آن‌گاه کمترین درجه‌ی $xP(x).P(x+1)$ برابر $1+k+k'$ خواهد بود. از طرف دیگر کمترین درجه‌ی سمت راست تساوی برابر $\min(2k+1, k) = k$ خواهد بود. با توجه به این‌که $k < k'+k+1$ است. بنابراین چنین چندجمله‌ای وجود ندارد.

۵ ابتدا واضح است که AK از O (مرکز دایره‌ی محیطی $\overset{\triangle}{ABC}$) می‌گذرد زیرا $C\hat{A}K = 90^\circ - \hat{B}$. از طرفی می‌دانیم MH و OA یکدیگر را در P روی دایره‌ی محیطی قطع می‌کنند زیرا $OM \| AH$، $OM = \frac{1}{2}AH$ و $OA = OP$. برای اثبات حکم مسأله کافی است ثابت کنیم $D\hat{K}P = D\hat{H}P$ یعنی $HKPD$ باید محاطی باشد. داریم:



$$A\hat{F}E = \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = A\hat{P}B \Rightarrow \text{محاطی } BFKP$$

$$\Rightarrow AF.AB = AK.AP \qquad (I)$$

$$\text{محاطی } BFHD \Rightarrow AF.AB = AH.AD \overset{(I)}{\Rightarrow} AH.AD = AK.AP$$

$$\Rightarrow \text{محاطی } HKPD$$

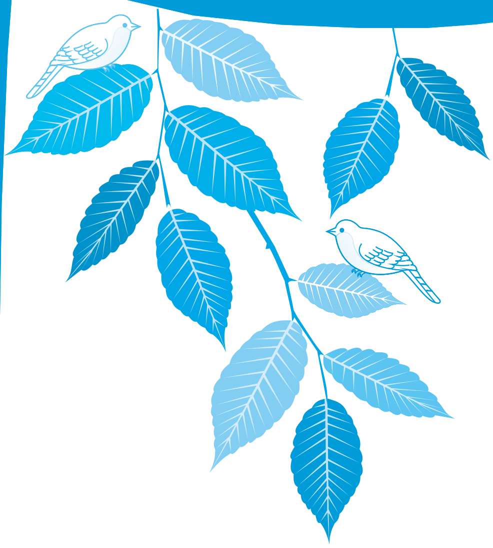
۶ روی هر یک از n نقطه یک رهنورد قرار می‌دهیم. عمل انتخاب یک پاره‌خط را جابه‌جا شدن رهنوردهای دو سر آن پاره‌خط در نظر بگیرید. حال این m پاره‌خط را به ترتیب طول از کم به زیاد انتخاب می‌کنیم. در این صورت $2m$ حرکت رهنورد داریم. پس حداقل $\lceil\frac{2m}{n}\rceil$ از این حرکت‌ها متعلق به یک رهنور است (اصل لانه کبوتر). این رهنورد مسیر مطلوب ما را پیموده است.

آنالیز آزمون ۱

شماره سؤال	پیش‌بینی میانگین نمره ۱۰۰ نفر برتر	پیش‌بینی تعداد افراد بین ۱۰۰ نفر برتر که نمره کامل مسئله را می‌گیرند
۱	۵/۵	۷۲ نفر
۲	۳/۵	۳۷ نفر
۳	۳/۵	۳۸ نفر
۴	۶	۸۲ نفر
۵	۴	۵۰ نفر
۶	۲	۱۷ نفر

پیش‌بینی نمره‌ی قبولی: ۲۸

❇ هر سؤال ۷ نمره دارد.



آزمون ۲

- روز اول
- روز دوم
- حل آزمون
- آنالیز آزمون

روز اول زمان: ۲۷۰ دقیقه

۱ معادله‌ی زیر برای $x \in (1, \infty)$ چند جواب دارد؟

$$\frac{x}{1+x} + x^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x-1}$$

۲ می‌دانیم در میان تمام اشکال با مساحت برابر دایره کمترین محیط را دارد و بنابراین از آنجایی که نسبت مساحت به مربع محیط در دایره برابر $\frac{1}{4\pi}$ است برای هر شکل دیگر این نسبت کوچک‌تر یا مساوی $\frac{1}{4\pi}$ است.

شکل روی صفحه مشبکه به شکلی می‌گوییم که در دستگاه مختصات فرضی رئوسی با مختصات صحیح و اضلاعی موازی با دو محور طول‌ها و عرض‌ها داشته باشد. در میان اشکال روی صفحه مشبکه بهترین عددی که می‌توان جایگزین $\frac{1}{4\pi}$ کرد چه عددی است و به ازای چه شکلی به‌دست می‌آید؟

۳ مثلث حاده‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ به مرکز دایره‌ی محیطی O و مرکز دایره محاطی I و مرکز ارتفاعی H مفروض است. دایره‌ی محاطی $\overset{\triangle}{ABC}$، BC را در D قطع می‌کند. ثابت کنید اگر OI موازی BC باشد آن‌گاه HD موازی OA است.

روز دوم زمان: ۲۷۰ دقیقه

۴ جناب آقای کلاسیفاید (Classified) 2^n چوق (وجه رایج کشور کلاسیفایدهای متحرک) را که کل دارایی او را تشکیل می‌دهد در تعدادی بانک پخش کرده است اما از کار خود پشیمان است و می‌خواهد تمام پول را به یک بانک انتقال دهد. عمل انتقال پول در کشور او به روش سحاب (سامانه‌ی حواله‌ی بین بانکی) صورت می‌گیرد. به این شکل که اگر او در دو بانک به ترتیب مبالغ a و b $(b \geq a)$ را داشته باشد پس از استفاده از سحاب به ترتیب مبالغ $2a$ و $b-a$ را در آن دو بانک دارد. همچنین او در هر بانک فقط یک حساب دارد. نشان دهید او می‌تواند به هدفش برسد. (n عددی طبیعی است.)

۵ چهارضلعی محاطی $ABCD$ به طوری که $AB = AD$ و $BC = CD$ مفروض است. M وسط AD می‌باشد. عمود وارد از C بر BM، AD را در P قطع می‌کند. ثابت کنید PB بر دایره‌ی محیطی $ABCD$ مماس است.

۶ تمام اعداد طبیعی را بیابید که $n^3 - n - 3$ مربع کامل شود.

حل آزمون

حل آزمون ۲

۱ می‌دانیم $x^{۲}$ و $\frac{x}{۱+x}$ در بازه‌ی $(۱,\infty)$ با افزایش x، افزایش می‌یابند. بنابراین تابع $f(x)=x^{۲}+\frac{x}{۱+x}$ در بازه‌ی $(۱,\infty)$ اکیداً صعودی است. از طرف دیگر $\frac{۱}{x^{۲}}$ و $\frac{x}{x-۱}$ نیز در بازه‌ی $(۱,\infty)$ با افزایش x، کاهش می‌یابند. بنابراین تابع $g(x)=\frac{۱}{x^{۲}}+\frac{x}{x-۱}$ در بازه‌ی $(۱,\infty)$ اکیداً نزولی است. بنابراین $f(x)-g(x)$ نیز اکیداً صعودی خواهد بود. حال اگر $h(x)=f(x)-g(x)$ در نظر بگیریم، $h(x)$ در بازه‌ی مورد نظر پیوسته است (چرا؟) از طرفی داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to ۱^{+}} h(x)=-\infty\end{cases}$$

پس $h(x)$ دقیقاً یک ریشه‌ی حقیقی در بازه‌ی مورد نظر دارد.

۲ فرض کنید F را در صفحه‌ی مشبکه داریم که نسبت مساحت به مربع محیطش ماکسیمم است. ادعا می‌کنیم F یکپارچه (متشکل از یک تکه) است زیرا در غیر این صورت یکی از تکه‌ها را به دیگری نزدیک می‌کنیم تا هم‌مرز شوند. در این صورت با حفظ مساحت، محیط کاهش می‌یابد که خلاف فرضی است که کرده بودیم.

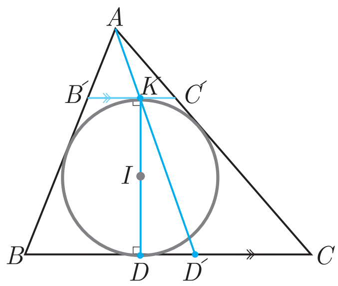
مینیمم و ماکسیمم طول رئوس F را در صفحه‌ی مشبکه (با مختصات بندی)، $x_{۰}$ و $x_{۱}$ در نظر بگیرید. چون F یکپارچه است مرزهای آن حداقل $۲\ (x_{۱}-x_{۰})$ یال افقی دارد زیرا اگر روی محیط F دور بزنیم یک بار از سمت چپ‌ترین نقطه F به سمت راست‌ترین نقطه‌ی آن می‌رویم و باز می‌گردیم.

با استدلال مشابه برای عرض F نتیجه می‌شود مرز آن حداقل $۲(y_{۱}-y_{۰})$ یال عمودی دارد.

فرض کنید $x_{۱}-x_{۰}=w$ و $y_{۱}-y_{۰}=h$. محیط F حداقل $۲w+۲h$ است. از طرفی F در مستطیلی با اضلاع w و h قرار می‌گیرد. پس مساحت آن نابزرگ‌تر از wh است. پس نسبت مذکور حداکثر $\frac{wh}{۴(w+h)^{۲}}$ است. طبق نامساوی حسابی ـ هندسی $(w+h\geq ۲\sqrt{wh})$ کسر مذکور نابزرگ‌تر از $\frac{۱}{۱۶}$ است. تساوی (طبق حالت تساوی حسابی ـ هندسی) زمانی رخ می‌دهد که $w=h$ باشد، یعنی F مربع باشد.

۳ لم: ID دایره‌ی محاطی را برای بار دوم در K و AK، BC را در D' قطع می‌کند.

آن‌گاه $BD = CD'$.

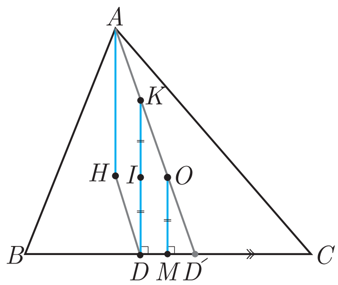


اثبات: مماس در K بر دایره‌ی محاطی موازی BC است. چون $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AB'C'}$ و دایره‌ی محاطی داخلی $\overset{\triangle}{ABC}$ نقش دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A را برای مثلث $AB'C'$ دارد، بنابراین AK، BC را در محل برخورد آن با دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A برای مثلث ABC، قطع می‌کند، که در این صورت می‌دانیم $CD' = BD = \frac{AB + BC - AC}{۲}$.

حل مسأله: D' نقطه‌ای روی BC است که $MD = MD'$ (M وسط BC است).

$OI \| BC$ در نتیجه $OMDI$ مستطیل است پس $OM = DI$. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OM = \frac{۱}{۲}DK \\ OM \| DK \\ MD = MD' \end{array}\right\} \Rightarrow$$ K، O و D' هم‌خط‌اند.



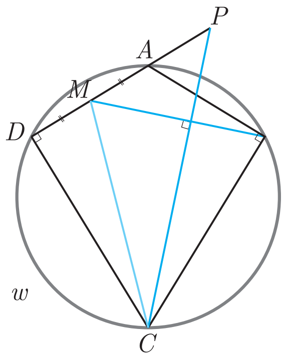
اما طبق لم ذکر شده می‌دانیم A، K و D' همخط‌اند پس می‌توان نتیجه گرفت A، K و O همخط‌اند.

$$OM = \frac{۱}{۲}AH \Rightarrow KD = AH \Rightarrow AKDH \text{ متوازی‌الاضلاع}$$

$$\Rightarrow AK \| DH \Rightarrow HD \| OA$$

۴ با توجه به این‌که کل موجودی زوج است پس تعداد حساب‌ها با موجودی فرد، زوج است. سحاب را روی جفت حساب‌های فرد اعمال می‌کنیم و با توجه به این‌که سحاب موجودی‌ها را زوج می‌کند تمام حساب‌های فرد به حساب‌هایی با موجودی زوج تبدیل می‌شوند. حال با استفاده از استقرا ثابت می‌کنیم آقای کلاسیفاید به هدف خود می‌رسد. پایه‌ی استقرا واضح است. فرض کنید حکم برای $n = k$ درست باشد. درستی آن را برای $n = k + ۱$ نتیجه می‌گیریم. با توجه به آنچه گفته شد موجودی تمام حساب‌ها زوج می‌شود. حال هر ۲ چوق را یک بسته در نظر بگیرید. ۲^k بسته داریم که سحاب روی آن‌ها قابل اجراست. لذا طبق فرض استقرا حکم درست و اثبات کامل است.

۵ ابتدا واضح است که $\hat{B} = \hat{D} = ۹۰^\circ$. فرض کنید $AM = x$ و $AP = y$. داریم:



$$PC \perp BM \ \Rightarrow\ PM^۲ - PB^۲ = MC^۲ - BC^۲$$
$$\xRightarrow{BC=CD}\ PM^۲ - PB^۲ = MC^۲ - CD^۲$$
$$\xRightarrow{\hat{D}=۹۰^\circ}\ (x+y)^۲ - PB^۲ = MD^۲ = x^۲$$
$$\Rightarrow\ PB^۲ = (x+y)^۲ - x^۲ = y(y+۲x) = AP.PD = p_w^p$$

$\Rightarrow$ PB بر دایره مماس است

۶ فرض کنید m وجود داشته باشد که: $n^۳ - n - ۳ = m^۲$. با توجه به این‌که $n^۳ - n$ زوج است پس $m^۲$ عددی فرد است، بنابراین $m^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱$ پس داریم:

$$n^۳ - n \overset{۸}{\equiv} ۴ \ \Rightarrow\ n \overset{۸}{\equiv} ۴ \qquad (I)$$
$$n^۳ - n - ۳ = m^۲ \ \Rightarrow\ n^۳ - n + ۶ = m^۲ + ۹$$
$$\Rightarrow (n+۲)(n^۲ - ۲n + ۴) - (n+۲) = m^۲ + ۹$$
$$\Rightarrow (n+۲)(n^۲ - ۲n + ۳) = m^۲ + ۹$$

با توجه به (I)، $n+۲$ به فرم $۸k+۶$ و $n^۲-۲n+۳$ به فرم $۸k+۳$ می‌باشد. بنابراین هر دو پرانتز عامل اولی به فرم $۴k+۳$ دارند (چرا؟). از آنجایی که هر دو عدد $n+۲$ و $n^۲-۲n+۳$ همزمان نمی‌توانند بر ۳ بخش‌پذیر باشند پس حداقل یکی از دو عامل اولی که به فرم $۴k+۳$ هستند غیر ۳ می‌باشد. فرض کنید این عامل p باشد. داریم:

$$p|(n+۲)(n^۲-۲n+۳) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p|m^۲+۹ \\ p \overset{۴}{\equiv} ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} p|m \\ p|۳ \quad ※ \end{cases}$$

بنابراین $n^۳-n-۳$ هیچگاه مربع کامل نمی‌شود.

آنالیز آزمون ۲

شماره سؤال	پیش‌بینی میانگین نمره ۱۰۰ نفر برتر	پیش‌بینی تعداد افراد بین ۱۰۰ نفر برتر که نمره کامل مسئله را می‌گیرند
۱	۵/۵	۷۲ نفر
۲	۳/۵	۴۰ نفر
۳	۳/۵	۳۵ نفر
۴	۵	۶۰ نفر
۵	۴/۵	۵۵ نفر
۶	۲/۵	۲۲ نفر

پیش‌بینی نمره‌ی قبولی: ۳۰

❊ هر سؤال ۷ نمره دارد.

آزمون ۳

- روز اول
- روز دوم
- حل آزمون
- آنالیز آزمون

روز اول زمان: ۲۷۰ دقیقه

۱ همه‌ی اعداد x و y را بیابید که $x,y \in \mathbb{Z}$ و $2013x^2 = 1391y^2 + 1$. ($\mathbb{Z}$ مجموعه‌ی اعداد صحیح است)

۲ مثلث حاده‌الزاویه ABC با دایره‌ی محیطی C به مرکز O مفروض است. فرض کنید دایره‌ی ω به مرکز S که در A بر دایره‌ی C و در D بر BC مماس است، اضلاع AB و AC را به ترتیب در E و F قطع می‌کند. AS و ES، ω را برای بار دوم به ترتیب در I و G قطع می‌کنند و همچنین OB، IG را در H قطع می‌کند. ثابت کنید: $GH = \dfrac{DF^2}{AF}$.

۳ در هر یک از خانه‌های جدولی $m \times n$ $(m,n \in \mathbb{N})$ یک مهره قرار دارد که یک روی آن سیاه و روی دیگر آن سفید است. در ابتدا روی سفید تمام مهره‌ها غیر از مهره گوشه‌ی بالا و چپ معلوم است (بالطبع مهره‌ی گوشه‌ی مذکور دارای روی سیاه است). در هرگام یک مهره‌ی با روی سیاه برداشته می‌شود و تمام مهره‌های همسایه (در خانه‌هایی مشترک در یک ضلع) تغییر وضعیت می‌دهند. تمام دوتایی‌های (m,n) را بیابید که بتوان تمام مهره‌های جدول را برداشت.