

مبانی مثلثات

تعریف توابع مثلثاتی به وسیله اجزای مثلث قائم‌الزاویه

فرض کنید S و T دو مجموعه باشند. یک تابع (یا نگاشت) f از S به T (که به صورت $f: S \rightarrow T$ نوشته می‌شود) به هر عضو s از S ($s \in S$) دقیقاً یک عضو t از T ($t \in T$) را نسبت می‌دهد (و به صورت $f(s) = t$ نوشته می‌شود)؛ t تصویر s است. برای $S' \subseteq S$ ، $f(S')$ (تصویر S') را مجموعه تصاویر $s \in S'$ تحت f می‌گیریم. مجموعه S دامنه f و $f(S)$ برد f نامیده می‌شوند.

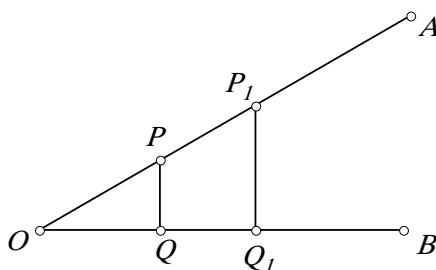
برای زاویه θ (تتا) بین 0° و 90° ، توابع مثلثاتی را به منظور توصیف اندازه زاویه، تعریف می‌کنیم. فرض کنید خطوط OA و OB زاویه θ را بسازند (شکل ۱-۱). نقطه P را روی OA انتخاب کنید. فرض کنید Q پای عمود از P روی OB باشد. توابع سینوس (\sin)، کسینوس (\cos)، تانژانت (\tan)، کتانژانت (\cot)، کسکانت (\csc) و سکانت (\sec) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که منظور از $|PQ|$ طول پاره خط PQ است:

$$\sin \theta = \frac{|PQ|}{|OP|}, \quad \csc \theta = \frac{|OP|}{|PQ|}$$

$$\cos \theta = \frac{|OQ|}{|OP|}, \quad \sec \theta = \frac{|OP|}{|OQ|}$$

$$\tan \theta = \frac{|PQ|}{|OQ|}, \quad \cot \theta = \frac{|OQ|}{|PQ|}$$

در ابتدا لازم است نشان دهیم این توابع به خوبی تعریف شده‌اند یعنی فقط به اندازه θ بستگی دارند و به انتخاب P وابسته نیستند. فرض کنید P_1 نقطه دیگری روی OA بوده و Q_1 پای عمود از P_1 روی OB باشد. واضح است که مثلث‌های قائم‌الزاویه OPQ و OP_1Q_1 متشابه هستند و لذا نسبت‌های متناظر مانند $\frac{|PQ|}{|OP|}$ و $\frac{|OQ|}{|OP|}$ همگی مساوی هستند، بنابراین همه توابع مثلثاتی تعاریف سازگاری دارند.



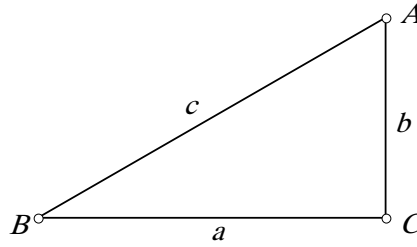
شکل ۱-۱

از تعاریف فوق می‌توان دید که $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ و $\tan \theta$ به ترتیب معکوس $\csc \theta$ ، $\sec \theta$ و $\cot \theta$ هستند. بنابراین برای اکثر مقاصد کافی است $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ و $\tan \theta$ را مورد بررسی قرار دهیم. همچنین می‌توان دید که:

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta, \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

به طور قراردادی، در مثلث ABC ، طول اضلاع BC ، CA و AB را به ترتیب با a ، b و c و زوایای CAB ، ABC و BCA را به ترتیب با $\angle A$ ، $\angle B$ و $\angle C$ نشان می‌دهیم.

حالت مثلث قائم‌الزاویه ABC با $\angle C = 90^\circ$ را در نظر بگیرید (شکل ۲-۱).



شکل ۲-۱

برای اختصار $\sin \angle A$ را به صورت $\sin A$ می‌نویسیم. خواهیم داشت:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

$$\sin B = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}, \quad \tan B = \frac{b}{a}$$

و

$$a = c \sin A, \quad a = c \cos B, \quad a = b \tan A$$

$$b = c \sin B, \quad b = c \cos A, \quad b = a \tan B$$

$$c = a \csc A, \quad c = a \sec B, \quad c = b \csc B$$

$$, \quad c = b \sec A$$

به سادگی می‌توان دید که اگر A و B دو زاویه‌ای باشند که $0^\circ < A, B < 90^\circ$ و $A + B = 90^\circ$ آنگاه خواهیم داشت $\sin A = \cos B$, $\cos A = \sin B$, $\tan A = \cot B$ و $\cot A = \tan B$. در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم $a^2 + b^2 = c^2$ در نتیجه:

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

نوشتن $(\sin A)^2$ به صورت $\sin^2 A$ ممکن است موجب اشتباه شود (چرا؟). برای اختصار $(\sin A)^2$ را به صورت $\sin^2 A$ می‌نویسیم. نشان دادیم که برای $0^\circ < A < 90^\circ$,

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

با تقسیم طرفین رابطه فوق بر $\sin^2 A$ خواهیم داشت:

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A \quad \text{یا} \quad \csc^2 A - \cot^2 A = 1$$

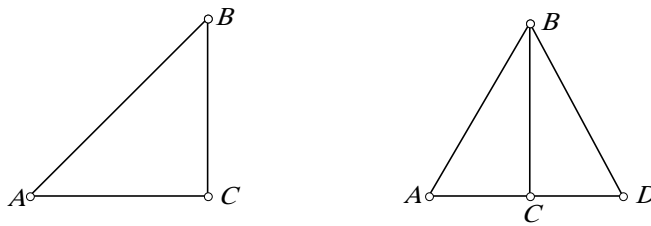
به طور مشابه داریم:

$$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A \quad \text{یا} \quad \sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

حال چند زاویه خاص را بررسی می‌کنیم.

در مثلث ABC فرض کنید $\angle A = \angle B = 45^\circ$ و لذا $|AC| = |BC|$ (شکل ۳-۱ چپ). بنابراین $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$ و $\sin 45^\circ = \sin A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. به همین ترتیب داریم:

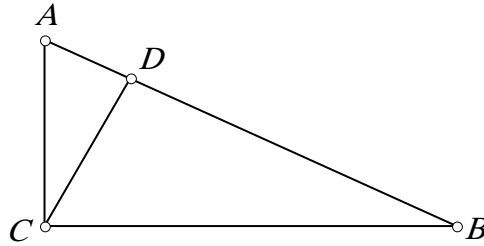
$$\cot 45^\circ = \tan 45^\circ = 1 \quad \text{و} \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



شکل ۳-۱

در مثلث ABC فرض کنید $\angle A = 60^\circ$ و $\angle B = 30^\circ$ (شکل ۳-۱ راست). قرینه A نسبت به خط BC را D می‌نامیم. از تقارن $\angle D = 60^\circ$ بوده و مثلث ABD متساوی‌الاضلاع است. بنابراین $|AD| = |AB|$ و $|AC| = \frac{|AD|}{2}$. چون ABC ، قائم‌الزاویه است $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$. به این ترتیب بنابراین داریم $|BC|^2 = |AB|^2 - \frac{|AB|^2}{4} = \frac{3|AB|^2}{4}$ یا $|BC| = \frac{\sqrt{3}|AB|}{2}$. به این ترتیب $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ، $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$.

برای اینکه خواننده با توابع مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه بیشتر آشنا شود یک تمرین ارائه می‌کنیم. در مثلث ABC (شکل ۴-۱) $\angle BCA = 90^\circ$ و D پای عمود از C روی AB است. می‌دانیم که $|AB| = x$ و $\angle A = \theta$. طول پاره خطها در شکل ۴-۱ را بر حسب θ, x بیان کنید.



شکل ۴-۱

خواصی از توابع مثلثاتی

برای دو زاویه α (آلفا) و β (بتا) با شرط $0^\circ < \alpha, \beta$ و $\alpha + \beta < 90^\circ$ به سادگی می‌توان دید که توابع مثلثاتی قانون توزیع جمع‌ی را برآورده نمی‌کنند یعنی روابط $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$ و $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha + \cos \beta$ صحیح نیستند. برای مثال با قرار دادن $\alpha = \beta = 30^\circ$ داریم $\cos(\alpha + \beta) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ که با $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}$ برابر نیست. طبیعی است که از خود بپرسیم $\sin \alpha$ ، $\sin \beta$ و $\sin(\alpha + \beta)$ چه رابطه‌ای با یکدیگر دارند.

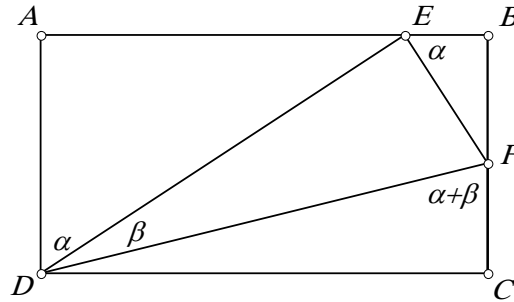
شکل ۵-۱ را در نظر بگیرید، فرض کنید DEF یک مثلث قائم‌الزاویه بوده که $\angle DEF = 90^\circ$ ، $\angle FDE = \beta$ و $|DF| = 1$ و در مستطیل $ABCD$ محاط باشد (این کار را همیشه می‌توان به روش زیر انجام داد. خط l_1 را خارج مثلث DEF چنان رسم می‌کنیم که از D گذشته و زاویه بین l_1 و DE یک زاویه حاده برابر با α باشد. خط l_2 را عمود بر l_1 و گذران از D رسم می‌کنیم. A پای عمود از E بر l_1 است. پای عمود از F روی l_2 نیز نقطه C است. نقطه B محل تقاطع خطوط AE و CF خواهد بود).

طول پاره‌های داخل این مستطیل را محاسبه می‌کنیم. در مثلث DEF داریم $|EF| = |DF| \cdot \sin \beta = \sin \beta$ و $\cos \beta = |DF| \cdot \cos \beta = |DE|$ ، $\cos \alpha \cos \beta = |AD| = |DE| \cdot \cos \alpha$ و $|AE| = |DE| \cdot \sin \alpha = \sin \alpha \cos \beta$. از آنجا که $\angle DEF = 90^\circ$ در نتیجه $\angle AED + \angle BEF = 90^\circ = \angle AED + \angle ADE$ و بنابراین

می‌توان مشاهده کرد که مثلث‌های ADE و BEF با یکدیگر متشابه هستند. در مثلث BEF داریم

$$|BF| = |EF| \cdot \sin \alpha = \sin \alpha \sin \beta \quad \text{و} \quad |BE| = |EF| \cdot \cos \alpha = \cos \alpha \sin \beta$$

از $AD \parallel BC$ ، $\angle DFC = \angle ADF = \alpha + \beta$. در مثلث قائم‌الزاویه CDF داریم
 $|CF| = |DF| \cdot \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$ و $|CD| = |DF| \cdot \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta)$



شکل ۱-۵

از مباحث فوق نتیجه می‌گیریم که

$$\cos \alpha \cos \beta = |AD| = |BC| = |BF| + |FC| = \sin \alpha \sin \beta + \cos(\alpha + \beta)$$

و به موجب آن

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

به طور مشابه داریم

$$\sin(\alpha + \beta) = |CD| = |AB| = |AE| + |EB| = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

یعنی

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

از تعریف تابع تانژانت بدست می‌آید که

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

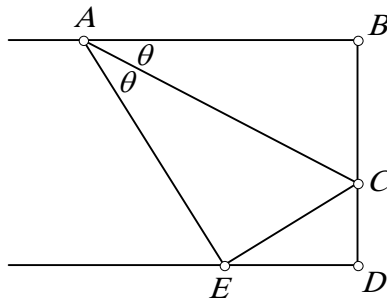
به این ترتیب فرمولهای جمع برای توابع سینوس، کسینوس و تانژانت برای زوایای محدود در یک بازه بدست آمدند به روش مشابه می توان فرمولهای جمع را برای تابع کتانژانت نیز بدست آورد که ما آن را به عنوان تمرین باقی می گذاریم.

با قرار دادن $\alpha = \beta$ در فرمول جمع، فرمولهای زوایای دو برابر را بدست می آوریم.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad , \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad , \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

که برای اختصار $\sin(2\alpha)$ را به صورت $\sin 2\alpha$ نوشته ایم. با قرار دادن $\beta = 2\alpha$ در فرمولهای جمع می توان فرمولهای زوایای سه برابر را بدست آورد. به خوانندگان پیشنهاد می کنیم که شکلهای متنوع فرمولهای زوایای دو برابر و سه برابر که در فهرست تعاریف و قضایا در انتهای این کتاب لیست شده است را خود بدست آورند.

شما یک زاویه قائمه دارید



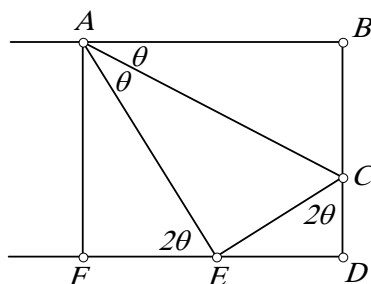
شکل ۶-۱

با توجه به تعریف توابع مثلثاتی مناسبتر است که با توابع مثلثاتی در مثلثهای قائم الزاویه کار کنیم. در اینجا سه مثال می آوریم.

مثال ۱-۱: شکل ۶-۱ یک نوار مستطیل شکل طولانی کاغذ را نشان می دهد که یک گوشه آن در امتداد خط AC چنان تا شده است که روی لبه مقابل قرار گرفته و زاویه θ را ساخته است ($\angle CAB$ در شکل ۶-۱). اگر عرض نوار w اینچ باشد طول پاره خط AC را بر حسب w و θ بدست آورید. (فرض می کنیم که θ بین 0° و 45° است لذا شکل ۶-۱ با واقعیت جور در می آید)

حال دو راه حل برای آن ارائه می کنیم.

پاسخ اول: در مثلث قائم الزاویه ABC داریم $|BC| = |AC| \sin \theta$. در مثلث قائم الزاویه AEC داریم $|CE| = |AC| \sin \theta$ (بعد از تا کردن، مثلث های ABC و AEC همبسته هستند). چون $\angle BCA = \angle ECA = 90^\circ - \theta$ در نتیجه $\angle BCE = 180^\circ - 2\theta$ و $\angle DCE = 2\theta$ (شکل ۷-۱).



شکل ۷-۱

در مثلث قائم الزاویه CDE ، $|CD| = |CE| \cos 2\theta$. با کنار هم قرار دادن نتایج فوق داریم

$$w = |BD| = |BC| + |CD| = |AC| \sin \theta + |AC| \sin \theta \cos 2\theta$$

و از آنجا

$$|AC| = \frac{w}{\sin \theta (1 + \cos 2\theta)}$$

پاسخ دوم: F را پای عمود از A روی ضلع مقابل می گیریم. در مثلث قائم الزاویه AEF ، $\angle AEF = 2\theta$ و $|AF| = w$ بنابراین $|AF| = |AE| \sin 2\theta$ و یا $|AE| = \frac{w}{\sin 2\theta}$. در مثلث قائم الزاویه AEC ، $\angle CAE = \angle CAB = \theta$ و بنابراین $|AE| = |AC| \cos \theta$.

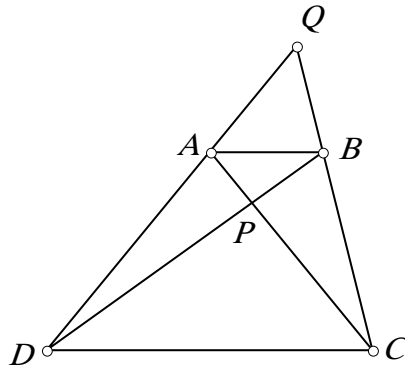
$$|AC| = \frac{|AE|}{\cos \theta} = \frac{w}{\sin 2\theta \cos \theta}$$

با در نظر گرفتن این دو جواب داریم:

$$|AC| = \frac{w}{\sin \theta(1 + \cos 2\theta)} = \frac{w}{\sin 2\theta \cos \theta}$$

یا $\sin \theta(1 + \cos 2\theta) = \sin 2\theta \cos \theta$ خوانندگان علاقمند می توانند از فرمولهایی که قبلاً بدست آوردیم برای اثبات تساوی فوق استفاده کنند.

مثال ۱-۲: در دوزنقه $ABCD$ (شکل ۸-۱) $AB \parallel CD$ ، $|AB| = 4$ و $|CD| = 10$. فرض کنید زاویه بین خطوط AC و BD قائمه باشد و تقاطع خطوط BC و DA در نقطه Q زاویه 45° بسازد. $[ABCD]$ ، مساحت دوزنقه $ABCD$ را حساب کنید.



شکل ۸-۱

پاسخ: تقاطع AC و BD را P می نامیم. چون $AB \parallel CD$ است مثلثهای ABP و CDP با نسبت $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{2}{5}$ متشابه هستند. قرار می دهیم $|AP| = 2x$ و $|BP| = 2y$. بنابراین $|CP| = 5x$ و $|DP| = 5y$. چون $\angle APB = 90^\circ$ ، $[ABCD] = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = \frac{49xy}{2}$. (برای اثبات این مطلب محاسبات زیر را بررسی کنید)

$$[ABCD] = [ABD] + [CBD] = \frac{1}{2}|AP| \cdot |BD| + \frac{1}{2}|CP| \cdot |BD| = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD|$$

قرار دهید $\alpha = \angle ADP$ و $\beta = \angle BCP$. در مثلث قائم الزاویه ADP و BCP داریم:

$$\tan \alpha = \frac{|AP|}{|DP|} = \frac{2x}{5y} \quad \text{و} \quad \tan \beta = \frac{|BP|}{|CP|} = \frac{2y}{5x}$$

از $\angle CPD = \angle CQD + \angle QCP + \angle QDP$ نتیجه می‌گیریم که
 $\alpha + \beta = \angle QCP + \angle QDP = 45^\circ$ و از فرمول‌های جمع خواهیم داشت:

$$1 = \tan 45^\circ = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{2x}{5y} + \frac{2y}{5x}}{1 - \frac{2x}{5y} \cdot \frac{2y}{5x}} = \frac{10(x^2 + y^2)}{25xy}$$

و از آنجا

$$xy = \frac{10(x^2 + y^2)}{25}$$

در مثلث ABP داریم $|AB|^2 = |AP|^2 + |BP|^2$ یا $16 = 4(x^2 + y^2)$. بنابراین $x^2 + y^2 = 4$ و
در نتیجه $xy = \frac{40}{25}$

$$[ABCD] = \frac{49xy}{2} = \frac{49}{2} \cdot \frac{40}{25} = \frac{140}{3}$$

مثال ۱-۳: [AMC12 ۲۰۰۴] در مثلث ABC ، $|AB| = |AC|$ (شکل ۱-۹). نقاط D و E روی ضلع BC چنان قرار دارند که $|BD| = |DC|$ و $|BE| > |CE|$. فرض کنید $\tan \angle EAC$ ، $\tan \angle EAD$ و $\tan \angle EAB$ تشکیل یک تصاعد هندسی دهند و $\cot \angle DAE$ ، $\cot \angle CAE$ و $\cot \angle DAB$ یک تصاعد حسابی باشند. اگر $|AE| = 10$ ، مساحت مثلث ABC ، $[ABC]$ ، را حساب کنید.

پاسخ: مثلث‌های قائم الزاویه ABD ، ACD و ADE را مورد بررسی قرار می‌دهیم. قرار دهید $\alpha = \angle EAD$ و $\beta = \angle BAD = \angle DAC$. پس $\angle EAC = \alpha - \beta$ و $\angle EAB = \alpha + \beta$. چون $\tan \angle EAC$ ، $\tan \angle EAD$ و $\tan \angle EAB$ یک تصاعد هندسی هستند لذا:

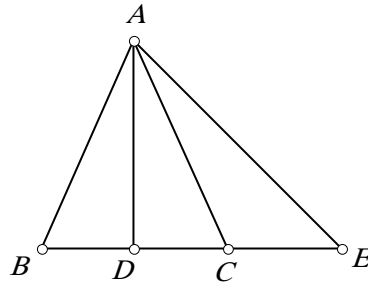
$$\tan^2 \alpha = \tan^2 \angle EAD = \tan \angle EAC \tan \angle EAB = \tan(\alpha - \beta) \tan(\alpha + \beta)$$

از فرمول جمع خواهیم داشت

$$\tan^{\vee} \alpha = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \cdot \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\tan^{\vee} \alpha - \tan^{\vee} \beta}{1 - \tan^{\vee} \alpha \tan^{\vee} \beta}$$

یا

$$\tan^{\vee} \alpha - \tan^{\vee} \alpha \tan^{\vee} \beta = \tan^{\vee} \alpha - \tan^{\vee} \beta$$



شکل ۹-۱

بنابراین $\tan^{\vee} \alpha \tan^{\vee} \beta = \tan^{\vee} \beta$ و لذا $\tan \alpha = 1$ یا $\alpha = 45^\circ$ (از این حقیقت استفاده کردیم که $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ هر دو مثبت هستند زیرا $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$). بنابراین ADE یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است و $|AD| = |DE| = \frac{|AE|}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$ در مثلث قائم الزاویه ACD و لذا $|DC| = |AD| \tan \beta$

$$[ABC] = |AD| \cdot |CD| = |AD|^{\vee} \tan \beta = 5 \cdot \tan \beta$$

چون $\cot \angle DAE = \cot 45^\circ = 1$ ، $\cot \angle CAE$ و $\cot \angle DAB$ یک تصاعد حسابی هستند در نتیجه

$$2 \cot(45^\circ - \beta) = 2 \cot \angle CAE = \cot \angle DAE + \cot \angle DAB = 1 + \cot \beta$$

با قرار دادن $45^\circ - \beta = \delta$ در معادله فوق داریم $2 \cot \delta = 1 + \cot \beta$. با توجه به اینکه $0^\circ < \beta, \delta < 45^\circ$ با اعمال فرمول جمع خواهیم داشت

$$1 = \cot 45^\circ = \cot(\beta + \delta) = \frac{\cot \beta \cot \delta - 1}{\cot \beta + \cot \delta}$$

یا $1 - \cot \beta \cot \delta = \cot \beta + \cot \delta$. با حل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} 2 \cot \delta = 1 + \cot \beta \\ \cot \beta + \cot \delta = \cot \beta \cot \delta - 1 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} 2 \cot \delta = \cot \beta + 1 \\ \cot \delta (\cot \beta - 1) = \cot \beta + 1 \end{cases}$$

برای $\cot \beta$ بدست می آید که $(\cot \beta + 1)(\cot \beta - 1) = 2(\cot \beta + 1)$ و در نتیجه

$$\cot^2 \beta - 2 \cot \beta - 3 = 0.$$

با تجزیه این معادله به صورت $(\cot \beta - 3)(\cot \beta + 1) = 0$ ، $\cot \beta = 3$ بوده و

$$[ABC] = 5 \cdot \tan \beta = \frac{5}{4}$$

البته راه حل فوق را می توان با استفاده از فرمولهای تفریق که به زودی بدست خواهند آمد،

ساده تر کرد.

توابع مثلثاتی و دایره واحد

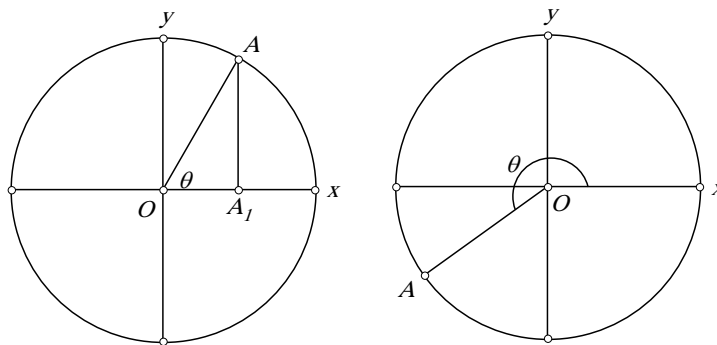
ω را بیانگر دایره واحد (دایره به شعاع ۱) در نظر بگیرید که مرکز آن در نقطه $O = (0, 0)$ قرار

دارد. فرض کنید A نقطه‌ای روی ω در ربع اول باشد و θ را برابر زاویه حاده‌ای بگیرید که بین خط

OA و محور x شکل می‌گیرد (شکل ۱-۱۰). فرض کنید A_1 پای عمود از A روی محور x باشد. در

مثلث قائم الزاویه AA_1O ، $|OA| = 1$ ، $|AA_1| = \sin \theta$ و $|OA_1| = \cos \theta$ بنابراین

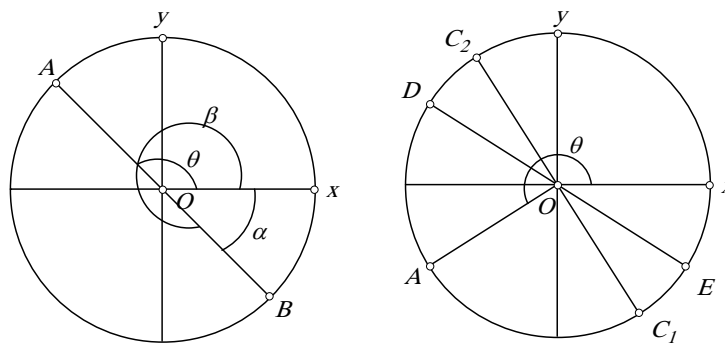
$$A = (\cos \theta, \sin \theta)$$



شکل ۱-۱۰

در صفحه مختصات زاویه استاندارد (یا زاویه قطبی) زاویه‌ای است که بین خط l ، که از مرکز می‌گذرد، و بخش مثبت محور x ها شکل می‌گیرد بطوریکه بخش مثبت محور x ها می‌تواند دوران یافته، تا بر l منطبق شود. زاویه استاندارد به طرق مختلفی ممکن است تعریف شود، زیرا راه‌های گوناگونی وجود دارد تا بخش مثبت محور x ها با دوران بر l منطبق شود. یعنی زاویه استاندارد $\theta_1 = x^\circ$ با زاویه استاندارد $\theta_2 = x^\circ + 360^\circ k$ برای تمام مقادیر صحیح k معادل است. برای مثال زاویه استاندارد 180° معادل با همه زاویه‌های استاندارد $\dots, -900^\circ, -540^\circ, -180^\circ, +540^\circ, +900^\circ, \dots$ است. به این ترتیب یک زاویه استاندارد، زاویه‌ای جهت دار است. طبق قرارداد یک زاویه مثبت، دوران محور x خلاف جهت عقربه‌های ساعت را نشان می‌دهد در حالیکه یک زاویه استاندارد منفی، بیانگر چرخش محور x در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

ما همچنین می‌توانیم زاویه استاندارد اصلی را برای زاویه‌ای که بین دو خط در صفحه تشکیل شده است برابر کوچکترین مقدار زاویه‌ای که لازم است تا یک خط با دوران در خلاف جهت عقربه‌های ساعت بر خط دیگر منطبق شود تعریف کنیم. توجه کنید که این زاویه همیشه بزرگتر یا مساوی 0° و کوچکتر یا مساوی 180° است.



شکل ۱۱-۱

برای نقطه A در صفحه، می‌توان موقعیت A (نسبت به مرکز) را با فاصله $r = |OA|$ و زاویه استاندارد θ که بین خط OA و محور x ها ایجاد می‌شود، تشریح کرد. این مختصات، مختصات قطبی نامیده شده و به شکل $A = (r, \theta)$ نوشته می‌شود (توجه کنید که مختصات قطبی یک نقطه منحصر به فرد نیست).

در حالت کلی برای هر زاویه θ ، مقادیر $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را به عنوان مختصات نقطه روی دایره واحد تعریف می‌کنیم. برای هر θ یک نقطه یکتای $A = (x_\theta, y_\theta)$ (در مختصات مستطیلی) روی دایره واحد ω وجود دارد بطوریکه $A = (1, \theta)$ (در مختصات قطبی). تعریف می‌کنیم $\cos \theta = x_\theta$ و $\sin \theta = y_\theta$ یعنی $A = (\cos \theta, \sin \theta)$ اگر و فقط اگر $A = (1, \theta)$ در مختصات قطبی. از تعریف توابع سینوس و کسینوس واضح است که برای همه اعداد صحیح k ، $\sin(\theta + 360^\circ k) = \sin \theta$ و $\cos(\theta + 360^\circ k) = \cos \theta$ یعنی آنها توابع متناوب با دوره تناوب 360° هستند. برای $\theta \neq (2k+1) \times 90^\circ$ ، $\tan \theta$ به صورت $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ و برای $\theta \neq k \times 180^\circ$ ، $\cot \theta$ به صورت $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ تعریف می‌شود. به سادگی می‌توان دید که $\tan \theta$ برابر شیب خطی است که با محور x ها زاویه استاندارد θ را می‌سازد.

فرض کنید $A = (\cos \theta, \sin \theta)$ را B نقطه‌ای روی ω بگیرید که رأس مقابل قطری باشد که از A می‌گذرد. بنابراین $B = (1, \theta + 180^\circ) = (1, \theta - 180^\circ)$. چون A و B نسبت به مرکز قرینه هستند لذا $B = (-\cos \theta, -\sin \theta)$

$$\sin(\theta \pm 180^\circ) = -\sin \theta \quad , \quad \cos(\theta \pm 180^\circ) = -\cos \theta$$

به سادگی می‌توان دید که هر دو تابع $\tan \theta$ و $\cot \theta$ ، توابعی با دوره تناوب 180° هستند. بطور مشابه با دوران نقطه A حول مبدا به اندازه 90° در خلاف جهت عقربه‌های ساعت (به نقطه C_1 در شکل ۱-۱)، در جهت عقربه‌های ساعت (به نقطه C_2). قرینه نسبت به محور x (به نقطه D) و قرینه نسبت به محور y (به نقطه E) می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 90^\circ) &= \cos \theta & , & & \cos(\theta + 90^\circ) &= -\sin \theta \\ \sin(\theta - 90^\circ) &= -\cos \theta & , & & \cos(\theta - 90^\circ) &= \sin \theta \\ \sin(-\theta) &= -\sin \theta & , & & \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \sin(180^\circ - \theta) &= \sin \theta & , & & \cos(180^\circ - \theta) &= -\cos \theta \end{aligned}$$

علاوه بر آن با قرینه A نسبت به خط $y = x$ و یا با استفاده از فرمول‌های دوم و سوم بالا می‌توان نشان داد که $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ و $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$. این مطلب دلیل این نامگذاری برای تابع "کسینوس" است: "کسینوس" متمم^۱ سینوس است، چون زوایای θ و $90^\circ - \theta$ متمم هم هستند. تمام این خواص مهم و جذاب مثلثاتی بر مبنای خواص هندسی دایره واحد می‌باشد.

complement ¹

پیشتر فرمول‌های جمع و تفریق را برای زوایای α و β با شرایط $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$ و $\alpha + \beta < 90^\circ$ بدست آوردیم. با توجه به تعریف جامع توابع مثلثاتی می‌توان این فرمول‌ها را به همه زوایای تعمیم داد. برای مثال با فرض اینکه α و β دو زاویه با شرط $0 \leq \alpha, \beta < 90^\circ$ و $\alpha + \beta > 90^\circ$ باشند قرار می‌دهیم $\alpha + \beta > 90^\circ$ و $\beta' = 90^\circ - \beta$ سپس α' و β' زوایایی بین 0° و 90° هستند که جمع‌شان کمتر از 90° است. با فرمول جمع که قبلاً بدست آوردیم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos[180^\circ - (\alpha' + \beta')] = -\cos(\alpha' + \beta') \\ &= -\cos \alpha' \cos \beta' + \sin \alpha' \sin \beta' \\ &= -\cos(90^\circ - \alpha') \cos(90^\circ - \beta') + \sin(90^\circ - \alpha') \sin(90^\circ - \beta') \\ &= -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

بنابراین فرمول جمع برای تابع کسینوس برای زوایای α و β با شرط $0^\circ \leq \alpha, \beta < 90^\circ$ و $\alpha + \beta > 90^\circ$ نیز برقرار است. بطور مشابه می‌توان نشان داد که همه فرمول‌های جمع که قبلاً بدست آمدند برای همه زوایای α و β برقرار است. علاوه بر آن می‌توان فرمولهای تفریق را به صورت زیر اثبات کرد

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

این فرمولها را فرمولهای جمع و تفریق می‌نامیم. شکلهای مختلف فرمولهای زوایای دو برابر و سه برابر حالات خاصی از فرمولهای جمع و تفریق هستند. فرمولهای دو برابر منجر به شکلهای متنوع فرمولهای نصف زاویه می‌شود. همچنین می‌توان فرمولهای ضرب به جمع را از فرمولهای جمع و تفریق بدست آورد که ما آن را به خواننده می‌سپاریم. برای زوایای α و β از فرمولهای جمع و تفریق داریم:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\ &= \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ &\quad + \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

که یکی از فرمولهای جمع به ضرب است. بطور مشابه می توان شکل‌های مختلف فرمولهای جمع به ضرب و تفریق به ضرب را بدست آورد.

مثال ۱-۴: فرض کنید a و b اعداد حقیقی نامنفی باشند.

(آ) ثابت کنید عدد حقیقی x وجود دارد بطوریکه $\sin x + a \cos x = b$ اگر و فقط اگر $a^2 - b^2 + 1 \geq 0$.

(ب) اگر $\sin x + a \cos x = b$ باشد عبارت $|a \sin x - \cos x|$ را بر حسب a و b بیان کنید.

پاسخ: برای قسمت (آ) نتیجه کلی تری را اثبات می کنیم.

(آ) فرض کنید m ، n و l اعداد حقیقی باشند که $m^2 + n^2 \neq 0$. ثابت می کنیم عدد حقیقی x وجود دارد که

$$(*) \quad m \sin x + n \cos x = l$$

اگر و فقط اگر $m^2 + n^2 \geq l^2$.

معادله (*) را می توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \sin x + \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \cos x = \frac{l}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

نقطه $\left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \right)$ روی دایره واحد قرار دارد. عدد حقیقی یکتای α با شرط $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ وجود دارد که

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \quad \text{و} \quad \sin \alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

با توجه به فرمولهای جمع و تفریق داریم

$$\sin(x + \alpha) = \cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x = \frac{l}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

که برای x قابل حل است اگر و فقط اگر $1 \leq \frac{l}{\sqrt{m^2+n^2}} \leq 1$ یا به عبارت دیگر اگر و فقط اگر $l^2 \leq m^2 + n^2$ باشد. با قرار دادن $m=1$ ، $n=a$ و $l=b$ نتیجه دلخواه بدست می آید.

(ب) از روابط

$$\begin{aligned} a^x + 1 &= (\sin^x x + \cos^x x)(a^x + 1) \\ &= (\sin^x x + 2a \sin x \cos x + a^x \cos^x x) \\ &\quad + (a^x \sin^x x - 2a \sin x \cos x + \cos^x x) \\ &= (\sin x + a \cos x)^x + (a \sin x - \cos x)^x \end{aligned}$$

نتیجه می گیریم که $|a \sin x - \cos x| = \sqrt{a^x - b^x + 1}$.

منحنی توابع مثلثاتی

واحد اعداد روی محور x را، درجه قرار می دهیم. نمودار $y = \sin x$ چنانچه در شکل ۱-۱۲ نشان داده شده است مانند یک موج است. (این فقط قسمتی از منحنی است. منحنی در هر دو جهت در طول محور x ها تا بی نهایت ادامه دارد) برای مثال نقطه $A = (1, x^\circ)$ با نقطه $A_1 = (x, \sin x)$ روی منحنی $y = \sin x$ متناظر است. اگر دو نقطه B_1 و C_1 در جهت محور x ، 36° از یکدیگر فاصله داشته باشند آنگاه مقدار y هر دوی آنها یکسان است و هر دو با نقطه $B = C$ روی دایره واحد متناظر هستند. (این موضوع به دلیل برقراری رابطه $\sin(x + 36^\circ) = \sin x$ می باشد). علاوه بر آن منحنی نسبت به خط $x = 90^\circ$ متقارن است (این موضوع به دلیل برقراری رابطه $\sin(90^\circ - x) = \sin(90^\circ + x)$ است) رابطه $\sin(-x^\circ) = -\sin x^\circ$ نشان می دهد که منحنی $y = \sin x$ نسبت به مبدا متقارن بوده و سینوس یک تابع فرد است.