فصل اول

تابع ۱

فصل اول ریاضی ۳، در امتحان نوبت اول، ۷ نمره و در نوبت دوم، ۲ نمره و در شهریور و دی، ۳ نمره دارد. در این فصل مباحثی چون توابع چندجمله‌ای، توابع یکنوا و اکیداً یکنوا، ترکیب توابع، رسم نمودار به کمک انتقال، قرینه و ... وارون تابع و ویژگی‌های آن مطرح شده است.

فیلم شب امتحان

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-codeهای مقابل را اسکن کنید.

بسته ۱ | بسته ۲ و ۳ | بسته ۴

بسته اول

توابع چندجمله‌ای – توابع صعودی و نزولی

صفحه ۲ تا ۱۰ کتاب درسی

بستهٔ اول شامل تعریف توابع چندجمله‌ای، توابع صعودی و نزولی است که معمولاً در امتحان نهایی به‌صورت درست یا نادرست و هم‌چنین تکمیل‌کردن جای خالی، از آن سؤال مطرح می‌شود.

الف توابع چند جمله‌ای

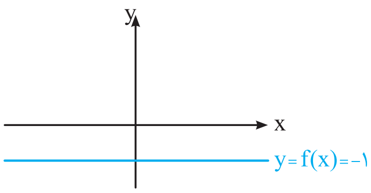
توابعی را که ضابطهٔ آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر باشند، توابع چندجمله‌ای می‌گوییم. به عبارت دیگر به تابع با ضابطهٔ $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ که در آن a_0، a_1، ... و a_n اعداد حقیقی، $a_n \neq 0$ و $n\in\mathbb{W}$، تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌گوییم.

نکته دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ خواهد بود. برد توابع چندجمله‌ای از درجهٔ فرد، همواره برابر $\mathbb{R}$ است.

مثال هر یک از توابع مقابل یک تابع چندجمله‌ای با دامنهٔ $\mathbb{R}$ می‌باشند: $g(x)=-3x^2+5x+1$ $\quad$ $f(x)=2x^5-4x^3-\frac{1}{2}x+3$

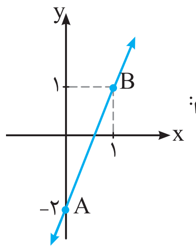
f یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ فرد ۵ است و در نتیجه برد تابع f برابر $\mathbb{R}$ است.

یادآوری با انواع توابع چندجمله‌ای قبلاً آشنا شده‌ایم، تعریف آن‌ها به‌صورت یادآوری گفته می‌شود:



۱ تابع چندجمله‌ای از درجهٔ صفر که به آن تابع ثابت می‌گوییم. ضابطهٔ تابع ثابت به‌صورت $f(x)=a$ است که در آن a یک عدد حقیقی دلخواه است. نمودار تابع ثابت به‌صورت یک خط به موازات محور x ها می‌باشد.

مثال نمودار تابع $f(x)=-1$ به‌صورت مقابل است:



۲ تابع چندجمله‌ای از درجهٔ یک که به آن تابع خطی می‌گوییم. ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax+b$، $a\neq 0$ می‌باشد. نمودار آن یک خط راست است و برای رسم آن از دو نقطهٔ دلخواه روی آن استفاده می‌کنیم.

مثال تابع $f(x)=3x-2$ یک تابع دو جمله‌ای از درجهٔ اول است. برای رسم نمودار، دو نقطهٔ دلخواه روی آن مشخص می‌کنیم:

$$x=0 \Rightarrow f(0)=3(0)-2=-2 \Rightarrow A(0,-2)$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=3(1)-2=1 \Rightarrow B(1,1)$$

دو نقطهٔ A و B را روی دستگاه مشخص می‌کنیم و آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم و از دو طرف ادامه می‌دهیم.

۳ تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ که ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ ، $a\neq ۰$ است. نمودار تابع درجه ۲ را سهمی می‌گوییم و برای رسم آن باید رأس سهمی را مشخص کنیم: $S(x=-\frac{b}{۲a}, f(-\frac{b}{۲a})=-\frac{\Delta}{۴a})$

اگر $a>۰$ ، سهمی رو به بالا و اگر $a<۰$ ، آن‌گاه سهمی رو به پایین است. در سهمی خط $x=-\frac{b}{۲a}$ ، محور تقارن سهمی است.

! نکته برای رسم سهمی می‌توان در صورت امکان، محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را مشخص کرد.

سؤال **نمودار تابع درجه دوم به معادلهٔ $f(x)=-x^{۲}+۶x-۵$ را رسم کنید.**

پاسخ ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

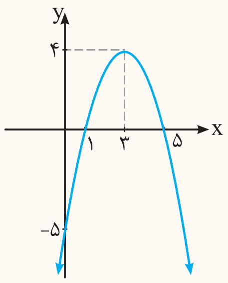
$$x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۶}{۲(-۱)}=۳\Rightarrow y_S=f(۳)=-۹+۱۸-۵=۴$$

حالا مختصات محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را نیز به دست می‌آوریم:

$$x=۰\Rightarrow y=-۵\ ,\ y=۰\Rightarrow -x^{۲}+۶x-۵=۰\xrightarrow{\times(-۱)}x^{۲}-۶x+۵=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x-۵)=۰\Rightarrow x=۱ \text{ یا } x=۵$$

x	۰	۱	۳ (S)	۵
y	-۵	۰	۴	۰

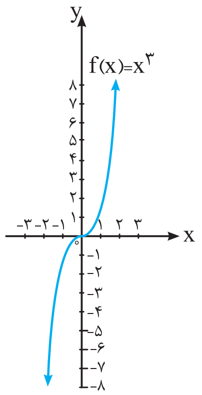


علاوه بر نمودارهایی که تاکنون یادگرفته‌اید، نمودار $y=x^{۳}$ را نیز حفظ کنید که با توجه به آن و به کمک انتقال و ... نمودارهای دیگری را رسم می‌کنیم.

تابع درجه ۳

تابع چندجمله‌ای با ضابطهٔ $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ ، $a\neq ۰$ یک تابع درجه ۳ است. دامنه و برد این تابع برابر $\mathbb{R}$ ، یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

نمودار تابع $y=x^{۳}$ به کمک نقطه‌یابی به‌صورت مقابل است:



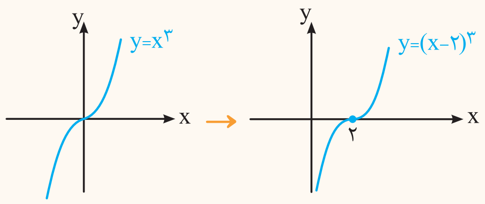
x	$f(x)=x^{۳}$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۸}$
۰	۰
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۸}$
۱	۱
۲	۸

! نکته فقط نمودار توابعی به صورت $y=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ را می‌توان رسم کرد که با کمک اتحادها به‌صورت $y=a(x-b)^{۳}+c$ نوشته شود. به عنوان مثال، ضابطهٔ تابع $y=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱$ به‌صورت $y=(x+۱)^{۳}$ است و می‌توان نمودار آن را به کمک انتقال رسم کرد.

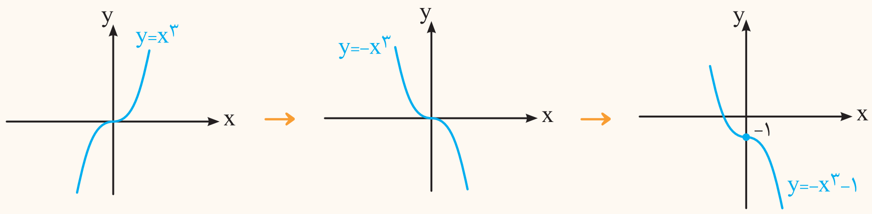
سؤال **نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.**

۱ $y=(x-۲)^{۳}$ **۲** $y=-x^{۳}-۱$

پاسخ **۱** اگر نمودار $y=x^{۳}$ را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=(x-۲)^{۳}$ به دست می‌آید.



۲ ابتدا نمودار $y=x^{۳}$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-x^{۳}$ به دست آید. با انتقال نمودار $y=-x^{۳}$ به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین، نمودار $y=-x^{۳}-۱$ رسم می‌شود:



تلنگر: حواست باشه !

مقایسهٔ نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ که در یک بازه، کدام بالاتر و یا پایین‌تر قرار می‌گیرد، از سؤالات امتحانی است.

سؤال **نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ را در یک دستگاه رسم کنید و مشخص کنید که در کدام بازه، نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار می‌گیرد؟**

پاسخ برای مقایسهٔ نمودار دو تابع، ابتدا نقاطی را که مقدار دو تابع برابر می‌شوند را مشخص می‌کنیم. یعنی باید معادلهٔ $x^3 = x^2$ را حل کنیم:

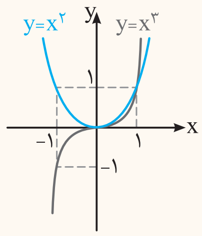
$$x^2 = x^3 \Rightarrow x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

پس دو تابع در دو نقطه با طول‌های $x = 0$ و $x = 1$ برهم منطبق‌اند.

از دو نقطهٔ کمکی دیگر نیز برای رسم نمودار استفاده می‌کنیم.

نمودار دو تابع در یک دستگاه به‌صورت مقابل است:

با توجه به نمودار، در بازهٔ $(-\infty, 0)$ و $(0, 1)$، نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد و در بازهٔ $(1, +\infty)$، نمودار $y = x^3$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.



x	-1	0	1	2
$y = x^2$	1	0	1	4
$y = x^3$	-1	0	1	8

در این قسمت، تعریف توابع یکنوا و اکیداً یکنوا را یاد می‌گیریم. توابعی را بررسی می‌کنیم که ابتدا نمودار آن‌ها را رسم می‌کنیم و سپس به سؤالات پاسخ می‌دهیم.

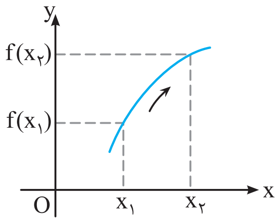
ب توابع اکیداً صعودی و نزولی

فرض کنیم $A \subseteq D_f$ باشد؛

تعریف می‌گوییم تابع f روی A اکیداً صعودی است هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in A$ داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

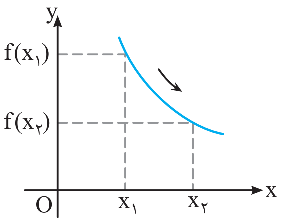
در نمودار توابع اکیداً صعودی، وقتی روی محور xها، از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار همواره در حال بالا رفتن است.



تعریف می‌گوییم f روی A اکیداً نزولی است، هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in A$ داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

در نمودار مقابل، وقتی مقدار x در دامنهٔ f افزایش می‌یابد، مقدار y کاهش می‌یابد. در واقع نمودار از چپ به راست، در حال پایین آمدن است.



تعریف به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.

توابع صعودی و نزولی

تعریف تابع f روی A صعودی است اگر و فقط اگر برای هر $x_1, x_2 \in A$:

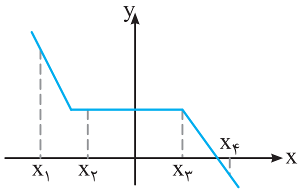
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

و تابع f روی A نزولی است اگر و تنها اگر برای هر $x_1, x_2 \in A$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$$

مثال در نمودار زیر، هرچه مقدار x در دامنهٔ تابع f بیش‌تر می‌شود، مقدار y یا کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند. طبق تعریف، تابع f، تابعی نزولی است.

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$$



تعریف به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

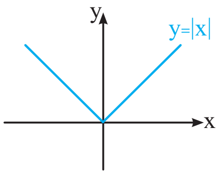
تلنگر: حواست باشه !

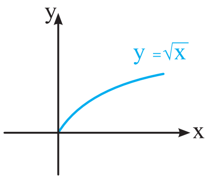
تعریف تابع ثابت و این نکته که تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی است، در امتحان مطرح می‌شود.

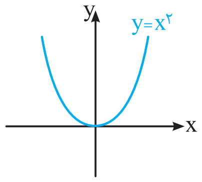
تعریف تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد.

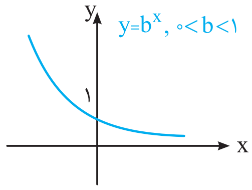
! نکته با توجه به تعریف، تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود و در نتیجه تابعی یکنوا است.

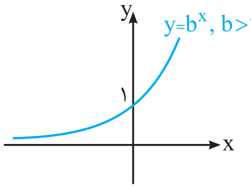
یادآوری در این قسمت برخی از نمودارهایی را که باید به عنوان نمودار اصلی حفظ باشیم و از آن‌ها در یکنوایی استفاده کنیم را رسم کرده‌ایم:

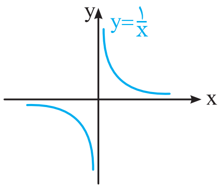


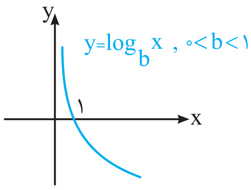


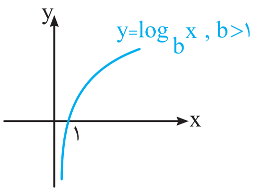


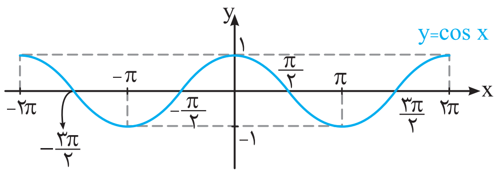


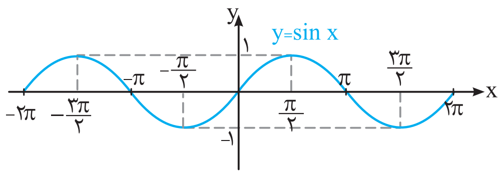






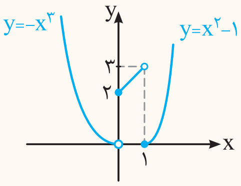






سؤال نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x\geq ۱ \\ x+۲ & ۰\leq x<۱ \\ -x^۳ & x<۰ \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است؟

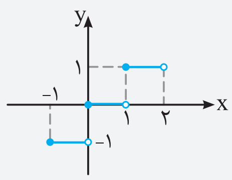
پاسخ با رسم سهمی $y=x^۲-۱$ در بازهٔ $[۱,+\infty)$، خط $y=x+۲$ در بازهٔ $[۰,۱)$ و تابع درجه سوم $y=-x^۳$ در بازهٔ $(-\infty,۰)$، نمودار تابع f به دست می‌آید:



با توجه به نمودار تابع f، تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۰)$، تابعی اکیداً نزولی، روی بازهٔ $[۰,۱)$، تابعی اکیداً صعودی و در بازهٔ $[۱,+\infty)$، تابعی اکیداً صعودی است. توجه کنید که تابع f روی $\mathbb{R}$، اکیداً یکنوا نیست.

! نکته تفاوت نمودار توابع اکیداً یکنوا و توابع یکنوا در این است که در توابع یکنوا قسمتی از نمودار یا تمام نمودار می‌تواند خطی به موازات محور xها باشد.

مثال تابع $y=[x]$ که نمودار آن به‌صورت مقابل است، تابعی یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نمی‌باشد.



بسته ۱ **پرسش‌های تشریحی** توابع چندجمله‌ای – توابع صعودی و نزولی

● **درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.**

۱ . تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است. (دی ۹۷، خرداد ۹۹)

۲ . دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است. (شهریور ۱۴۰۰)

۳ . تابع $y = -x^{۳} + ۲$ در دامنهٔ تعریفش صعودی است. (شهریور ۹۸)

۴ . تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است. (شهریور ۱۴۰۰)

۵ . تابع $y = \sqrt{۲}x^{۳} - \frac{۳}{۴}x$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۳ است. (دی ۱۴۰۰)

۶ . برد تابع $f(x) = ۴x^{۳} + x - ۱$ برابر $\mathbb{R}$ است.

۷ . تابع $y = ۲x^{۵} - ۴x^{۳} + \sqrt{۷}x$ یک تابع چندجمله‌ای نیست. (خرداد ۹۹ خارج)

۸ . تابع $f(x) = \sin x + ۵x$ یک تابع چندجمله‌ای است. (دی ۹۹ خارج)

۹ . تابع $f(x) = |x|$ در تمام دامنه‌اش صعودی است. (خرداد ۹۹ خارج)

۱۰ . هر تابع اکیداً یکنوا، یکنوا نیست. (دی ۹۹ خارج)

۱۱ . تابع $y = (\frac{۱}{۲})^{x}$ در دامنه خود یک تابع اکیداً نزولی است. (شهریور۱۴۰۰ خارج)

۱۲ . بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است. (خرداد ۱۴۰۲)

۱۳ . تابع $y = \sqrt{۲}x - x^{۲}$ یک تابع درجه دوم است. (خرداد ۱۴۰۱)

۱۴ . تابع $f(x) = x^{۳}$، تابعی اکیداً صعودی است. (خرداد ۱۴۰۱)

۱۵ . تابع $y = ۲^{x} - ۲$ صعودی است. (خرداد ۱۴۰۱ خارج)

● **در سؤال‌های ۱۶ تا ۲۱، در جاهای خالی، عبارت مناسب قرار دهید.**

۱۶ . توابع اکیداً یکنوا، همواره .... هستند. (شهریور ۹۹)

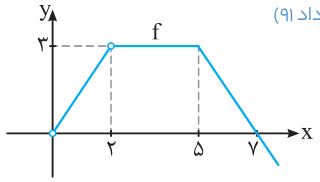
۱۷ . در بازهٔ $(۰,۱)$، نمودار تابع $y = x^{۳}$، .... نمودار تابع $y = x^{۲}$ قرار دارد. (دی ۹۹ و ۱۴۰۰)

۱۸ . تابع $y = (x+۱)^{۳}$ در دامنهٔ تعریف خود .... (صعودی – نزولی) است. (خرداد ۹۸)

۱۹ . تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع .... نامیده می‌شود. (دی ۹۸ و خرداد ۹۹ خارج)

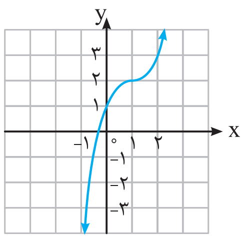
۲۰ . تابع $y = ۲^{x}$ در دامنهٔ تعریف خود .... (اکیداً صعودی – اکیداً نزولی) است.

۲۱ . تابع f با نمودار مقابل در بازهٔ .... اکیداً صعودی و در بازهٔ .... اکیداً نزولی و در بازهٔ $[۲,۵]$، .... است. (خرداد ۹۱)

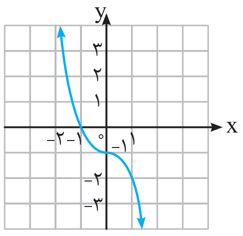


۲۲ . ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

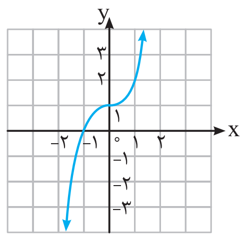
آ $y = x^{۳} + ۱$ ب $y = -x^{۳} - ۱$ پ $y = (x-۱)^{۳} + ۲$ ت $y = (x+۱)^{۳} - ۱$



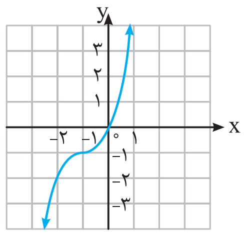
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

● نمودار توابع سؤالات ۲۳ تا ۲۷ را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

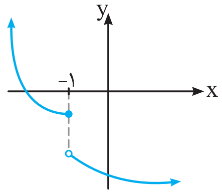
۲۳. $y = x^3 - 1$ ‏ ۲۵. $y = (x+2)^3 - 1$ ‏ ۲۷. $y = -(x-1)^3 - 1$

۲۴. $y = -x^3 - 2$ ‏ ۲۶. $y = (x-1)^3 + 2$

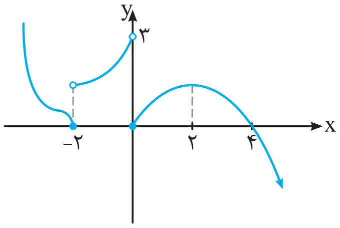
۲۸. نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ را در یک دستگاه رسم کنید و مشخص کنید در کدام بازه، نمودار کدام تابع بالاتر و کدام پایین‌تر است؟ (فعالیت صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

● در هر کدام از توابع سؤالات ۲۹ و ۳۰، مشخص کنید در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی (صعودی) و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی (نزولی) هستند. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

۲۹.



۳۰.



۳۱. روی بازهٔ $[0,2]$ نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازهٔ $[0,1]$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[1,2]$ اکیداً نزولی باشد.

۳۲. نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نباشد. (تمرین ۷ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۳۳. نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$$

۳۴. ضابطهٔ تابعی را بنویسید که در دامنهٔ خود غیریکنوا باشد.

● نمودار توابع سؤالات ۳۵ تا ۴۱ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

۳۵. $f(x) = -x^2 + 4x$ ‏ ۳۹. $f(x) = -x^3 + 2$

۳۶. $f(x) = x + |x|$ ‏ ۴۰. $f(x) = x^2|x|$

۳۷. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ‏ ۴۱. $f(x) = \cos x, x \in [-\pi, 2\pi]$

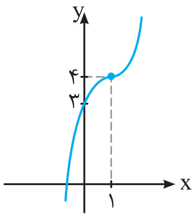
۳۸. $f(x) = \frac{1}{x}$

۴۲. نمودار هر یک از توابع $y = b^x$ و $y = \log_b x$ را در حالت‌های $b > 1$ و $0 < b < 1$ رسم کنید و در هر حالت نوع یکنوایی تابع را مشخص کنید.
هم‌چنین با رسم توابع $y = 2^x - 2$ و $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$، نوع یکنوایی آن‌ها را مشخص کنید.

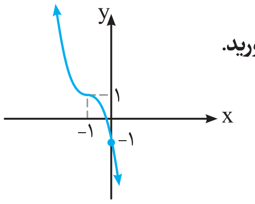
۴۳. تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ 2 & 0 < x \le 1 \\ -x-1 & x \le 0 \end{cases}$ در بازهٔ $(-\infty, a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a چقدر است؟ (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۴۴. نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ را رسم کنید.

۴۵. نمودار تابع $y = a(x-b)^3 + c$ به‌صورت مقابل است. مقادیر a، b و c را مشخص کنید.



۴۶. نمودار تابع $f(x) = a(x+b)^3 + c$ به‌صورت مقابل است. اگر $g(x) = b(x-a)^3 + c$ باشد، مقدار $g(2)$ را به دست آورید.



۴۷. نمودار $f(x) = x^3$ را ابتدا به اندازهٔ یک واحد به سمت راست و سپس به اندازهٔ ۷ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g حاصل شود. نمودار توابع f و g با چه طول‌هایی همدیگر را قطع می‌کنند؟

بستهٔ دوم

ترکیب توابع

صفحه ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

در این قسمت از دو تابع f و g، تابع جدیدی می‌سازیم که به آن ترکیب توابع می‌گوییم. مسائل مهم در این درسنامه به دست آوردن ضابطهٔ تابع مرکب، مقدار عددی و دامنهٔ تابع مرکب با استفاده از تعریف است.

ترکیب توابع

تعریف ترکیب دو تابع f و g تابعی است که آن را با نماد fog نشان می‌دهیم (بخوانید اف اُ جی) و به‌صورت $(fog)(x)=f(g(x))$ یا $fog: x \longrightarrow f(g(x))$ تعریف می‌کنیم.

نمودار ترکیب دو تابع به‌صورت مقابل است:

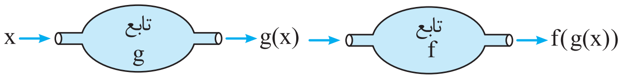
$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

$(fog)(x)=f(g(x))$

مراحل ساخت تابع fog:

۱ x باید در دامنهٔ g باشد. در مرحلهٔ اول، x ورودی و $g(x)$ خروجی است.

۲ $g(x)$ باید در دامنهٔ f باشد. در مرحلهٔ دوم، $g(x)$ ورودی و $f(g(x))$ خروجی است.



نکته برای به دست آوردن ضابطهٔ $(fog)(x)$، در تابع f به جای x ضابطهٔ $g(x)$ را قرار می‌دهیم.

سؤال اگر $f(x)=3x-2$ و $g(x)=4x-5$ دو تابع باشند، ضابطهٔ هریک از توابع fog و gof را مشخص کنید.

پاسخ اگر در ضابطهٔ تابع f به جای x، $g(x)$ قرار دهیم، ضابطهٔ تابع $(fog)(x)$ مشخص می‌شود:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(4x-5)=3(4x-5)-2=12x-15-2=12x-17$$

هم‌چنین با قرار دادن $f(x)$ به جای x در ضابطهٔ تابع g، ضابطهٔ تابع $(gof)(x)$ مشخص می‌شود:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(3x-2)=4(3x-2)-5=12x-8-5=12x-13$$

نکته همان‌طور که در این سؤال می‌بینیم، ضابطهٔ fog و gof لزوماً یکی نیستند. ممکن است در مثال‌هایی fog و gof یکسان شوند.

سؤال اگر $f(x)=x^2-5x+2$ و $g(x)=2x-1$ باشند، جواب‌های معادلهٔ $(fog)(x)=-4$ را مشخص کنید. **مشابه تمرین ۹ کتاب درسی**

پاسخ ضابطهٔ تابع fog را به دست می‌آوریم و آن را مساوی -4 قرار می‌دهیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(2x-1)=(2x-1)^2-5(2x-1)+2$$

$$(fog)(x)=-4 \Rightarrow (2x-1)^2-5(2x-1)+2=-4$$

با فرض $A=2x-1$، داریم:

$$A^2-5A+2=-4 \Rightarrow A^2-5A+6=0 \Rightarrow (A-2)(A-3)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=2 \\ 2x-1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=3 \\ 2x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ x=2 \end{cases}$$

تلنگر: حواست باشه

اینکه ضابطهٔ دو تابع f و g را داشته باشیم و بخواهیم مقدار عددی fog یا gof را به دست بیاوریم، در سؤالات امتحان نهایی وجود دارد.

سؤال اگر $f(x)=\sqrt{۲x+۱}$ و $g(x)=\frac{x}{x+۱}$ دو تابع باشند، مقدار عددی $(fog)(-۳)$ و $(gof)(۴)$ را به دست آورید.

پاسخ مقدار عددی $(fog)(-۳)$ برابر $f(g(-۳))$ است. ابتدا مقدار $g(-۳)$ را با قرار دادن عدد -۳ به جای x در ضابطهٔ g به دست می‌آوریم:

$$g(x)=\frac{x}{x+۱}\Rightarrow g(-۳)=\frac{-۳}{-۳+۱}=\frac{-۳}{-۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(g(-۳))=f(\frac{۳}{۲})$$

حال باید در ضابطهٔ f به جای x، $\frac{۳}{۲}$ قرار دهیم:

$$f(x)=\sqrt{۲x+۱}\Rightarrow f(\frac{۳}{۲})=\sqrt{۲\times\frac{۳}{۲}+۱}=\sqrt{۳+۱}=۲\Rightarrow (fog)(-۳)=۲$$

برای به دست آوردن مقدار $(gof)(۴)$، یعنی $g(f(۴))$ ابتدا مقدار $f(۴)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{۲x+۱}\Rightarrow f(۴)=\sqrt{۲\times۴+۱}=\sqrt{۹}=۳\Rightarrow g(f(۴))=g(۳)$$

حال باید مقدار $g(۳)$ را از ضابطهٔ $g(x)$ به دست بیاوریم:

$$g(x)=\frac{x}{x+۱}\Rightarrow g(۳)=\frac{۳}{۳+۱}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow g(f(۴))=g(۳)=\frac{۳}{۴}$$

سؤال اگر $f=\{(۲,-۱),(۱,۴),(۳,۰),(۵,۲)\}$ و $g=\{(۴,۲),(۳,۱),(۲,۱),(۱,۶)\}$ دو تابع باشند، هر یک از توابع fog و gog را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

مشابه تمرین ۱ کتاب درسی

پاسخ برای مشخص کردن تابع fog، ابتدا تابع روی g اثر می‌کند:

$$۳\xrightarrow{g}۱\xrightarrow{f}۴ \qquad (fog)(۳)=۴$$

$$۴\xrightarrow{g}۲\xrightarrow{f}-۱ \qquad (fog)(۴)=-۱$$

$$۱\xrightarrow{g}۶\xrightarrow{f}? \qquad (fog)(۱) \text{ وجود ندارد}$$

$$۲\xrightarrow{g}۱\xrightarrow{f}۴ \qquad (fog)(۲)=۴$$

$$\Rightarrow fog=\{(۴,-۱),(۳,۴),(۲,۴)\}$$

برای مشخص کردن تابع gog، داریم:

$$(gog)(۴)=g(g(۴))=g(۲)=۱\Rightarrow(۴,۱)\in gog\ ,\ (gog)(۳)=g(g(۳))=g(۱)=۶\Rightarrow(۳,۶)\in gog$$

$$(gog)(۲)=g(g(۲))=g(۱)=۶\Rightarrow(۲,۶)\in gog\ ,\ (gog)(۱)=g(g(۱))=g(۶)\ \text{تعریف‌نشده}$$

بنابراین: $gog=\{(۴,۱),(۳,۶),(۲,۶)\}$

سؤال تابع $h(x)=(x^۳-۱)^۲$ را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید (به دو روش).

پاسخ **روش اول** تابع $y=x^۳$ را به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می‌گیریم و با قرار دادن x به جای $x^۳$، تابع حاصل را $f(x)$ در نظر می‌گیریم:

$$g(x)=x^۳\ ,f(x)=(x-۱)^۲\Rightarrow h(x)=f(g(x))=f(x^۳)=(x^۳-۱)^۲$$

روش دوم تابع $y=x^۳-۱$ را به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می‌گیریم و با قرار دادن x به جای $x^۳-۱$، تابع حاصل را $f(x)$ در نظر می‌گیریم:

$$g(x)=x^۳-۱\ ,\ f(x)=x^۲\Rightarrow h(x)=f(g(x))=f(x^۳-۱)=(x^۳-۱)^۲$$

دامنهٔ تابع مرکب

برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع gof دو روش وجود دارد:

روش اول تابع $gof(x)$ را تشکیل دهیم و دامنهٔ تابع به دست آمده را تعیین کنیم (در این روش **نباید** ضابطهٔ تابع را در هیچ مرحله‌ای ساده کنیم).

سؤال اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد، دامنهٔ تابع fog را به دست آورید.

پاسخ

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^۲$$

دامنهٔ تابع $y=(\sqrt{x})^۲$ مجموعهٔ $[۰,+\infty)$ است، بنابراین:

$$D_{fog}=[۰,+\infty)\ ,\ x\geq۰\Rightarrow(fog)(x)=x$$

توجه کنید که اگر قبل از تعیین دامنه به جای $(\sqrt{x})^۲$، x بنویسیم، ضابطهٔ تابع به‌صورت $(fog)(x)=x$ درمی‌آید که دامنهٔ آن برابر $\mathbb{R}$ خواهد بود. بنابراین ضروری است که ابتدا دامنهٔ تابع را محاسبه کنیم و سپس آن را ساده کنیم.

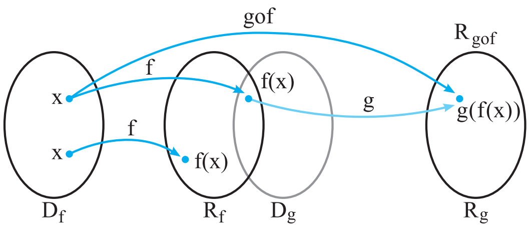
تلنگر:حواست باشه

تعیین دامنهٔ ترکیب دو تابع، یکی از سؤالات پرتکرار امتحان نهایی است.

روش دوم دامنهٔ تابع مرکب gof ، مجموعه x هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱ x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲ $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنهٔ تابع gof را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

توجه اگر $f(x)$ در دامنهٔ تابع g وجود نداشته باشد، آن‌گاه مقدار $g(f(x))$ تعریف نشده است.

نکته برای به دست آوردن دامنهٔ تابع fog :

۱ دامنهٔ توابع f و g را به دست می‌آوریم.

۲ شرط $g(x)\in D_f$ راکه معمولاً یک نامعادله است، حل می‌کنیم و جواب آن را به دست می‌آوریم.

۳ باید از دامنهٔ g و جوابی که از مرحلهٔ ۲ به دست می‌آید اشتراک بگیریم.

سؤال **اگر $f(x)=\frac{x-۱}{۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$ دو تابع باشند. آن‌گاه:**

۱ دامنهٔ تابع gof را به کمک تعریف به دست آورید.

۲ مقدار تابع fog را به ازای $x=۱۱$ به دست آورید.

پاسخ ۱ دامنهٔ تابع درجه اول f برابر $\mathbb{R}$ است. برای به دست آوردن دامنهٔ تابع رادیکالی g ، داریم:

$$x-۲\geq ۰\Rightarrow x\geq ۲\Rightarrow D_g=[۲,+\infty)$$

طبق تعریف، دامنهٔ تابع gof به‌صورت مقابل است:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{x-۱}{۲}\geq ۲\}$$

$$\frac{x-۱}{۲}\geq ۲\Rightarrow x-۱\geq ۴\Rightarrow x\geq ۵\Rightarrow D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq ۵\}=[۵,+\infty)$$

۲ مقدار تابع fog به ازای $x=۱۱$ ، برابر $f(g(۱۱))$ است:

$$g(x)=\sqrt{x-۲}\Rightarrow g(۱۱)=\sqrt{۹}=۳\Rightarrow f(g(۱۱))=f(۳)=\frac{۳-۱}{۲}=۱$$

تلنگر:حواست باشه

یکی از تمرینات کتاب درسی که سؤال امتحان نهایی نیز از آن مطرح شده است، به دست آوردن ضابطهٔ $g(x)$ با در اختیار داشتن ضابطهٔ توابع $f(x)$ و $f(g(x))$ است.

محاسبهٔ $g(x)$ با در اختیار داشتن $f(g(x))$ و $f(x)$

اگر $f(g(x))$ و $f(x)$ معلوم باشند و $g(x)$ را بخواهیم، ابتدا از روی ضابطهٔ تابع f ، $f(g(x))$ را به دست می‌آوریم و سپس آن را با ضابطهٔ $f(g(x))$ داده‌شده برابر قرار می‌دهیم و از این تساوی ضابطهٔ $g(x)$ را تعیین می‌کنیم.

سؤال **اگر $f(g(x))=۲x$ و $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ باشد، ضابطهٔ $g(x)$ را مشخص کنید.** **مشابه تمرین ۳ کتاب درسی**

پاسخ از ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ ، $f(g(x))$ را به دست می‌آوریم:

$$f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)-۱}\;,\;f(g(x))=۲x\Rightarrow\frac{g(x)}{g(x)-۱}=\frac{۲x}{۱}$$

$$\Rightarrow g(x)=۲xg(x)-۲x\Rightarrow g(x)-۲xg(x)=-۲x\Rightarrow g(x)(۱-۲x)=-۲x\Rightarrow g(x)=\frac{-۲x}{۱-۲x}$$

بسته ۲ پرسش‌های تشریحی

ترکیب توابع

● **کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟** (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

۴۸. اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$، آن‌گاه $(fog)(۴)=۵$ (دی ۱۴۰۰)

۴۹. اگر $f(x)=۲x-۳$ و $g(x)=\sqrt{x^۲+۳}$، آن‌گاه $(fog)(۱)=f(۱)$

۵۰. اگر $f(x)=x-۲$ و $g(x)=x^۲-۱$، دامنه تابع gof تهی است. (دی ۹۸ خارج)

۵۱. اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin x$ باشند، آن‌گاه $(gof)(x)=\sqrt{\sin x}$ خواهد بود. (خرداد ۹۹ خارج)

۵۲. اگر f تابعی با دامنهٔ D_f و برد R_f و g تابعی با دامنهٔ D_g و برد R_g باشد، آن‌گاه شرط تشکیل تابع fog آن است که $D_f\cap R_g\neq\varnothing$ باشد.

۵۳. برای دو تابع f و g که $f\neq g$، تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

● **در سؤالات ۵۴ تا ۵۸، درجاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.**

۵۴. اگر $f(x)=۳x-۱$ و $g(x)=x^۲+۱$ باشد، مقدار $fog(۱)$ برابر .... است.

۵۵. دامنهٔ تابع .... برابر $\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$ است.

۵۶. تابع $h(x)=(۲x^۲-۵x+۱)^۲$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x)=۲x^۲-۵x+۱$ و .... $=g(x)$ است. (دی ۹۷)

۵۷. اگر $f(۳)=۷$ و $g(-۱)=۳$ باشد، آن‌گاه $(fog)(-۱)$ برابر .... است. (دی ۱۴۰۱ خارج)

۵۸. اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$ باشد، آن‌گاه $(fog)(۵)$ برابر .... است. (شهریور ۱۴۰۰ خارج)

۵۹. اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۵,-۱),(۰,۲)\}$ و $g=\{(۴,-۲),(-۱,۵),(۲,۱),(۳,۰)\}$ دو تابع باشند، توابع fog، gof و gog را به دست آورید. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

۶۰. اگر $f=\{(۰,-۱),(۵,۹),(۳,۷),(-۲,۴)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۹,۰),(-۱,۴),(۷,۷)\}$، تابع gof را در صورت وجود بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)

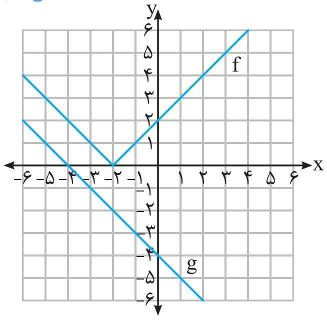
● **با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته‌شده را به دست آورید.** (شهریور ۱۴۰۰)

x	۱-	۰	۱	۲
f(x)	۰	۱-	۲	۵-
g(x)	۲	۳	۴	۲-

۶۱. $(gof)(۱)$

۶۲. $(fo(f+g))(۰)$

● **با توجه به نمودارهای توابع f و g به دو سؤال زیر پاسخ دهید:** (دی ۹۹)



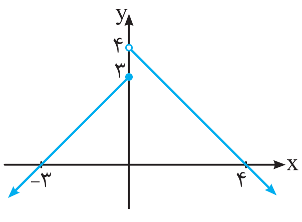
۶۳. مقدار $fog(-۱)$ را محاسبه کنید.

۶۴. اگر $g(۳t-۱)=۰$، آن‌گاه مقدار t را به دست آورید.

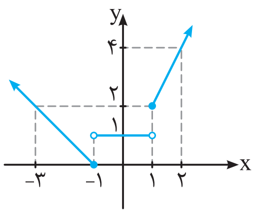
۶۵. با توجه به نمودار توابع f و g، هریک از مقادیر زیر را به دست آورید. (مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

آ) $(fog)(۲)$ ب) $(gof)(۰)$ پ) $(gof)(۴)$

ت) $(fog)(-۱)$ ث) $(fof)(-۴)$ ج) $(gog)(۵)$



نمودار تابع f



نمودار تابع g

۲
بخش

پاسخ‌نامه

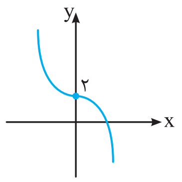
فصل ۱ تابع

۱ درست

۲ درست

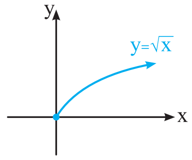
۳ نادرست

نمودار تابع $y=-x^{۳}+۲$ به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، تابع اکیداً نزولی است.



۴ نادرست

نمودار $y=\sqrt{x}$ به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، تابع در دامنه‌اش، اکیداً صعودی است:



۵ درست، زیرا بزرگ‌ترین توان x برابر ۳ است.

۶ درست

برد توابع چندجمله‌ای از درجهٔ فرد برابر $\mathbb{R}$ است. f یک تابع سه‌جمله‌ای از درجهٔ ۳ است و در نتیجه برد آن برابر $\mathbb{R}$ است.

۷ نادرست

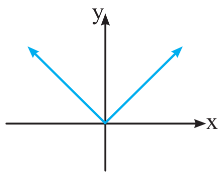
y تابع سه‌جمله‌ای از درجهٔ ۵ است.

۸ نادرست

عبارت $\sin x$ در ضابطهٔ تابع چندجمله‌ای وجود ندارد.

۹ نادرست

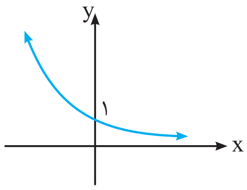
نمودار $y=|x|$ به صورت مقابل است. تابع در بازهٔ $(-\infty,۰]$ نزولی و در بازهٔ $[۰,+\infty)$ صعودی است و در نتیجه تابع روی $\mathbb{R}$، یکنوا نیست.



۱۰ نادرست

۱۱ درست

نمودار تابع نمایی $y=(\frac{۱}{۲})^{x}$ با توجه به اینکه پایه عددی بین ۰ و یک است، تابعی اکیداً نزولی است.



۱۲ درست

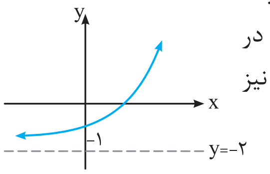
تمام توابع ثابت، جواب می‌باشند. ($y=۱$ ، $y=۲$ و...)

۱۳ درست

۱۴ درست

۱۵ درست

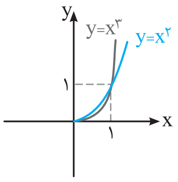
تابع نمایی وقتی که پایه بزرگ‌تر از یک باشد، تابعی اکیداً صعودی است و در نتیجه با انتقال آن به سمت پایین نیز اکیداً صعودی باقی می‌ماند.



۱۶ یکنوا

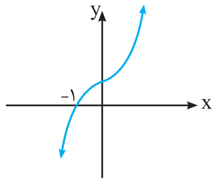
۱۷ پایین

نمودار توابع $y=x^{۲}$ و $y=x^{۳}$ در بازهٔ $(۰,۱)$ به صورت مقابل است:



۱۸ صعودی

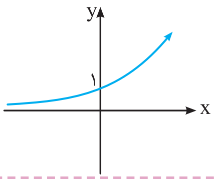
نمودار تابع $y=(x+۱)^{۳}$ به‌صورت مقابل است:



۱۹ ثابت

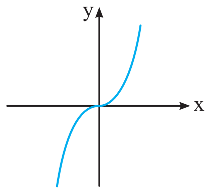
۲۰ اکیداً صعودی

نمودار تابع $y=۲^{x}$ به صورت مقابل است که تابعی اکیداً صعودی است:



۲۱ $(۰,۲)$ ، $[۵,+\infty)$ ، ثابت

۲۲ آ) اگر نمودار $y=x^{۳}$ که به‌صورت مقابل می‌باشد را به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y=x^{۳}+۱$ به‌دست می‌آید. نمودار (۳)، انتقال‌یافتهٔ نمودار $y=x^{۳}$ به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا است.

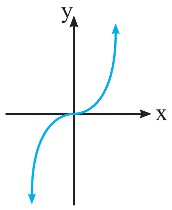


ب) اگر نمودار $y=x^{۳}$ را ابتدا نسبت به محور x ها قرینه کنیم و سپس به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y=-x^{۳}-۱$ به دست می‌آید. نمودار (۲)، نمودار $y=-x^{۳}-۱$ می‌باشد.

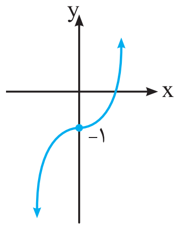
پ) اگر نمودار $y=x^{۳}$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست و سپس به اندازهٔ ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y=(x-۱)^{۳}+۲$ به دست می‌آید. نمودار (۱)، نمودار $y=(x-۱)^{۳}+۲$ می‌باشد.

ت) اگر نمودار $y=x^{۳}$ را ابتدا به اندازهٔ یک واحد به سمت چپ و سپس به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y=(x+۱)^{۳}-۱$ به دست می‌آید. نمودار (۴)، نمودار $y=(x+۱)^{۳}-۱$ می‌باشد.

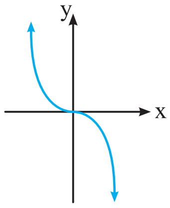
- نمودار تابع $y=x^{۳}$ به‌صورت مقابل است:



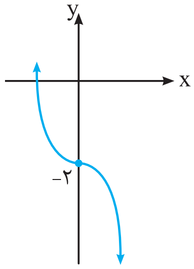
۲۳ اگر نمودار $y=x^{۳}$ را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y=x^{۳}-۱$ به دست می‌آید: دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.



| ۲۴ | ابتدا نمودار $y=x^3$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-x^3$ به دست آید:

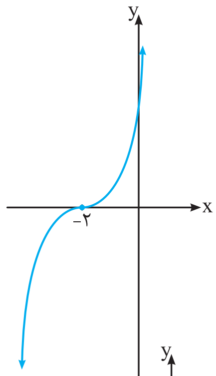


با انتقال نمودار $y=-x^3$ به اندازهٔ دو واحد به سمت پایین، نمودار $y=-x^3-2$ به دست می‌آید:

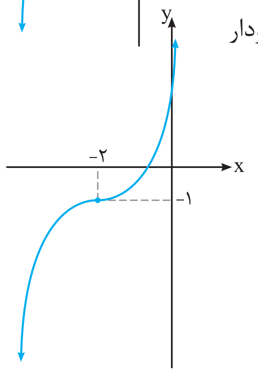


دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.

| ۲۵ | با انتقال نمودار $y=x^3$ به اندازهٔ ۲ واحد به سمت چپ، نمودار $y=(x+2)^3$ به دست می‌آید:

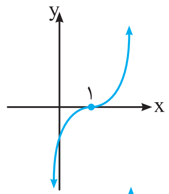


نمودار $y=(x+2)^3$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، تا نمودار $y=(x+2)^3-1$ به دست آید:

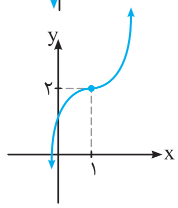


دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.

| ۲۶ | اگر نمودار $y=x^3$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y=(x-1)^3$ به دست می‌آید:

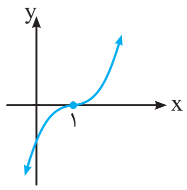


با انتقال نمودار $y=(x-1)^3$، به اندازهٔ دو واحد به سمت بالا نمودار $y=(x-1)^3+2$ به دست می‌آید.

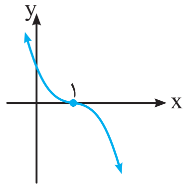


دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است.

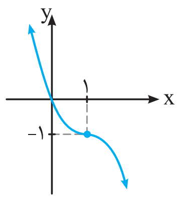
| ۲۷ | اگر نمودار $y=x^3$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y=(x-1)^3$ به دست می‌آید:



با قرینه کردن نمودار $y=(x-1)^3$ نسبت به محور xها، نمودار $y=-(x-1)^3$ به دست می‌آید:

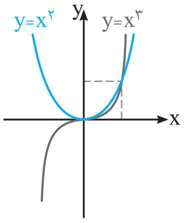


نمودار $y=-(x-1)^3$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=-(x-1)^3-1$ به دست آید:



دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.

| ۲۸ | در بازهٔ $(-\infty,0)$، x^2 عددی مثبت و x^3 عددی منفی است. پس در بازهٔ $(-\infty,0)$، نمودار $y=x^2$ بالاتر از نمودار $y=x^3$ است. در $x=0$ و $x=1$، مقدار دو تابع برابرند و در نتیجه دو نمودار همدیگر را قطع می‌کنند. در بازهٔ $(0,1)$، x^2 بیش‌تر از x^3 است و در نتیجه نمودار $y=x^2$ بالاتر از نمودار $y=x^3$ قرار می‌گیرد و برای $x\in(1,+\infty)$، مقادیر x^3 بیش‌تر از مقادیر x^2 است و در نتیجه نمودار $y=x^3$ بالاتر از نمودار $y=x^2$ قرار می‌گیرد. نمودار دو تابع در یک دستگاه به صورت مقابل است:



● فرض کنیم $A\subseteq D_f$ باشد. تابع f روی A اکیداً صعودی است، هرگاه:

$$x_1,x_2\in A, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

تابع f روی A اکیداً نزولی است، هرگاه:

$$x_1,x_2\in A\ ,\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

تابع f روی A صعودی است، هرگاه:

$$x_1,x_2\in A\ ,\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$$

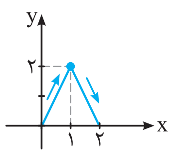
تابع f روی A نزولی است، هرگاه:

$$x_1,x_2\in A, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$$

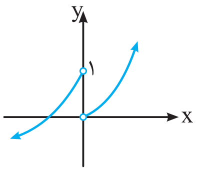
| ۲۹ | با توجه به شکل و با افزایش x، مقدار تابع همواره کم‌تر می‌شود. بنابراین تابع روی $\mathbb{R}$، اکیداً نزولی است.

| ۳۰ | با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $(-\infty,-2]$ و $[2,+\infty)$، اکیداً نزولی و در بازه‌های $(-2,0)$ و $[0,2]$، تابعی اکیداً صعودی است.

| ۳۱ | اگر نمودار f به‌صورت مقابل باشد، آن‌گاه نمودار f در بازهٔ $[0,1]$ درحال صعود و در بازهٔ $[1,2]$ در حال نزول است.



| ۳۲ | اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، آن‌گاه f روی بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است ولی در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نمی‌باشد.



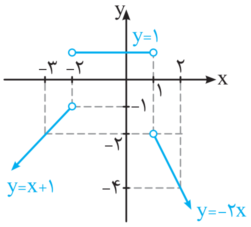
برای پاسخ به چنین سؤالاتی باید نمودار توابع غیرپیوسته را رسم کنیم.

۳۳ برای رسم نمودار تابع سه‌ضابطه‌ای f، باید خط $y=x+۱$ را در محدودهٔ $(-\infty,-۲)$، خط $y=۱$ را در محدودهٔ $(-۲,۱)$ و خط $y=-۲x$ را در محدودهٔ $(۱,+\infty)$ رسم کنیم (برای رسم خط، دو نقطه از خط را مشخص می‌کنیم):

x	۱	۲
$y=-۲x$	-۲	-۴

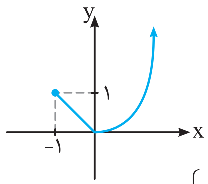
x	-۲	۱
$y=۱$	۱	۱

x	-۳	-۲
$y=x+۱$	-۲	-۱



با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(-\infty,-۲)$، تابعی اکیداً صعودی، در بازهٔ $(-۲,۱)$، تابعی ثابت و در بازهٔ $(۱,+\infty)$، تابعی اکیداً نزولی می‌باشد.

۳۴ نمودار تابعی را رسم می‌کنیم که ابتدا اکیداً نزولی و سپس اکیداً صعودی باشد و سپس ضابطهٔ آن را می‌نویسیم:



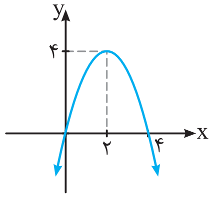
ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\begin{cases}-x & -۱\le x\le ۰\\ x^۲ & x>۰\end{cases}$ است.

۳۵ برای رسم نمودار $y=-x^۲+۴x$، رأس سهمی و نقاط تلاقی با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

$$x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲(-۱)}=۲\Rightarrow y_S=-(۲)^۲+۴(۲)=۴$$

$$x=۰\Rightarrow y=۰\ ,\ y=۰\Rightarrow -x^۲+۴x=۰\Rightarrow x(-x+۴)=۰$$

$$\Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=۴$$

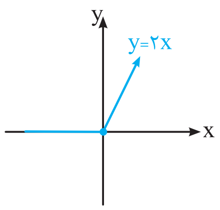


با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(-\infty,۲]$ اکیداً صعودی و تابع در بازهٔ $[۲,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

۳۶ با حذف قدرمطلق، تابع را به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$|x|=\begin{cases}x & x\ge ۰\\ -x & x<۰\end{cases}$$

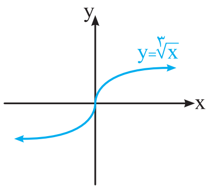
$$\Rightarrow y=x+|x|=\begin{cases}x+x & x\ge ۰\\ x+(-x) & x<۰\end{cases}=\begin{cases}۲x & x\ge ۰\\ ۰ & x<۰\end{cases}$$



با رسم تابع ثابت $y=۰$ برای $x<۰$ و نیم‌خط $y=۲x$ برای $x\ge ۰$، نمودار تابع f رسم می‌شود:

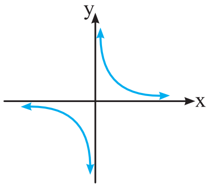
نمودار f در بازهٔ $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(-\infty,۰]$، هم صعودی و هم نزولی است (f تابع ثابت است). تابع f در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ صعودی است.

۳۷ نمودار تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ به‌صورت مقابل است:



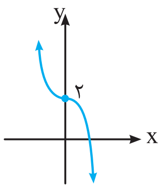
با توجه به نمودار، تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

۳۸ نمودار تابع گویای $y=\frac{۱}{x}$ به‌صورت مقابل است:



تابع در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است. ولی تابع روی $\mathbb{R}$ غیریکنوا است.

۳۹ نمودار تابع $y=-x^۳+۲$ به‌صورت مقابل است:

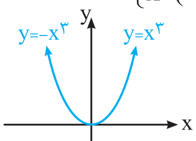


تابع روی $\mathbb{R}$، اکیداً نزولی است.

۴۰ ابتدا با حذف قدرمطلق، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

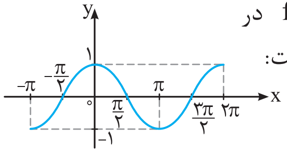
$$y=x^۲|x|=\begin{cases}x^۲(x) & x\ge ۰\\ x^۲(-x) & x<۰\end{cases}=\begin{cases}x^۳ & x\ge ۰\\ -x^۳ & x<۰\end{cases}$$

نمودار تابع به‌صورت مقابل است:



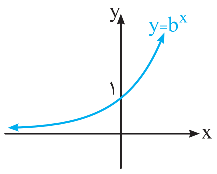
تابع در بازهٔ $(-\infty,۰]$، اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[۰,+\infty)$، اکیداً صعودی است.

۴۱ نمودار تابع $f(x)=\cos x$ در بازهٔ $[-\pi,۲\pi]$ به‌صورت مقابل است:

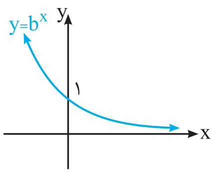


با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $[-\pi,۰]$ و $[\pi,۲\pi]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[۰,\pi]$، اکیداً نزولی است. تابع روی بازهٔ $[-\pi,۲\pi]$ غیریکنوا است.

۴۲ نمودار تابع نمایی $y=b^x$ به صورت زیر است:



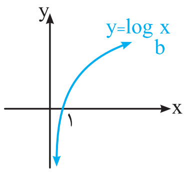
$(b>۱)$



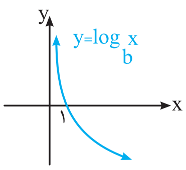
$(۰<b<۱)$

در حالت $b>۱$، تابع $y=b^x$ روی $\mathbb{R}$، اکیداً صعودی و در حالت $۰<b<۱$، تابع $y=b^x$، اکیداً نزولی است.

نمودار تابع لگاریتمی $y=\log_b x$ به صورت زیر است:



$(b>۱)$



$(۰<b<۱)$

۳

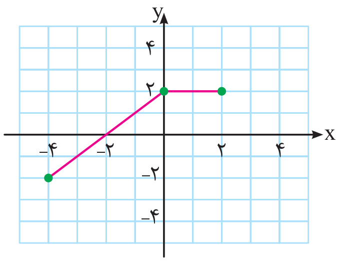
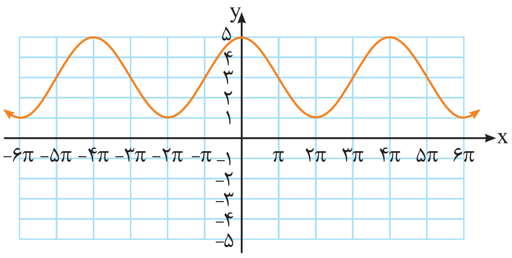
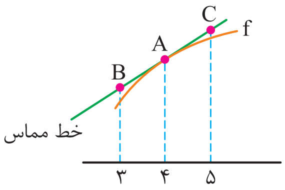
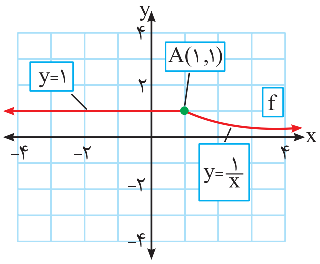
بخش سوم

امتحان نهایی

120 mins

آزمون ۱: خرداد ۱۴۰۰

آزمون نوبت دوم | ساعت شروع: ۸ صبح | 120 mins

ردیف	سؤالات امتحانی	نمره
۱	**درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.** آ) هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است. ب) هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر خواهد شد.	۰/۵
۲	**در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.** آ) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x^{3}-3x$ در آن اکیداً نزولی است، برابر .... است. ب) شعاع دایره‌ای به معادلهٔ $x^{2}+y^{2}-2x-3=0$ برابر .... است.	۰/۵
۳	با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$ ، نمودار تابع $y=f(-x)+2$ را رسم کنید.  	۰/۷۵
۴	اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^{2}-1$ باشد؛ آ) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) مقدار $(gof)(2)$ را تعیین کنید.	۱/۲۵
۵	نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $y=a\cos bx+c$ است. با توجه به نمودار، ضابطهٔ آن را مشخص کنید.  	۱
۶	معادلهٔ مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.	۱
۷	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. آ) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ ب) $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})}\frac{[x]}{\|3x+1\|}$ پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x^{2}}}{\frac{4}{x}-5}$	۲
۸	برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(4)=1/5$ و $f(4)=24$. با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.  	۱
۹	با محاسبهٔ مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطهٔ A ، نشان دهید که تابع f در نقطهٔ A مشتق‌پذیر نیست.  	۱

۱۰ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) — **۱/۵**

آ) $f(x) = \dfrac{۹x - ۲}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x) = (۳x^۲ - ۴)(۲x - ۵)^۳$

۱۱ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادلهٔ $h(t) = -۵t^۲ + ۴۰t$ به دست می‌آید؛ — **۱/۵**

آ) سرعت متوسط جسم را در بازهٔ $[۵,۸]$ به دست آورید.

ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم $۳۵\,m/s$ است.

۱۲ اگر نقطهٔ $(۲,۱)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید. — **۱/۵**

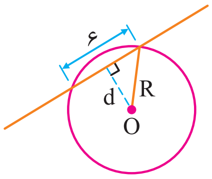
۱۳ در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، طول و عرض مستطیلی با بیش‌ترین مساحت را بیابید. — **۱/۵**

۱۴ کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱,۳)$ و $(۱,-۵)$ است. — **۱/۵**

آ) فاصلهٔ کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a = ۶$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک را پیدا کنید. (a اندازهٔ نصف قطر بزرگ بیضی است.)

۱۵ مرکز دایره‌ای، نقطهٔ $O(۲,-۳)$ است. این دایره روی خط $۳x - ۴y + ۲ = ۰$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ دایره را بنویسید. — **۱/۵**



۱۶ اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟ — **۲**

⭐ **موفق و مؤید باشید.** ⭐ — **۲۰**

آزمون ۲: شهریور ۱۴۰۰

آزمون نوبت دوم | ساعت شروع: ۸ صبح | 120 mins

ردیف | **سؤالات امتحانی** | نمره

۱ **درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.** — **۰/۷۵**

الف) دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است.

ب) دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^۳$ و $g(x) = \sqrt[۳]{x}$ وارون یکدیگرند.

پ) تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

۲ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ - ۲x + ۱$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحلهٔ آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید. — **۰/۷۵**

۳ با توجه به جدول مقابل، مقادیر خواسته‌شده را به دست آورید. — **۱/۵**

آ) $(gof)(۱)$

ب) $(fo(f+g))(۰)$

x	۱-	۰	۱	۲
f(x)	۰	۱-	۲	۵-
g(x)	۲	۳	۴	۲-

۴ معادلهٔ یک تابع سینوسی $y = a\sin(bx) + c$ را بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۵ و مقدار مینیمم آن ۱- و دورهٔ تناوب آن ۸π است. — **۱**

۵ مثلثی با مساحت $۸\sqrt{۲}$ سانتی‌مترمربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع این مثلث به ترتیب ۴ و ۸ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟ — **۱**

۶ حاصل عبارت $۴\sin x\cos x\cos ۲x$ را به ازای $x = ۷/۵^\circ$ محاسبه نمایید. — **۱**

فهرست

فصل ۱
تابع

بسته ۱
توابع چندجمله‌ای

تیپ ۱

تیپ ۱ جای خالی یا صحیح و غلط از تعریف توابع چندجمله‌ای (تابع درجهٔ سوم) و مفاهیم آن می‌دهند. پس به مفاهیم زیر توجه کنید:

تابع چندجمله‌ای درجهٔ n: هر تابع به‌صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ است، یک تابع چندجمله‌ای از **درجهٔ n** می‌نامیم. دامنهٔ این توابع، مجموعهٔ اعداد حقیقی است. (شهریور ۱۴۰۰)

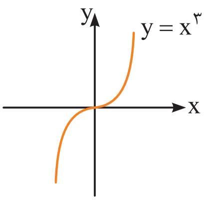
مثال تابع $y = \sqrt{3}x^2 - \pi x + 1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ است. (شهریور ۱۴۰۲)

مثال تابع $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ سوم است. زیرا اگر ضابطهٔ تابع را ساده کنیم به‌صورت $y = -6x^3 + 2x + 1$ درمی‌آید. (دی ۱۴۰۱)

نکته تابع ثابت و تابع خطی مثال‌هایی از تابع چندجمله‌ای و به ترتیب با درجه‌های ۰ و ۱ هستند.

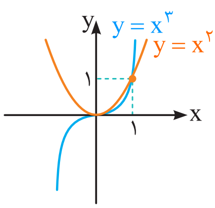
تابع درجهٔ سوم

تابع چندجمله‌ای $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \; (a \neq 0)$ یک تابع درجهٔ ۳ است که دامنه و برد آن $\mathbb{R}$ است و نمودار مهم‌ترین آن‌ها یعنی $y = x^3$ به‌صورت مقابل است:



نکته مقایسهٔ رفتار تابع $y = x^2$ و $y = x^3$:

با توجه به نمودار مقابل، در بازه‌های $x < 0$ و $0 < x < 1$ نمودار $y = x^2$ بالاتر از $y = x^3$ و در بازهٔ $x > 1$ نمودار $y = x^3$ بالاتر از $y = x^2$ قرار دارد.



ایستگاه مثـــال

آیا نمودار تابع $y = x^2$ در بازهٔ $(0, 1)$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^3$ است؟ (دی ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱)

پاسخ با توجه به نکتهٔ فوق جواب «خیر» است.

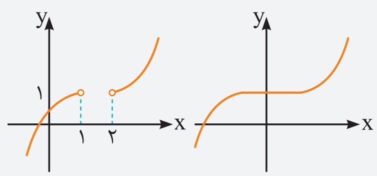
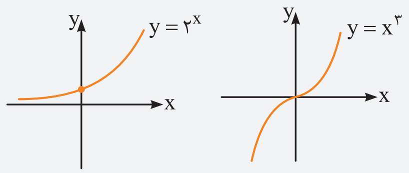
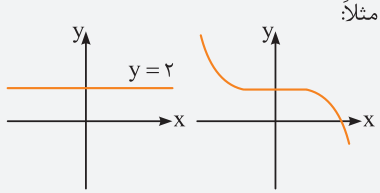
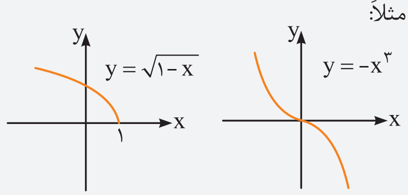
تیپ ۳

بسته ۲
توابع صعودی و توابع نزولی

تیپ ۱ جای خالی یا صحیح و غلط از مفاهیم صعودی و نزولی می‌دهند. پس جملات زیر را خوب به خاطر بسپارید.

تعریف

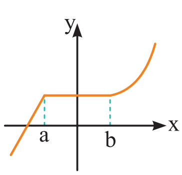
اگر $x_۲ > x_۱$ و داشته باشیم:

$f(x_۲) \ge f(x_۱)$، آن‌گاه f صعودی است.	$f(x_۲) > f(x_۱)$، آن‌گاه f اکیداً صعودی است.
مثلاً: 	مثلاً:  (خرداد ۱۴۰۱)
$f(x_۲) \le f(x_۱)$، آن‌گاه f نزولی است.	$f(x_۲) < f(x_۱)$، آن‌گاه f اکیداً نزولی است.
مثلاً:  هم صعودی هم نزولی	مثلاً: 

❶ به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.

❷ به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

❸ توابع اکیداً یکنوا، همواره یکنوا هستند. (دی ۹۹ خارج)



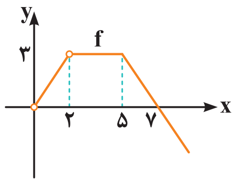
❹ توابع یکنوا، همواره اکیداً یکنوا نمی‌باشند! مثلاً نمودار روبه‌رو صعودی بوده لذا یکنوا است. اما چون در بازهٔ $[a,b]$، مقدار تابع ثابت است، پس این تابع اکیداً یکنوا نمی‌باشد. پس توابع یکنوا ممکن است اکیداً یکنوا باشند، شاید هم نباشند.

❺ توابع ثابت، $f(x) = a$ در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی هستند. چون a هر عدد حقیقی می‌تواند باشد، لذا بی‌شمار تابع ثابت و در نتیجه بی‌شمار تابع هم صعودی و هم نزولی داریم. (خرداد ۹۹ و ۱۴۰۲)

❻ هر تابع اکیداً یکنوا، یک به یک است. (شهریور ۹۹) ولی هر تابع یکنوا ممکن است یک به یک باشد، شاید هم یک به یک نباشد! پس جملهٔ «هر تابع یکنوا، یک به یک است» غلط است. (دی ۱۴۰۱)

تیپ ۲ **نمودار f را می‌دهند و از ما می‌خواهند صعودی یا نزولی بودن f را با توجه به نمودار آن بررسی کنیم.**

روش حل با توجه به نمودار، بزرگ‌ترین بازهٔ موردنظر را از جهت صعودی یا نزولی بودن می‌نویسیم.



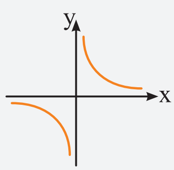
مثال در نمودار مقابل f در بازهٔ $(۰,۲)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[۵,+\infty)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[۲,۵]$ ثابت (هم صعودی و هم نزولی) است. (خرداد ۹۱)

تیپ ۳ **ضابطهٔ f را می‌دهند و از ما می‌خواهند صعودی یا نزولی بودن f را بررسی کنیم.**

روش حل با توجه به ضابطهٔ f، نمودار را رسم کرده و با توجه به نمودار، صعودی یا نزولی بودن f در بازه‌های مختلف را بررسی می‌کنیم.

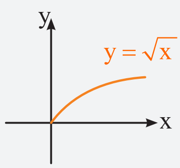
ایستگاه مثـــال

۱. آیا $y=\frac{۱}{x}$ در دامنه‌اش یکنوا است؟ (شهریور ۱۴۰۲)



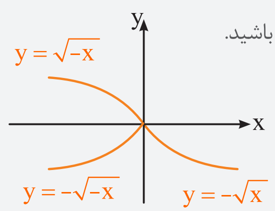
پاسخ خیر، نمودار $y=\frac{۱}{x}$ به‌صورت مقابل است. با این‌که تابع در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ نزولی و لذا در این بازه‌ها یکنوا است ولی در کل دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی بوده و یکنوا نمی‌باشد!

۲. آیا $y=\sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است؟ (شهریور ۱۴۰۰)

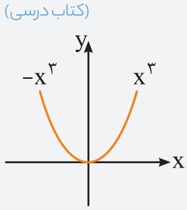


پاسخ خیر، با توجه به نمودار زیر، این تابع اکیداً صعودی است.

نمودارهای مهم زیر را به خاطر داشته باشید.



۳. تابع $y=x^۲|x|$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است. حداکثر a را بیابید. (کتاب درسی)



پاسخ با توجه به حضور قدرمطلق، تابع دوضابطه‌ای به‌صورت
$$y=\begin{cases}x^۲(x)=x^۳, & x\geq ۰\\ x^۲(-x)=-x^۳, & x<۰\end{cases}$$
می‌شود. آن را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل مشخص است که تابع در بازهٔ $(-\infty,a]$ که حداکثر a برابر ۰ است، نزولی می‌باشد.