فصل اول

آمار و احتمال ۱

سلام بر دوستان خوبم در رشتهٔ انسانی، قبل از این‌که شروع به خوندن این فصل بکنید، بهتره یه توضیحاتی رو بهتون بدم. اولین حرفم اینه که حتی اگه فکر می‌کنید درس‌ها رو خوب یاد گرفتین (در مدرسه یا آموزشگاه) بازم درسنامه‌های کتاب ما رو بخونید، چون امسال نگاه شما به دروس مختلف، بیش‌تر نگاه تستی هست و ممکنه بخواین همون روش‌های تستی رو که یاد گرفتین توی امتحانات تشریحی پیاده کنید و در نتیجه نمرهٔ کامل بهتون داده نمیشه. این فصل کتاب، به نظرم مفهومی‌ترین و دشوارترین فصل برای همهٔ دانش‌آموزانه، و بر عکس فصل‌های دیگه، تنوع سؤالاتش خیلی زیاده به همین دلیل ما هم همه جور سؤالی براتون طرح کردیم تا به راحتی از عهدهٔ امتحان نهایی بربیاین. سهم این فصل در امتحان خرداد ماه، ۵ نمره می‌باشد که ۲ سوال اول اون به شکل جای خالی یا بررسی درستی یا نادرستی است.

توجه کنید که اگه فاکتوریل، ترتیب و ترکیب رو خوب یاد نگیرین، قطعاً توی مبحث احتمال به مشکل برمیخورین، چون این‌ها مقدمهٔ احتمال هستن. در قسمت آخر این فصل هم، یه قسمت از آمار اومده که ربطی به قسمت‌های قبلی نداره و بیش‌تر روی شاخص‌های مرکزی و پراکندگی بحث کرده که قبلاً هم خوندین. فقط گام‌های چرخهٔ آمار به بحث جدیدی هست که خیلی هم راحته.

فیلم شب امتحان

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-codeهای مقابل را اسکن کنید.

بسته‌های ۱ و ۲ | بسته‌های ۳ و ۴ | بستهٔ ۵

بستهٔ اول

شمارش (اصل جمع و ضرب)

صفحه ۲ تا ۷ کتاب درسی

الف اصل جمع

- اگر فقط یک کار را بتوان به k یا m یا ⋯ یا n حالت مختلف انجام داد آن‌گاه تعداد کل حالت‌های انجام این کار برابر است با: $k+m+\cdots+n$
- دقت کنید که در این‌جا فقط می‌خواهیم یک عمل را به روش‌های مختلف انجام دهیم. ضمناً حرف «یا» در مسائل، نشان‌دهندهٔ اصل جمع است.

سؤال **علی می‌خواهد از تهران به مشهد سفر کند. او برای انجام این کار می‌تواند از یکی از ۳ نوع قطار لوکس، خوب و معمولی یا یکی از ۴ شرکت هواپیمایی یا یکی از ۸ تعاونی اتوبوس استفاده کند. در کل او به چند حالت می‌تواند این سفر را انجام دهد؟** مشابه کتاب درسی

پاسخ علی فقط می‌خواهد یک عمل را انجام دهد و آن سفر از تهران به مشهد است پس از اصل جمع استفاده می‌کنیم:

تعداد کل حالت‌ها $= 3+4+8 = 15$

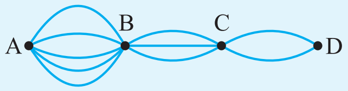
ب اصل ضرب

حالا می‌خواهیم دو یا چند عمل مختلف را با هم یا پشت سر هم انجام دهیم. در این حالت تعداد روش‌های هر عمل را در هم ضرب می‌کنیم. ضمناً حرف «و» نشان‌دهندهٔ اصل ضرب است. پس الان تفات بین اصل ضرب و اصل جمع را متوجه شدید.

مثال فرض کنید علی ۳ جفت کفش، ۴ پیراهن و ۶ شلوار مختلف دارد؛ می‌خواهیم ببینیم او به چند حالت می‌تواند برای رفتن به مهمانی آماده شود.

واضح است که چون او باید هر سه عمل پوشیدن کفش، پیراهن و شلوار را با هم انجام دهد لذا باید از اصل ضرب استفاده کنیم: $3\times4\times6 = 72$

سؤال **با توجه به شکل مقابل، مریم می‌خواهد از شهر A به شهر D سفر کند و برگردد. به طوری‌که در مسیر برگشت از راه‌هایی که رفته استفاده نکند. او به چند حالت می‌تواند این رفت و برگشت را انجام دهد؟** مشابه امتحان نهایی
(همهٔ جاده‌ها دو طرفه فرض می‌شوند.)



پاسخ

تعداد حالت‌های مسیر رفت $= ۵ \times ۳ \times ۲ = ۳۰$

تعداد حالت‌های مسیر برگشت $= ۱ \times ۲ \times ۴ = ۸$

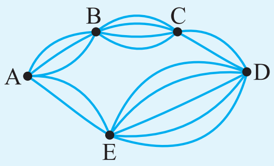
$\Rightarrow$ تعداد حالت‌های رفت و برگشت $= ۳۰ \times ۸ = ۲۴۰$

دقت کنید که در مسیر برگشت، از مسیرهایی که در مسیر رفت استفاده کرده‌ایم مجاز به استفادهٔ مجدد نیستیم یعنی از ۲ مسیر بین D و C یکی، از ۳ مسیر بین C و B یکی و از ۵ مسیر بین B و A هم یکی را حذف کرده‌ایم.

استفادهٔ هم‌زمان از اصل جمع و اصل ضرب

در بسیاری از سؤالات، باید از هر دو اصلی که خواندیم، استفاده کنیم. یکی از این سؤالات، مربوط به مسافرت از یک شهر به شهر دیگر است؛ سؤال دیگر مربوط به مسائل ترکیب است که جلوتر خواهید خواند. ضمناً دقت کنید در مسائل مربوط به شهرها اگر گفته نشد مسیرها یک طرفه هستند یا دوطرفه خودمان آن‌ها را دوطرفه فرض می‌کنیم. *(البته در سوالاتی که مسیر برگشت داریم این موضوع مهمّه)*

سؤال **با توجه به شکل مقابل، به چند طریق می‌توانیم از شهر A ، به شهر D سفر کنیم؟** مشابه کتاب درسی



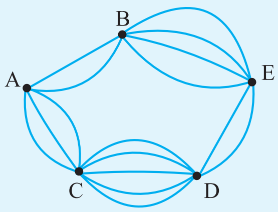
پاسخ برای رفتن از A به D دو حالت کلی وجود دارد. یکی مسیر بالا (مسیر ABCD) و دیگری مسیر پایین (مسیر AED): یعنی شخص می‌تواند یا از مسیر بالا استفاده کند یا از مسیر پایین و این حرف «یا» نشان می‌دهد که جواب‌های دو قسمت بالا و پایین را باید با هم جمع کنیم:

مسیر بالا: تعداد حالت‌ها $= \overset{AB}{۳} \times \overset{BC}{۴} \times \overset{CD}{۲} = ۲۴$

مسیر پایین: تعداد حالت‌ها $= \underset{AE}{۲} \times \underset{ED}{۵} = ۱۰$

$\xrightarrow{\text{اصل جمع}}$ تعداد کل حالت‌ها $= ۲۴ + ۱۰ = ۳۴$

سؤال **فردی می‌خواهد از شهر A به E برود و برگردد، به‌طوری که در مسیر برگشت از راهی که رفته مجدداً استفاده نکند به چند حالت می‌تواند این کار را انجام دهد؟**



پاسخ چهار حالت مختلف برای رفت و برگشت از A به E وجود دارد:

حالت ۱: مسیر ABEBA $\Rightarrow \overset{AB}{۲} \times \overset{BE}{۴} \times \overset{EB}{۳} \times \overset{BA}{۱} = ۲۴$

حالت ۲: مسیر ABEDCA $\Rightarrow \underset{AB}{۲} \times \underset{BE}{۴} \times \underset{ED}{۲} \times \underset{DC}{۵} \times \underset{CA}{۳} = ۲۴۰$

حالت ۳: مسیر ACDEBA $\Rightarrow \underset{AC}{۳} \times \underset{CD}{۵} \times \underset{DE}{۲} \times \underset{EB}{۴} \times \underset{BA}{۲} = ۲۴۰$

حالت ۴: مسیر ACDEDCA $\Rightarrow \underset{AC}{۳} \times \underset{CD}{۵} \times \underset{DE}{۲} \times \underset{ED}{۱} \times \underset{DC}{۴} \times \underset{CA}{۳} = ۳۶۰$

تعداد کل حالت‌ها $= ۲۴ + ۲۴۰ + ۲۴۰ + ۳۶۰ = ۸۶۴$

نکته در آزمون‌های چندگزینه‌ای، اگر پاسخ دادن به همهٔ سؤالات الزامی باشد، تعداد کل حالت‌های پاسخ‌گویی به آزمون، طبق اصل ضرب برابر می‌شود با:

$(\text{تعداد گزینه‌ها})^{\text{تعداد سؤالات}}$

ولی اگر پاسخ‌گویی به هر سؤال، الزامی نباشد تعداد کل حالت‌ها برابر می‌شود با:

$(\text{تعداد گزینه‌ها} + 1)^{\text{تعداد سؤالات}}$

سؤال به یک آزمون ۳ گزینه‌ای که شامل ۱۰ سؤال است به چند حالت مختلف می‌توان جواب داد؟ (پاسخ گویی به همهٔ سؤالات الزامی است.) کتاب درسی

پاسخ طبق نکتهٔ گفته‌شده، خواهیم داشت:

$\text{تعداد حالت‌ها} = ۳^{۱۰}$

اگر در متن سؤال، گفته شود پاسخ‌گویی به سؤالات الزامی نیست، جواب برابر با $۴^{۱۰}$ خواهد شد.

نماد فاکتوریل (!)

- اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه حاصل !n که آن را n فاکتوریل می‌خوانیم به‌صورت مقابل تعریف می‌شود: $n! = n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times۳\times۲\times۱$
- یعنی برای محاسبهٔ فاکتوریل یک عدد طبیعی، باید آن عدد را در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش ضرب کنیم. مثلاً:

$۲! = ۲\times۱ = ۲$

$۳! = ۳\times۲\times۱ = ۶$

$۴! = ۴\times۳\times۲\times۱ = ۲۴$

$۵! = ۵\times۴\times۳\times۲\times۱ = ۱۲۰$

توجه به یاد داشته باشید که $۰! = ۱$ و $۱! = ۱$ است.

تذکر گاهی لازم نیست فاکتوریل یک عدد را تا ۱ باز کنیم (مخصوصاً در کسرها)، در این مواقع بهتر است عدد بزرگ‌تر را تا آن‌جا باز کنیم که به عدد کوچک‌تر برسیم؛ توجه کنید که هر جا که متوقف می‌شویم باید علامت فاکتوریل بگذاریم.

مثال ۹ بزرگ‌تر از ۷ است پس !۹ را باز کردیم تا به !۷ رسیدیم. $\xrightarrow{\text{توضیح}}$ $\dfrac{۹!}{۷!} = \dfrac{۹\times۸\times\cancel{۷!}}{\cancel{۷!}} = ۷۲$

مثال n بزرگ‌تر از $(n-۲)$ است پس !n را باز کردیم تا به $(n-۲)!$ رسیدیم. $\xrightarrow{\text{توضیح}}$ $\dfrac{n!}{(n-۲)!} = \dfrac{n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}} = n(n-۱) = n^۲ - n$

سؤال حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید. مشابه امتحان نهایی

۱) $۵! - ۳!$　　۲) $\sqrt{۰! - ۱!} + ۲! + ۳!$　　۳) $\dfrac{۶!}{۳!\times۴!}$

پاسخ

۱) $۵! - ۳! = (۵\times۴\times۳\times۲\times۱) - (۳\times۲\times۱) = ۱۲۰ - ۶ = ۱۱۴$

۲) $\sqrt{۰! - ۱!} + ۲! + ۳! = \sqrt{۱-۱} + (۲\times۱) + (۳\times۲\times۱) = ۰ + ۲ + ۶ = ۸$

۳) $\dfrac{۶!}{۳!\times۴!} = \dfrac{۶\times۵\times\cancel{۴!}}{(۳\times۲\times۱)\times\cancel{۴!}} = ۵$

سؤال از معادلهٔ $(x^۲ - ۳x)! = ۲۴$ مقدار یا مقادیر x را به‌دست آورید.

پاسخ می‌دانیم حاصل !۴ برابر ۲۴ می‌شود، پس عبارت داخل پرانتز را مساوی با ۴ قرار می‌دهیم:

$$x^۲ - ۳x = ۴ \Rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \xrightarrow[\text{جملهٔ مشترک}]{\text{تجزیه با اتحاد}} (x-۴)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ x = -۱ \end{cases}$$

سؤال مقدار n را از معادلهٔ $\dfrac{n!}{(n-۲)!} = ۲۰$ به‌دست آورید.

پاسخ n از $(n-۲)$ بزرگ‌تر است، پس !n را باز می‌کنیم تا به $(n-۲)!$ برسیم:

$$\frac{n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}} = ۲۰ \Rightarrow n(n-۱) = ۲۰ \Rightarrow n^۲ - n - ۲۰ = ۰ \xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جملهٔ مشترک}} (n-۵)(n+۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = ۵ \ ✓ \\ n = -۴ \ ✗ \end{cases}$$

پ مفهوم جایگشت

• جایگشت یعنی نحوهٔ قرار گرفتن افراد یا اشیاء در کنار هم. مثلاً حروف a، b و c به شکل‌های زیر می‌توانند کنار هم قرار گیرند و کلمات ۳ حرفی بسازند:

(بامعنی یا بی‌معنی بودن کلمات، در این مبحث، اصلاً مهم نیست.) abc, acb, bac, bca, cab, cba

• به هرکدام از این ۶ کلمه که ساختیم یک جایگشت از حروف a، b و c می‌گوییم. ضمناً چون ۳ حرف a، b و c مختلف هستند تعداد جایگشت‌ها برابر می‌شود با: $۳! = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

! نکته تعداد جایگشت‌های n شیء یا n فرد متمایز برابر با $n!$ می‌باشد مثلاً تعداد جایگشت‌های مختلف که با حروف کلمهٔ «TASNIM» می‌توان ساخت برابر با $۶!$ یا همان ۷۲۰ می‌باشد. توجه کنید اگر مثلاً گفته شود با حروف کلمهٔ TASNIM چند کلمهٔ ۳ حرفی می‌توان ساخت، دیگر نمی‌توان گفت جواب $۳!$ است، بلکه باید از روش پُرکردن خانه‌ها استفاده کنیم که بعد از سؤال زیر، این روش را توضیح می‌دهیم.

سؤال **چهار نفردوست به چند حالت می‌توانند در یک صف قرار گیرند؟** مشابه امتحان نهایی

پاسخ طبق نکتهٔ گفته‌شده جواب برابر است با: $۴! = ۲۴$:تعداد حالت‌ها

ساختن اعداد و کلمات در حالت کلی

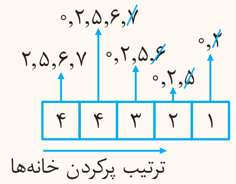
معمولاً بهتر است برای ساختن اعداد، کلمات و ... از روش پُرکردن خانه‌ها استفاده کنیم. در این مسائل اگر شرایط خاصی مثل زوج یا فرد بودن عدد مطرح باشد باید ابتدا اولین خانهٔ سمت راست را پُرکنیم سپس به سراغ پُرکردن اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم و خانه‌ها را از چپ به راست پر می‌کنیم. ضمناً توجه کنید اگر در متن سؤال ذکر شود تکرار ارقام یا حروف، مجاز نیست پس از پرکردن هر خانه، باید یک حرف یا رقم استفاده‌شده در خانهٔ قبلی را به دلخواه خط بزنیم. حالا دو تا سؤال حل می‌کنیم تا قضیه کاملاً برایتان جا بیفتد.

سؤال **با ارقام ۰، ۲، ۵، ۶ و ۷ بدون تکرار ارقام:** کتاب درسی ـ مشابه امتحان نهایی

۱ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت؟
۲ چند عدد پنج‌رقمی فرد می‌توان ساخت؟
۳ چند عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۵۰۰۰ می‌توان ساخت؟
۴ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت که با ۲ شروع و به ۶ ختم شود؟

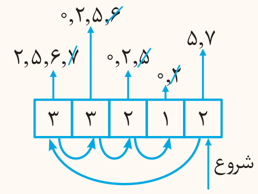
پاسخ **۱** شرط خاصی به‌جز تکراری نبودن ارقام ذکر نشده، پس خانه‌ها را از چپ به راست پُر می‌کنیم. فقط دقت کنید اولین خانهٔ سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد: *(توجه کنید که پس از پُر کردن هر خونه، باید به دلخواه یکی از ارقام استفاده شده در اون خونه رو خط بزنیم.)*

$\Rightarrow$ تعداد عددها $= ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۹۶$



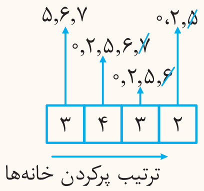
۲ عددی فرد است که یکانش فرد باشد. پس ابتدا اولین خانهٔ سمت راست را پر می‌کنیم سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم: *(ترتیب پُر کردن خونه‌ها رو با فلش‌هایی که زیر آن‌هاست، مشخص کرده‌ایم.)*

$\Rightarrow$ تعداد عددها $= ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۲ = ۳۶$



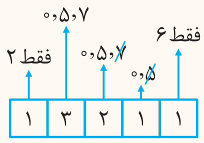
۳ برای آن‌که عدد چهاررقمی مورد نظر، بزرگ‌تر از ۵۰۰۰ باشد اولین رقم سمت چپ آن باید ۵ یا بیش‌تر باشد لذا پُر کردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم:

$\Rightarrow$ تعداد عددها $= ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷۲$



۴ ابتدا و انتهای اعداد خواسته‌شده، هرکدام فقط به ۱ حالت پُر می‌شوند: پس اول، این دو خانه را پُر می‌کنیم و بعد از آن، بقیهٔ خانه‌ها را از چپ به راست پُر می‌کنیم:

$\Rightarrow$ تعداد عددها $= ۱ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۶$



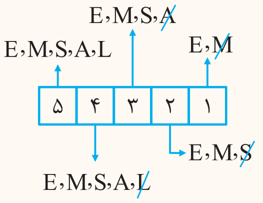
در تمام قسمت‌هایی که حل کردیم اگر گفته می‌شد تکرار ارقام مجاز است، دیگر هیچ رقمی را خط نمی‌زدیم.

کتاب درسی ـ مشابه امتحان نهایی

سؤال **با حروف کلمهٔ «EMSAL» و بدون تکرار حروف:**

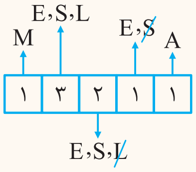
۱ **چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان ساخت؟** **۲** **چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت که با M شروع و به A ختم شود؟**

پاسخ **۱** کلمهٔ «EMSAL» پنج حرفی است، پس داریم:



$\Rightarrow$ تعداد کلمات $= ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

۲ تکلیف مکان‌های اول و آخر مشخص است، پس به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



$\Rightarrow$ تعداد کلمات $= ۱ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۶$

ساختن اعداد زوج یا مضرب ۵ وقتی رقم صفر هم وجود دارد

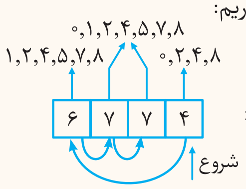
اگر صفر جزء ارقام داده شده باشد و بخواهیم عدد زوج یا مضرب ۵ بسازیم و ضمناً تکرار ارقام غیرمجاز باشد باید دو حالت جداگانه تشکیل دهیم. در یک حالت فرض می‌کنیم یکان صفر باشد و در حالت دیگر فرض می‌کنیم یکان صفر نباشد. سپس جواب‌های هر دو حالت را با هم جمع می‌کنیم. توجه کنید اگر گفته شود تکرار ارقام مجاز است نیازی نیست دو حالت جداگانه تشکیل دهیم و با یک حالت، مسئله حل می‌شود.

کتاب درسی ـ مشابه امتحان نهایی

سؤال **با ارقام ۰، ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ و ۸ چند عدد زوج چهاررقمی می‌توان ساخت به طوری‌که:**

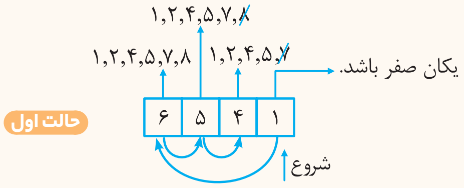
۱ **تکرار ارقام مجاز باشد.** **۲** **تکرار ارقام مجاز نباشد.**

پاسخ **۱** تکرار ارقام مجاز است، پس نیازی نیست دو حالت تشکیل دهیم؛ عددی زوج است که یکان آن زوج باشد پس داریم:

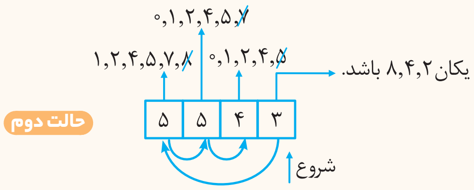


$\Rightarrow$ تعداد عددها $= ۶ \times ۷ \times ۷ \times ۴ = ۱۱۷۶$

۲ تکرار ارقام غیرمجاز است، پس دو حالت در نظر می‌گیریم و جواب‌ها را با هم جمع می‌کنیم:



$\Rightarrow$ تعداد عددها $= ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۱ = ۱۲۰$

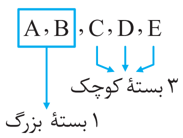


$\Rightarrow$ تعداد عددها $= ۵ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۳۰۰$

$\Rightarrow$ تعداد کل اعداد $= ۱۲۰ + ۳۰۰ = ۴۲۰$

کنار هم قرار داشتن اشیا یا افراد خاص

فرض کنید می‌خواهیم کتاب‌های A، B، C، D و E را در یک قفسه کنار هم قرار بدهیم، به شرطی که کتاب‌های A و B همیشه کنار هم باشند. پس این دو کتاب را داخل یک کادر قرار می‌دهیم و این کادر را یک بستهٔ بزرگ می‌نامیم:



اکنون می‌توان گفت ۴ بسته داریم (*۳ بستهٔ کوچک و ۱ بستهٔ بزرگ*) که به !۴ حالت می‌توانند با هم جابه‌جا شوند. از طرفی در داخل بستهٔ بزرگ، A و B خودشان هم می‌توانند با هم به !۲ حالت جابه‌جا شوند، لذا طبق اصل ضرب داریم:

تعداد کل حالت‌ها $= ۴! \times ۲! = ۲۴ \times ۲ = ۴۸$

سؤال ۳ دبیر ریاضی و ۵ دبیر عربی به چند حالت می‌توانند عکس یادگاری بگیرند، به طوری که دبیران ریاضی، همیشه کنار هم باشند؟ **کنکور سراسری**

پاسخ دبیران ریاضی را به دلخواه A ، B و C و دبیران عربی را D ، E ، F ، G و H می‌نامیم و دبیران ریاضی را داخل یک کادر قرار می‌دهیم:

$\boxed{A,B,C}, D, E, F, G, H \Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= 6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$

۵ بستهٔ کوچک

۱ بستهٔ بزرگ

سؤال با حروف کلمهٔ « EMSAL » و بدون تکرار حروف، چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت که:

❶ در همهٔ آن‌ها M و E کنار هم باشند؟ ❷ در همهٔ آن‌ها عبارت « EM » به همین شکل آمده باشد؟

پاسخ ❶ می‌خواهیم E و M در همهٔ کلمات ساخته‌شده، کنار هم باشند، پس آن‌ها را در یک کادر قرار می‌دهیم و یک بستهٔ بزرگ فرض می‌کنیم:

$\boxed{E,M}, S, A, L \Rightarrow$ تعداد کلمات $= 4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$

۳ بستهٔ کوچک

۱ بستهٔ بزرگ

❷ این دفعه باید عبارت « EM » دقیقاً به همین شکل بیاید، یعنی E و M نمی‌توانند با هم جابه‌جا شوند، پس دیگر نباید جواب $4!$ قسمت (۱) را در $2!$ ضرب کنیم: *(یعنی الان دیگه کاری به داخل بسته بزرگ نداریم.)*

$\boxed{EM}, S, A, L \Rightarrow$ تعداد کلمات $= 4! = 24$

۳ بستهٔ کوچک

۱ بستهٔ بزرگ

یک در میان قرار گرفتن اشیاء دو گروه

فرض کنید دو گروه آدم یا شیء داشته باشیم که تعداد هر دو گروه برابر با n باشد و بخواهیم آن‌ها را یک در میان در یک صف قرار دهیم. تعداد کل حالت‌ها برابر می‌شود با: $2 \times n! \times n!$ *(کاری به اثباتش نداشته باشین لطفاً)*

حالا فرض کنید گروه اول شامل n عضو و گروه دوم شامل m عضو باشند (m و n دو عدد طبیعی متوالی هستند)، در این صورت تعداد حالت‌هایی که اعضای دو گروه یک درمیان در یک صف قرار بگیرند برابر است با: $n! \times m!$

سؤال ۴ پسر و ۴ دختر به چند حالت می‌توانند یک در میان در یک صف قرار بگیرند؟

پاسخ تعداد اعضای دو گروه با هم یکسان است، لذا: تعداد حالت‌ها $= 2 \times 4! \times 4! = 2 \times 24 \times 24 = 1152$

سؤال ۳ کتاب ریاضی متمایز و ۴ کتاب عربی متمایز را به چند حالت، به شکل یک در میان می‌توان داخل قفسه چید؟

پاسخ تعداد اعضای دو گروه با هم یکسان نیست، پس داریم: تعداد حالت‌ها $= 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

بسته ۱ پرسش‌های تشریحی

شمارش (اصل جمع و ضرب)

● درستی یا نادرستی جملات یا عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

۱. ساده شدهٔ عبارت $6! \div 2!$ برابر $3!$ است. (خرداد ۹۹ خارج از کشور)

۲. با حروف کلمهٔ «MANZEL» و بدون تکرار، می‌توان به تعداد ۱۴۴ کلمهٔ ۶ حرفی نوشت که در همهٔ آن‌ها E, L, Z کنار هم باشند.

۳. حاصل $\frac{8!}{4!}$ برابر $2!$ است. (خرداد ۱۴۰۱)

● جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.

۴. تعداد جایگشت‌های nتایی از n شیء متمایز برابر .... است. (خرداد ۱۴۰۰، دی ۹۹، شهریور ۹۸)

۵. برای عدد صفر، فاکتوریل را به‌صورت .... $= 0!$ تعریف می‌کنیم. (خرداد ۱۴۰۰)

۶. اگر عملی طی دو مرحلهٔ اول و دوم انجام شود، به‌طوری که در مرحلهٔ اول به m طریق و در مرحلهٔ دوم هرکدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، درکل آن عمل به .... طریق انجام‌پذیر است. (خرداد ۱۴۰۰)

۷ . مقدار $\frac{0!}{1!}$ برابر .... است. (شهریور ۱۴۰۰)

۸ . هر حالت از کنار هم قرارگرفتن ۵ شیء متمایز را یک .... از آن ۵ شیء می‌نامیم. (شهریور ۱۴۰۰)

۹ . هر حالت از کنار هم قرارگرفتن n شیء متمایز را یک .... n تایی از آن n شیء می‌نامیم. (دی ۹۹ خارج از کشور)

۱۰ . هر حالت از کنار هم قرارگرفتن ۷ شیء متمایز را یک جایگشت .... از آن ۷ شیء می‌نامیم. (دی ۱۴۰۰)

۱۱ . حاصل $\frac{5!}{3!}$ برابر .... است. (شهریور ۱۴۰۱ – مشابه شهریور ۱۴۰۲)

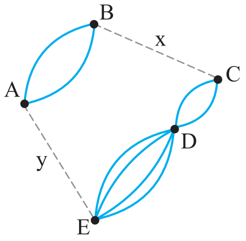
۱۲ . تعداد جایگشت‌های مختلف ۴ کتاب متمایز .... می‌باشد. (دی ۱۴۰۱)

● گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید.

۱۳ . در یک کارخانه، نوعی خودرو در ۵ رنگ سفید، سیاه، زرد، نوک‌مدادی، آبی و ۳ مدل مختلف، ۴ حجم موتور متفاوت و ۲ نوع دندهٔ دستی و اتومات تولید می شود. در این کارخانه چند نوع خودرو اتومات تولید می‌شود؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۰

۱۴ . مطابق شکل، فردی می‌خواهد از شهر A به D سفر کند. اگر تعداد کل حالت‌های ممکن برابر ۲۰ باشد، تعداد مسیرها از B به C و از A به E کدام است؟



۱) $x=3$, $y=3$
۲) $x=3$, $y=2$
۳) $x=4$, $y=2$
۴) $x=4$, $y=3$

۱۵ . حاصل عبارت $A=\frac{9!+10!}{9!}$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

۱۶ . با ارقام ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲ چند عدد ۳ رقمی مضرب ۵ و بزرگ‌تر از ۶۰۰ می‌توان ساخت؟ (تکرار ارقام، غیرمجاز است.)

۱) ۱۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

۱۷ . ۷ نفر اعضای یک خانواده می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند. اگر بخواهیم بین پدر و مادر، دقیقاً یک فرزند خاص قرار بگیرد، به این روش چند عکس یادگاری می‌توان گرفت؟

۱) ۲۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۲۸۰ ۴) ۳۰۰

۱۸ . به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۷ عددی چهار رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.) (مشابه شهریور ۱۴۰۰، شهریور ۹۸)

۱۹ . با ارقام ۱، ۲، ۴، ۷ و ۹ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (دی ۹۹، مشابه خرداد ۹۹)

● ارقام ۱ تا ۹ (بدون تکرار ارقام) مفروض‌اند؛ با توجه به آن به سؤالات زیر پاسخ دهید. (دی ۹۷)

۲۰ . چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟

۲۱ . چند عدد ۴ رقمی زوج می‌توان نوشت؟

● حروف کلمهٔ «خورشید» را بدون تکرار حروف (با معنی یا بی‌معنی)، در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. (شهریور ۹۹، مشابه شهریور ۱۴۰۲)

۲۲ . چند کلمهٔ ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «د» ختم شوند؟

۲۳ . چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت که با «ی» شروع و به «خ» ختم شوند؟

● حروف کلمهٔ «مهرسان» را بدون تکرار حروف (با معنی یا بی‌معنی)، در نظر بگیرید و به دو سؤال زیر پاسخ دهید.

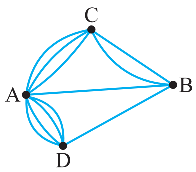
۲۴ . چند کلمهٔ ۳ حرفی می‌توان نوشت؟ (دی ۱۴۰۰)

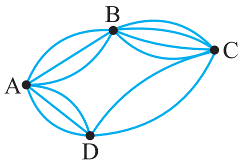
۲۵ . چند کلمهٔ ۳ حرفی می‌توان نوشت که با «م» شروع شوند؟

۲۶ . می‌خواهیم از بین ۲ سیب، ۳ کیوی و ۴ نارنگی یک میوه انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این میوه را انتخاب کنیم؟ (دی ۱۴۰۰)

۲۷ . می‌خواهیم از بین ۱۰ خودروی سواری، ۱۲ خودروی وانت و ۶ خودروی کامیون، یک خودرو انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این خودرو را انتخاب کنیم؟ (شهریور ۹۹)

۲۸ . بین چهار شهر A، B، C و D مطابق شکل راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر C و بدون عبور از شهر B به شهر D مسافرت کرد؟ (مشابه شهریور ۱۴۰۲، خرداد ۱۴۰۰)





۲۹. مطابق شکل زیر، بین شهرهای A، B، C و D راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟ (خرداد ۹۹)

● **اگر برای مسافرت به یکی از شهرهای مشهد، شیراز یا اهواز بتوان از وسیلهٔ نقلیهٔ سواری، اتوبوس یا هواپیما استفاده کرد، آن‌گاه به سؤالات زیر پاسخ دهید.** (کتاب درسی)

۳۰. تعداد راه‌های ممکن را برای انتخاب شهر و وسیلهٔ نقلیه پیدا کنید.

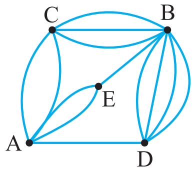
۳۱. نمودار درختی مربوط به انتخاب‌ها را رسم کنید.

● **فرض کنید از تهران به کرج ۳ راه، از کرج به زنجان ۴ راه و از زنجان به تبریز ۲ راه وجود داشته باشد، حال به سؤالات زیر پاسخ دهید.** (کتاب درسی)

۳۲. به چند طریق می‌توان از تهران و با عبور از کرج و زنجان، به تبریز رفت و برگشت؟

۳۳. به چند طریق می‌توان از تهران به تبریز رفت و برگشت به شرط آن‌که در هیچ‌کدام از مسیرها، راه‌های رفت و برگشت یکی نباشند؟

● **با توجه به نمودار، به سه سؤال زیر پاسخ دهید.** (کتاب درسی)



۳۴. به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر B برویم؟

۳۵. به چند طریق می‌توانیم با گذشتن از شهر C از A به B برویم؟

۳۶. به چند طریق می‌توانیم بدون گذشتن از شهر C از A به B برویم؟

۳۷. فردی می‌خواهد بداند به چند طریق با دو پیراهن به رنگ‌های «آبی - قرمز» و با سه شلوار به رنگ‌های «قهوه‌ای - مشکی - سرمه‌ای» می‌تواند لباس بپوشد. نمودار درختی حالت‌های مختلف انتخاب او را رسم کنید. (کتاب درسی)

۳۸. شخصی ۴ پیراهن، ۳ شلوار و ۲ جفت کفش دارد. به چند شکل متفاوت می‌تواند هر سهٔ آن‌ها را با هم بپوشد؟ (خرداد ۸۹)

۳۹. به چند طریق می‌توان به ۲ سؤال ۳ گزینه‌ای پاسخ داد به طوری که هیچ سؤالی بی‌پاسخ نماند؟ (خرداد ۹۳)

۴۰. به چند طریق می‌توان به یک آزمون دوگزینه‌ای که شامل ۲۰ سؤال است پاسخ داد به طوری‌که: (کتاب درسی)

آ) پاسخ دادن به همهٔ سؤالات الزامی باشد. ب) پاسخ دادن به همهٔ سؤالات الزامی نباشد.

۴۱. روی یک میز غذا ۲ نوع سوپ، ۴ نوع پلو و ۳ نوع سالاد وجود دارد. به چند روش می‌توان یک وعدهٔ غذایی که شامل یک نوع سوپ، یک نوع پلو و یک نوع سالاد باشد، انتخاب کنیم؟ (خرداد ۹۲)

● **حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.** (مشابه امتحان نهایی)

۴۲. $۵! - ۴!$

۴۳. $\dfrac{۱۲!}{۱۰!}$

۴۴. $\dfrac{۷!}{۳! \times ۵!}$

۴۵. $\dfrac{۳! + ۵!}{۶!}$

۴۶. $\dfrac{۸ \times ۷ \times ۶!}{۲! \times ۷!}$ (خرداد ۹۰، مشابه خرداد ۸۹)

۴۷. $۰! + ۱! + ۲! + ۳!$

۴۸. $۴! + ۲!$

۴۹. $\dfrac{۱۰!}{۶! \times ۷!}$

۵۰. درستی یا نادرستی تساوی $۸! = ۴! + ۳! + ۱!$ را بررسی کنید. (خرداد ۹۲)

۵۱. اگر $\dfrac{۱}{۶} = \dfrac{(n-۱)!}{(n+۱)!}$ باشد، مقدار n را به‌دست آورید. (کنکور سراسری، مخصوص علاقمندان)

۵۲. با اعداد ۱، ۴، ۹ و ۲ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت، به طوری‌که: (خرداد ۸۹)

آ) تکرار ارقام مجاز باشد. ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.

۵۳. به چند طریق مختلف ۸ نفر می‌توانند برای تهیهٔ بلیط سینما در یک صف بایستند؟ (کتاب درسی)

۵۴. تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «کتاب» را بنویسید. (خرداد ۸۹)

۵۵. به چند طریق می‌توان کتاب‌های ریاضی، عربی، جغرافیا و تاریخ را کنار هم قرار داد؟ (خرداد ۹۰)

۵۶. با حروف الفبای فارسی چند کلمهٔ سه‌حرفی بدون توجه به معنا می‌توان نوشت به طوری‌که: (کتاب درسی)

آ) تکرار حروف مجاز باشد. ب) تکرار حروف غیرمجاز باشد.

۵۷ . با حروف کلمهٔ «سعادت» به چند راه مختلف می‌توان کلمات سه حرفی نوشت به طوری‌که: (مشابه امتحان نهایی)

آ) تکرار حروف مجاز باشد. ب) تکرار حروف غیرمجاز باشد.

۵۸ . با حروف کلمهٔ «تهران» چند کلمهٔ سه‌حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان ساخت که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟ (مشابه امتحان نهایی)

● **حروف کلمهٔ «مهستان» را بدون تکرار حروف، در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.** (مشابه امتحان نهایی)

۵۹ . چند کلمهٔ چهارحرفی می‌توان نوشت؟

۶۰ . چند کلمهٔ سه‌حرفی می‌توان نوشت که با حرف «س» شروع و به «ن» ختم شود؟

● **حروف کلمهٔ « TRIANGLE » را بدون تکرار حروف، در نظر بگیرید و به سه سؤال زیر پاسخ دهید.** (کتاب درسی)

۶۱ . چند کلمهٔ پنج‌حرفی می‌توان نوشت؟

۶۲ . چند کلمهٔ چهارحرفی می‌توان نوشت که با «T» شروع شود؟

۶۳ . چند کلمهٔ چهارحرفی می‌توان نوشت که با «T» شروع و به «E» ختم شود؟

۶۴ . با ارقام ۰، ۱، ۵، ۹ و ۴ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان نوشت به طوری‌که: (مشابه امتحان نهایی)

آ) تکرار مجاز باشد. ب) تکرار غیرمجاز باشد.

● **ارقام ۲، ۳، ۴، ۶ و ۸ (بدون تکرار ارقام) را در نظر بگیرید و به چهار سؤال زیر پاسخ دهید.** (مشابه امتحان نهایی)

۶۵ . چند عدد پنج‌رقمی می‌توان نوشت؟

۶۶ . چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟

۶۷ . چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت که با ۲ شروع شود؟

۶۸ . چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که با ۳ شروع و به ۸ ختم شود؟

۶۹ . دو رقم اول سمت چپ یک عدد پنج‌رقمی، مشخص است. چند راه ممکن برای ساختن آن عدد پنج‌رقمی وجود دارد؟ (ارقام می‌توانند تکراری باشند.) (تألیفی)

۷۰ . با ارقام ۳، ۷، ۵، ۶ و ۸ به چند طریق می‌توان یک عدد سه‌رقمی بدون تکرار ساخت، به طوری‌که: (شهریور۹۰)

آ) آن عدد زوج باشد. ب) رقم یکان آن عدد اول باشد.

● **ارقام ۱، ۲، ۴، ۶ و ۷ (با تکرار ارقام) را در نظر بگیرید و به سه سؤال زیر پاسخ دهید.** (مشابه امتحان نهایی، خرداد ۱۴۰۲)

۷۱ . چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟

۷۲ . چند عدد چهاررقمی زوج می‌توان نوشت؟

۷۳ . چند عدد دورقمی فرد می‌توان نوشت؟

۷۴ . با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (کتاب درسی)

۷۵ . با ارقام ۰، ۲، ۳، ۴ و ۷ چند عدد چهاررقمی بزرگ‌تر یا مساوی ۲۰۰۰ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز است.) (کتاب درسی)

۷۶ . با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت به طوری‌که: (کتاب درسی)

آ) عدد، مضرب ۵ بوده و تکرار مجاز باشد. ب) عدد، زوج باشد و تکرار مجاز باشد.

۷۷ . با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که: (کتاب درسی)

آ) عدد، مضرب ۵ باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد. ب) عدد، زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد.

● **ارقام ۵، ۹، ۶، ۸ و ۷ را در نظر بگیرید و به دو سؤال زیر پاسخ دهید.** (خرداد ۹۰)

۷۸ . چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت؟

۷۹ . چند عدد چهاررقمی زوج بدون تکرار می‌توان نوشت؟

۸۰ . با ارقام ۵، ۳، ۸، ۲ و ۷ به چند طریق می‌توان یک عدد سه‌رقمی ساخت به طوری‌که: (شهریور۸۹)

آ) آن عدد، زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد. ب) رقم یکان آن ۷ باشد و تکرار ارقام مجاز باشد.

۸۱ . چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که رقم دهگان آن‌ها، عددی اول باشد؟ (کتاب درسی)

۸۲ . پلاک اتومبیل سواری سری «ب» در تهران به‌صورت

تهران
*** ب **

می‌باشد که هر ستاره نمایشگر یک عدد غیرصفر است. در سری «ب» و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟ (کنکور سراسری)

۸۳ . یک اداره برای شمارهٔ کارت پرسنلی کارمندان خود از یک کد سه‌رقمی و ۲ حرف فارسی به شکل زیر استفاده می‌کند، با این شرط که اولین رقم سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد. تعداد راه‌های ممکن برای شمارهٔ کارت‌های مختلف پرسنلی را پیدا کنید به شرطی که: (برگرفته از کتاب درسی)

عدد حرف حرف عدد عدد

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

آ تکرار حروف و ارقام مجاز باشد.

ب تکرار حروف و ارقام مجاز نباشد.

● **مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری دربارهٔ توسعهٔ شرکت، ۲۰ نفر از سهامداران را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۱۲ نفر آن‌ها در گروه A و بقیه در گروه B قرار می‌گیرند حال به سؤالات زیر پاسخ دهید.** (کتاب درسی)

۸۴ . مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۲۰ نفر مشورت بگیرد؟

۸۵ . اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشاوره بگیرد به شرط آن‌که از هر گروه با ۱ نفر مشورت کند، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

● **کدام‌یک از تساوی‌های زیر درست و کدام نادرست است؟** (خرداد ۹۶)

۸۶ . $(۳!)^۲ = ۹!$ **۸۷ .** $۳! \times ۴ = ۴!$ **۸۸ .** $\frac{۸!}{۴!} = ۲!$ **۸۹ .** $۱۰! = ۱۰ \times ۹!$

● **با درنظرگرفتن ارقام ۹ ، ۲ ، ۷ ، ۵ ، ۳ و ۸، به دو سؤال زیر پاسخ دهید.** (خرداد ۹۴)

۹۰ . چند عدد سه‌رقمی با تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۹۱ . چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت که یکان آن ۲ باشد؟

۹۲ . با ارقام ۱ ، ۲ ، ۵ ، ۶ و ۸ و بدون تکرار ارقام، چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که رقم صدگان آن ۶ باشد؟ (خرداد ۹۵)

۹۳ . با حروف کلمهٔ «روستا» و بدون تکرار، چند کلمهٔ سه‌حرفی می‌توان نوشت؟ (بامعنی یا بی‌معنی) (خرداد ۹۱)

۹۴ . به چند راه مختلف، ۶ نفر دوست می‌توانند در یک ردیف کنار هم عکس بگیرند؟ (خرداد ۹۱)

۹۵ . با ارقام ۶,۵,۴,۳,۲,۱,۰ و بدون تکرار ارقام، چند عدد ۳ رقمی زوج می‌توان نوشت؟ (دی ۱۴۰۱)

۹۶ . علی ۳ کتاب علمی و ۴ کتاب داستانی دارد. او می‌خواهد از بین کتاب‌هایش یک کتاب علمی و یک کتاب داستانی به دوستش هدیه دهد. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟ (شهریور ۱۴۰۱)

۹۷ . با ارقام ۱ تا ۹ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

بسته دوم
شمارش (تبدیل و ترکیب)
صفحه ۷ تا ۱۱ کتاب درسی

الف مسائل تبدیل

● اگر n شیء متمایز داشته باشیم و بخواهیم r شیء از آن‌ها را طوری انتخاب کنیم که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها در کنار هم مهم باشد، (*مثل شرکت در مسابقه، یا گرفتن پُست و مقام*) در این‌صورت تعداد حالت‌های انتخابی را با $P(n,r)$ نشان داده و آن را تبدیل r شیء از n شیء می‌خوانیم که به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

● البته همواره به جای استفاده از فرمول بالا، می‌توانیم از روش پُر کردن خانه‌ها استفاده کنیم. مگر این‌که در متن سؤال، خود $P(n,r)$ را مشاهده کنیم.

سؤال **از بین ۸ نفر شرکت‌کننده در یک مسابقهٔ تلویزیونی، به چند حالت می‌توان به ۳ نفر اول جایزه داد؟** کتاب درسی

پاسخ **روش اول** ترتیب جایزه دادن به ۳ نفر اول مهم است؛ پس از فرمول $P(n,r)$ استفاده می‌کنیم:

$$P(۸,۳) = \frac{۸!}{(۸-۳)!} = \frac{۸!}{۵!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times \cancel{۵!}}{\cancel{۵!}} = ۳۳۶$$

روش دوم از روش پُر کردن خانه‌ها استفاده می‌کنیم:

نفر اول نفر دوم نفر سوم

۸	۷	۶

$\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= ۸ \times ۷ \times ۶ = ۳۳۶$

سؤال در معادلهٔ زیر، مقدار n را به‌دست آورید. **کتاب درسی**

$$P(n,۳)=۴P(n,۲)$$

پاسخ به کمک فرمول، حاصل $P(n,۳)$ و $P(n,۲)$ را باز می‌کنیم:

$$\frac{n!}{(n-۳)!}=۴\times\frac{n!}{(n-۲)!}\xrightarrow{\text{n! ها را از دو طرف ساده می‌کنیم.}}\frac{۱}{(n-۳)!}=۴\times\frac{۱}{(n-۲)!}$$

$$\xrightarrow{\text{(n-۲)! را یک مرحله باز می‌کنیم.}}\frac{۱}{(n-۳)!}=\frac{۴}{(n-۲)(n-۳)!}\xrightarrow{\text{(n-۳)! ها را ساده می‌کنیم.}}۱=\frac{۴}{n-۲}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}n-۲=۴\Rightarrow n=۶$$

ب مسائل ترکیب

اگر n شیء متمایز داشته باشیم و بخواهیم r شیء را از بین آن‌ها انتخاب کنیم به شرطی که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها کنار هم مهم نباشد در این‌صورت تعداد حالت‌های انتخابی را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش داده و آن را ترکیب r شیء از n شیء می‌خوانیم که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

تذکر معمولاً از کلماتی مثل «دسته»، «گروه» و «تیم» متوجه می‌شویم که باید از ترکیب استفاده کنیم.

سؤال به چند حالت می‌توانیم ۵ کتاب را از بین ۹ کتاب برای هدیه دادن انتخاب کنیم؟ **کتاب درسی**

پاسخ در این‌جا پس از انتخاب ۵ کتاب، دیگر جابه‌جایی آن‌ها با هم مهم نیست؛ لذا از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\binom{۹}{۵}=\frac{۹!}{(۹-۵)!\times۵!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times\cancel{۵!}}{(۴\times۳\times۲\times۱)\times\cancel{۵!}}=۱۲۶$$

سؤال در یک کیسه، ۳ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ قرمز وجود دارد. با چشم بسته ۳ مهره خارج می‌کنیم؛ تعداد حالت‌های هر یک از قسمت‌های زیر را به‌دست آورید. **مشابه امتحان نهایی**

۱ هر ۳ مهره، آبی باشند.

۲ هر ۳ مهره، قرمز باشند.

۳ هر ۳ مهره، هم‌رنگ باشند.

۴ حداقل ۲ مهره، آبی باشند.

پاسخ ۱ ۳ مهرهٔ آبی باید از بین ۳ مهرهٔ آبی موجود در کیسه، انتخاب شوند، لذا داریم:

$$\text{تعداد حالت‌ها}=\binom{۳}{۳}=\frac{۳!}{(۳-۳)!\times۳!}=\frac{\cancel{۳!}}{۰!\times\cancel{۳!}}=\frac{۱}{۱}=۱$$

۲ ۳ مهرهٔ قرمز باید از بین ۴ مهرهٔ قرمز انتخاب شوند، لذا داریم:

$$\text{تعداد حالت‌ها}=\binom{۴}{۳}=\frac{۴!}{(۴-۳)!\times۳!}=\frac{۴!}{۱!\times۳!}=\frac{۴\times\cancel{۳!}}{۱\times\cancel{۳!}}=۴$$

۳ ۳ مهره باید همرنگ باشند، یعنی هر ۳ مهرهٔ آبی یا هر ۳ مهرهٔ قرمز باشند. این حرف «یا» یعنی این‌که باید از اصل جمع استفاده کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌ها}=\overset{\text{آبی}}{\binom{۳}{۳}}+\overset{\text{قرمز}}{\binom{۴}{۳}}=۱+۴=۵$$

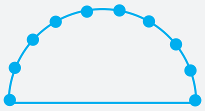
۴ حداقل ۲ مهره باید آبی باشند؛ یعنی ۲ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ قرمز داشته باشیم یا این‌که هر سه مهره آبی باشند. لذا هم از اصل ضرب و هم از اصل جمع استفاده می‌کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌ها}=\binom{۳}{۲}\times\binom{۴}{۱}+\binom{۳}{۳}=۳\times۴+۱=۱۳$$

نکته ۱ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$، چون در مجموعه‌ها جابه‌جایی اعضا با هم مهم نیست مثلاً تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e\}$ برابر است با: $\binom{۵}{۳}=۱۰$.

۲ برای یافتن تعداد پاره‌خط‌ها، تعداد مثلث‌ها، تعداد چهارضلعی‌ها و ... از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. مثلاً با ۱۰ نقطه روی نیم‌دایرهٔ مقابل می‌توانیم به تعداد $\binom{۱۰}{۳}$ مثلث بسازیم:

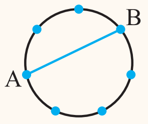
$$\text{تعداد مثلث‌ها}=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۷!\times۳!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times\cancel{۷!}}{\cancel{۷!}\times۳\times۲\times۱}=۱۲۰$$



سؤال با ۷ نقطه روی محیط یک دایره: مشابه امتحان نهایی

❶ چند وتر می‌توان ساخت؟ ❷ چند مثلث می‌توان ساخت؟

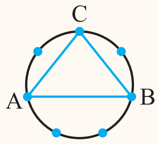
پاسخ ❶ وتر AB با وتر BA در شکل زیر، هیچ فرقی ندارد.



پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. وتر دارای دو رأس ابتدایی و انتهایی است بنابراین:

$$\text{تعداد وترها} = \binom{۷}{۲} = \frac{۷!}{(۷-۲)!\times ۲!} = \frac{۷\times ۶\times \cancel{۵!}}{\cancel{۵!}\times ۲\times ۱} = ۲۱$$

❷ مثلث ABC با مثلث BAC یا CAB هیچ فرقی ندارد.



پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. ضمناً هر مثلث دارای ۳ رأس است؛ لذا:

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{(۷-۳)!\times ۳!} = \frac{۷\times ۶\times ۵\times \cancel{۴!}}{\cancel{۴!}\times (۳\times ۲\times ۱)} = ۳۵$$

سؤال تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ را به‌دست آورید. کتاب درسی

پاسخ

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{۷}{۴} = \frac{۷!}{(۷-۴)!\times ۴!} = \frac{۷\times ۶\times ۵\times ۴!}{(۳\times ۲\times ۱)\times ۴!} = ۳۵$$

انتخاب اجباری

• فرض کنید بخواهیم از بین n شیء متمایز r شیء را انتخاب کنیم به طوری‌که k شیء بخصوص، حتماً انتخاب شوند. در این‌صورت تعداد حالت‌های انجام این کار برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ می‌باشد زیرا k شیء قبلاً انتخاب شده‌اند پس باید k را هم از r و هم از n کم کنیم. مثلاً فرض کنید از بین ۱۰ نفر می‌خواهیم یک گروه ۴ نفره تشکیل دهیم، به طوری‌که یک فرد به‌خصوص حتماً در گروه باشد، در این صورت تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{n-k}{r-k} = \binom{۱۰-۱}{۴-۱} = \binom{۹}{۳}$$

• اگر بخواهیم k شیء بخصوص انتخاب نشوند، از فرمول $\binom{n-k}{r}$ استفاده می‌کنیم. در مثال قبل، فرض کنید بخواهیم یک فرد به‌خصوص اصلاً انتخاب نشود، تعداد حالت‌ها برابر می‌شود با:

$$\binom{n-k}{r} = \binom{۱۰-۱}{۴} = \binom{۹}{۴}$$

سؤال از بین ۵ نفر می‌خواهیم یک گروه ۳ نفره تشکیل دهیم به طوری که یک فرد به خصوص، حتماً در گروه باشد. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

پاسخ یک انتخاب اجباری داریم؛ لذا $k=۲$، از طرفی $n=۵$ و $r=۳$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{تعداد حالت‌های انتخاب} = \binom{n-k}{r-k} = \binom{۵-۱}{۳-۱} = \binom{۴}{۲} = ۶$$

سؤال تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e,f\}$ به طوری‌که همهٔ آن‌ها شامل e و f باشند را به‌دست آورید.

پاسخ دو انتخاب اجباری داریم لذا $k=۲$، از طرفی $n=۶$ و $r=۴$ می‌باشد پس خواهیم داشت:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{n-k}{r-k} = \binom{۶-۲}{۴-۲} = \binom{۴}{۲} = \frac{۴!}{۲!\times ۲!} = \frac{۴\times ۳\times \cancel{۲!}}{(۲\times ۱)\times \cancel{۲!}} = ۶$$

سؤال تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ که فاقد عضوهای ۱ و ۲ باشند را به‌دست آورید.

پاسخ در این‌جا $k=۲$ است (چون دو عضو هستند که می‌خواهیم انتخاب نشوند) لذا داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{n-k}{r} = \binom{۷-۲}{۳} = \binom{۵}{۳} = ۱۰$$

بسته ۲ پرسش‌های تشریحی

شمارش (تبدیل و ترکیب)

● درستی یا نادرستی جملات یا عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

۹۸ . تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعهٔ ۵ عضوی برابر ۱۵ است. (خرداد ۱۴۰۲)

۹۹ . حاصل $P(n,1)$ همواره برابر با n است.

۱۰۰ . حاصل $P(n,n)$ همواره برابر با ۱ است.

۱۰۱ . حاصل $P(n,0)$ همواره برابر با n است.

۱۰۲ . حاصل $\binom{n}{1}$ همواره برابر با n است.

۱۰۳ . حاصل $\binom{n}{n}$ همواره برابر با ۱ است.

۱۰۴ . حاصل $\binom{n}{0}$ همواره برابر با n است.

۱۰۵ . حاصل $\binom{n}{n-1}$ همواره برابر با $(n-1)$ است.

● جاهای خالی را با عبارات مناسب پُرکنید. (مشابه خرداد ۱۴۰۰)

۱۰۶ . حاصل $C(5,5)$ برابر .... می‌باشد.

۱۰۷ . به .... طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۵ کتاب انتخاب و در یک قفسه بچینیم. (خرداد ۹۹ خارج ازکشور)

۱۰۸ . حاصل $\binom{9}{6}$ برابر .... می‌باشد. (شهریور۹۸)

۱۰۹ . در .... انتخاب r شیء از بین n شیء، جابه‌جایی اشیا اهمیت ندارند. (شهریور۱۴۰۰)

● گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

۱۱۰ . با ۸ نقطهٔ متمایزواقع برمحیط دایره چند مثلث می‌توان تشکیل داد؟

۱) ۴۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۵۶

۱۱۱ . حاصل $P(2,2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

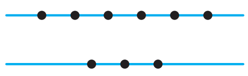
۱۱۲ . از معادلهٔ $P(n,1)=n^2-4n$ مقدار n^3 کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۱۲۵ ۳) ۶۴ ۴) ۲۱۶

۱۱۳ . در یک اتومبیل معمولی، ۵ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند، به‌طوری که ۳ نفرآن‌ها مجاز به رانندگی باشند؟ (سراسری ۹۹)

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۷۵ ۴) ۸۴

۱۱۴ . با نقاط مقابل چند مثلث می‌توان ساخت؟



۱) ۶۳ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۷۲

۱۱۵ . تعداد زیرمجموعه‌های هفت عضوی مجموعهٔ $A=\{0,1,2,...,9\}$ شامل همهٔ عددهای اول و فاقد اعداد مضرب ۴، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۱۱۶ . به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را از بین ۹ کتاب انتخاب کرد؟ (خرداد ۹۹، مشابه شهریور۹۸)

۱۱۷ . مهدی از بین ۳ کتاب ریاضی، ۲ کتاب عربی و ۴ کتاب ادبیات به چند طریق می‌تواند: (دی ۹۹)

آ) یک کتاب برای مطالعه انتخاب کند.

ب) یک کتاب ریاضی، یک کتاب عربی و یک کتاب ادبیات انتخاب کند.

۱۱۸ . از بین ۳ کتاب ریاضی متمایز و ۲ کتاب فیزیک متمایز و ۴ کتاب ادبیات متمایز به چند طریق می‌توان: (شهریور۱۴۰۰)

آ) یک کتاب برای مطالعه انتخاب کرد. ب) یک کتاب ریاضی انتخاب کرد.

۱۱۹ . به چند طریق می‌توان ۳ توپ همرنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟ (مشابه امتحان نهایی)

۱۲۰ . به چند طریق، ازبین ۸ دوندهٔ یک مسابقه، نفرات اول تا سوم می‌توانند مشخص شوند، به طوری‌که هیچ دو نفری هم‌زمان به خط پایان نرسند؟ (کتاب درسی)

۱۲۱ . با حروف کلمهٔ «ولایت» چند ترتیب چهارحرفی مختلف می‌توان ساخت؟ (بی‌معنی و با معنی) (شهریور۹۰)

۱۲۲ . به چند طریق می‌توان از بین ۹ فیلم مطرح در جشنواره، ۳ فیلم را به عنوان فیلم اول، دوم و سوم انتخاب نمود؟ (شهریور۸۹)

۱۲۳ . حسین ۶ کتاب مختلف دارد. به چند طریق می‌تواند ۴ کتاب از آن‌ها را در یک قفسه کنار هم بچیند؟ (دی ۸۹)

۱۲۴ . به چند طریق می‌توان از بین ۶ بازیکن ذخیرهٔ یک تیم فوتبال، ۳ نفر را به ترتیب برای پست‌های حمله، هافبک و دفاع وارد زمین کرد؟ (مشابه امتحان نهایی)

۱۲۵ . ۴ نفر به چند طریق می‌توانند روی ۶ صندلی قرار گیرند، اگر روی هر صندلی حداکثر یک نفر بتواند بنشیند؟

۱۲۶ . تعداد جایگشت‌های (تبدیل‌های) ۲ حرفی از حروف کلمهٔ «گلستان» را به‌دست آورید. (کتاب درسی)

۱۲۷ . از یک گروه ۱۳ نفری دانش‌آموزی، به چند طریق می‌توان ۴ نفر را برای فعالیت‌های فوق برنامهٔ مدرسه انتخاب کرد، به طوری‌که یک نفر مسئول گروه سرود، یک نفر مسئول گروه دانش، یک نفر مجری برنامه‌ها و یک نفر مسئول مسابقات علمی شود؟ (مشابه امتحان نهایی)

● **با توجه به تساوی روبه‌رو به سؤالات زیر پاسخ دهید.** $P(n,۴)=۳P(n,۳)$

۱۲۸ . در تساوی فوق مقدار n را به‌دست آورید. (کتاب درسی)

۱۲۹ . حاصل $P(n+۱,۳)$ را به ساده‌ترین شکل بنویسید.

● **درستی روابط زیر را بررسی کنید.** (کتاب درسی)

۱۳۰ . $P(n,(n-۱))=n!$

۱۳۲ . $P(n+۲,۴)=P(n,۳)$

۱۳۱ . $\frac{P(n,n)}{n!}=P(n,۰)$

۱۳۳ . $P(n,۵)=۱۸P(n-۲,۴)$

۱۳۴ . در یک پرواز داخلی، ۴ صندلی خالی در هواپیما موجود است و ۹ نفر در فهرست انتظار قرار دارند. به چند طریق می‌توان از بین آن‌ها ۴ نفر را انتخاب کرد، به طوری‌که: (کتاب درسی)

آ ترتیب انتخاب این افراد مهم باشد.

ب ترتیب انتخاب افراد از روی فهرست مهم نباشد.

۱۳۵ . بستنی فروشی ۱۰ طعم بستنی دارد. اگر یک بستنی قیفی با ۳ طعم مختلف بخواهیم و ترتیب قرارگرفتن طعم‌های مختلف مهم نباشد، چند انتخاب می‌توانیم داشته باشیم؟ اگر ترتیب قرارگرفتن طعم‌های مختلف مهم باشد، چند انتخاب خواهیم داشت؟ (مشابه خرداد ۸۹)

۱۳۶ . به چند طریق می‌توان از بین ۸ کتاب مختلف، ۵ کتاب را برای مطالعه انتخاب کرد؟ (شهریور۸۹ ، مشابه دی ۸۹)

۱۳۷ . چگونه می‌توان از بین ۸ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ آبی، ۳ مهره انتخاب کرد، به طوری‌که: (مشابه امتحان نهایی)

آ هر سه مهره، سفید باشند.

ب هر سه مهره، هم‌رنگ باشند.

پ دو مهره، سفید و یک مهره، آبی باشد.

۱۳۸ . ۵ توپ قرمز، ۴ توپ آبی و ۳ توپ سفید متمایز داریم. به چند طریق می‌توان سه توپ با رنگ‌های متفاوت انتخاب کرد؟ (مشابه امتحان نهایی)

۱۳۹ . ۵ توپ قرمز، ۴ توپ آبی و ۳ توپ سفید متمایز داریم. به چند طریق می‌توان سه توپ هم‌رنگ انتخاب کرد؟ (مشابه امتحان نهایی)

۱۴۰ . به چند طریق می‌توان از بین ۱۲ لامپ که ۴ تای آن‌ها معیوب است، ۳ لامپ را انتخاب کرد، به طوری‌که: (مشابه امتحان نهایی)

آ هر سه لامپ معیوب باشند.

ب دو تا سالم و یکی معیوب باشند.

پ فرقی بین سالم و معیوب نباشد.

۱۴۱ . از ۱۲ نفر اعضای یک تیم والیبال، ۷ نفر جوان و ۵ نفر نوجوان هستند. به چند طریق می‌توان ۶ نفر از بین آن‌ها انتخاب کرد، به طوری‌که: (کتاب درسی)

آ ۴ نفر جوان و ۲ نفر نوجوان باشند.

ب محدودیتی در جوان و نوجوان بودن نداشته باشیم.

۱۴۲ . از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه، به چند طریق می‌توان سه نفر را طوری انتخاب کرد که همواره یک فرد مورد نظر، بین آن سه نفر باشد؟ (کتاب درسی)

۱۴۳ . دانش‌آموزی باید از بین ۱۰ سؤال امتحانی دقیقاً به ۸ سؤال پاسخ دهد. اگر پاسخ دادن به ۳ سؤال اول اجباری باشد، به چند طریق می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد؟ (کتاب درسی)

۱۴۴ . شش نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. مشخص کنید با این نقاط چند مثلث متفاوت می‌توان ساخت؟ (کتاب درسی)

۱۴۵ . با ۵ نقطه روی محیط یک دایره چند وتر می‌توان رسم کرد؟ (خرداد ۹۹)

۱۴۶ . مجموعهٔ ۸ عضوی $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد؟ (شهریور۹۹، مشابه دی ۹۸، خرداد ۹۸)

● **مقدار x را در دو سؤال زیر به‌دست آورید.** (کتاب درسی)

۱۴۷ . $۲x+C(۵,۲)=P(۵,۳)$

۱۴۸ . $x\times P(۵,۲)=C(n,n)$

۱۴۹ . مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ چند زیرمجموعهٔ ۴ عضوی دارد که همگی شامل اعداد ۶ و ۵ باشند؟

۱۵۰ . مقدار n را از تساوی $P(n,۱)=۶$ به‌دست آورید. (خرداد ۹۶)

۱۵۱ . از میان ۵ ریاضیدان، ۳ فیزیکدان و ۴ شیمیدان به چند طریق می‌توانیم یک کمیتهٔ ۳ نفرهٔ علمی تشکیل دهیم؟ (خرداد ۹۶)

● **درستی تساوی‌های سه سؤال زیر را نشان دهید.**

۱۵۲ . $P(n,n-1)=P(n,n)$ (خرداد ۹۴)   **۱۵۳ .** $P(۶,۲)=۶C(۵,۱)$ (خرداد ۹۳)   **۱۵۴ .** $C(n,n)=C(n,۰)$ (خرداد ۹۲)

۱۵۵ . از فهرست نام ۱۲ دانش‌آموز ۴ نام را برای بازدید از موزه به قید قرعه انتخاب می‌کنیم. تعداد راه‌های ممکن برای انتخاب این ۴ نفر را به‌دست آورید. (خرداد ۹۵)

۱۵۶ . مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ را در نظر بگیرید: (دی ۱۴۰۱)

آ) A چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد؟

ب) A چند زیرمجموعهٔ ۴ عضوی شامل دو عضو b و c دارد؟

۱۵۷ . مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به‌صورت $\binom{۵}{۳}$ باشد. (خرداد ۱۴۰۱)

بستهٔ سوم

احتمال (قسمت اول)

صفحه ۱۲ تا ۲۱ کتاب درسی

الف پدیده‌های قطعی و تصادفی

تعریف پدیده‌هایی که می‌توان نتیجهٔ آن‌ها را قبل از رخ دادن به طور حتمی مشخص کرد پدیده‌های قطعی نام دارند.

مثال می‌دانیم اگر یک لیوان آب را برگردانیم آب به سمت پایین می‌ریزد. پس این پدیده، قطعی است.

تعریف پدیده‌هایی که قبل از رخ دادن آن‌ها، نتوانیم نتیجهٔ قطعی آن‌ها را معلوم کنیم پدیده‌های تصادفی یا آزمایش‌های تصادفی نام دارند.

مثال در پرتاب تاس نمی‌توانیم قبل از پرتاب، مشخص کنیم که دقیقاً چه عددی ظاهر می‌شود.

فضای نمونهٔ یک آزمایش تصادفی

● گفتیم در هر پدیدهٔ تصادفی، نتیجهٔ قطعی قبل از انجام آزمایش معلوم نیست ولی همهٔ نتایج ممکن برای آن معلوم است که به مجموعهٔ این نتایج، فضای نمونه می‌گوییم و آن را با S و تعداد اعضایش را با $n(S)$ نمایش می‌دهیم. مثلاً در پرتاب یک تاس خواهیم داشت: $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow n(S)=۶$

● ضمناً به هر یک از اعضای S یک برآمد می‌گوییم مثلاً در پرتاب یک تاس ۶ برآمد وجود دارد و یا در پرتاب یک سکه خواهیم داشت:

$S=\{\text{ر}\,,\,\text{پ}\} \Rightarrow n(S)=۲$

بنابراین در پرتاب یک سکه، دو برآمد وجود دارد.

تذکر مهم اگر یک آزمایش تصادفی را چند بار تکرار کنیم (*مثلاً یک سکه رو چند بار پرتاب کنیم*) یا اگر چند آزمایش تصادفی مختلف را با هم انجام دهیم (*مثلاً تاس و سکه رو با هم پرتاب کنیم*) برای یافتن $n(S)$ باید تعداد اعضای فضای نمونهٔ تک‌تک آزمایش‌ها را در هم ضرب کنیم. مثلاً اگر یک سکه را ۴ بار پرتاب کنیم خواهیم داشت:

$n(S)=۲\times۲\times۲\times۲=۲^۴=۱۶$

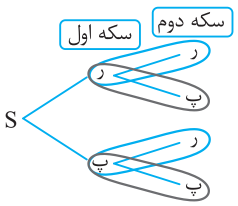
یا اگر یک سکه و دو تاس را با هم پرتاب کنیم تعداد اعضای فضای نمونه برابر می‌شود با:

$$n(S)=\underset{\text{سکه}}{۲}\times\underset{\text{تاس}}{۶}\times\underset{\text{تاس}}{۶}=۲\times۶^۲=۷۲$$

■ **نمودار درختی برای مشخص کردن فضای نمونه**

گاهی اوقات در امتحان نهایی از شما خواسته می‌شود که تمام عضوهای فضای نمونه را بنویسید، در این گونه مواقع می‌توانید از نمودار درختی استفاده کنید. یعنی برای هر فرزند یا سکه ۲ حالت و برای هر تاس ۶ حالت در نظر بگیرید و آن‌ها را شاخه‌بندی کنید.

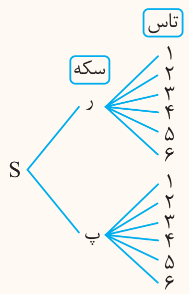
مثال اگر بخواهیم فضای نمونهٔ مربوط به پرتاب ۲ سکه را رسم کنیم، به شکل مقابل خواهد بود:



$\Rightarrow S=\{(\text{ر},\text{ر}),(\text{ر},\text{پ}),(\text{پ},\text{ر}),(\text{پ},\text{پ})\}$

سؤال یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. به کمک نمودار درختی، فضای نمونه را به‌طور کامل بنویسید. **کتاب درسی**

پاسخ ما به دلخواه اول شاخه‌های سکه و سپس تاس را رسم می‌کنیم:



$\Rightarrow S=\{(\text{ر},۱),(\text{ر},۲),\ldots\ldots,(\text{ر},۶),(\text{پ},۱),(\text{پ},۲),\ldots\ldots,(\text{پ},۶)\}$

البته اگر در نمودار درختی، اول تاس و سپس سکه را قرار می‌دادید، هیچ اشکالی ایجاد نمی‌شد و زوج‌مرتب‌ها به شکل $(۱,\text{ر}),(۲,\text{ر}),\ldots\ldots,(۶,\text{پ})$ تبدیل می‌شدند.

بخش ۲

پاسخ‌نامه

فصل ۱ آمار و احتمال

۱ نادرست است؛ زیرا:

$$\begin{cases}6!=720\\2!=2\end{cases}\Rightarrow \frac{6!}{2!}=\frac{720}{2}=360$$

ولی ۳! برابر ۶ است، پس این جمله نادرست است.

۲ درست است؛ زیرا می‌خواهیم E، L و Z کنار هم باشند، پس آن‌ها را داخل یک کادر قرار می‌دهیم:

$\boxed{E,L,Z},M,A,N$

۱ بستهٔ بزرگ

۳ بستهٔ کوچک ⇐ تعداد کلمات $=4!\times3!=24\times6=144$

۳ نادرست است؛ زیرا:

$$\frac{8!}{4!}=\frac{8\times7\times6\times5\times4!}{4!}=8\times7\times6\times5$$

۴ $n!$

۵ ۱

۶ $m\times n$

۷ $\frac{0!}{1!}=\frac{1}{1}=1$

۸ جایگشت

۹ جایگشت

۱۰ ۷ تایی

۱۱ ۲۰

۱۲ ۴!

۱۳ گزینهٔ (۲)

فقط‌اتومات، حجم موتورها، مدل‌های مختلف، رنگ‌های مختلف

تعداد کل حالت‌ها $=5\times3\times4\times1=60$

۱۴ گزینهٔ (۲)

مسیر ABCD: $\underset{AB}{2}\times\underset{BC}{x}\times\underset{CD}{2}=4x$

مسیر AED: $y\times4=4y$

طبق اصل جمع $\Rightarrow 4x+4y=20$

فقط اعداد گزینهٔ (۲) در معادلهٔ بالا صدق می‌کنند؛ یعنی اگر $x=3$ و $y=2$ باشد، به رابطهٔ $20=20$ می‌رسیم.

۱۵ گزینهٔ (۱)

عدد ۱۰! را یک مرحله باز می‌کنیم یعنی آن را به شکل $10\times9!$ می‌نویسیم:

$$A=\frac{\overbrace{9!+10\times9!}^{\text{از ۹! فاکتور می‌گیریم}}}{9!}=\frac{\cancel{9!}(1+10)}{\cancel{9!}}=11$$

۱۶ گزینهٔ (۴)

یکان باید ۵ باشد. ضمناً صدگان باید ۶ یا ۷ باشد، پس داریم:

۶ یا ۷ — فقط ۵

$\boxed{2}\boxed{4}\boxed{1}$ ⇐ جواب $=2\times4\times1=8$

۲، ۳، ۴، ۶، ~~۷~~

۱۷ گزینهٔ (۲)

پدر و مادر را با A و B و فرزند خاص را C می‌نامیم. داریم:

$\boxed{A,C,B},D,E,F,G$ ⇐ جواب $=5!\times2!=120\times2=240$

۱ بستهٔ بزرگ — ۴ بستهٔ کوچک — جابه‌جایی ۵ بسته باهم — جابه‌جایی A و B باهم

۱۸ چهار تا خانه رسم می‌کنیم، تنها شرط سوال این است که تکرار رقم‌ها مجاز نیست پس بعد از پُر کردن هر خانه، یکی از ارقام استفاده شده در خانهٔ قبلی را خط می‌زنیم (مهم نیست کدوم رقم رو خط بزنیم.)

۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷ — ۱،۲،۳،۴،۵،~~۶~~ — ۱،۲،۳،۴،۵،۶،~~۷~~

$\boxed{7}\boxed{6}\boxed{5}\boxed{4}$ ⇐ جواب: $7\times6\times5\times4=840$

۱،۲،۳،۴،~~۵~~

۱۹ سه تا خانه رسم می‌کنیم، عدد حاصل باید فرد باشد، پس یکانش فقط می‌تواند ۱ یا ۷ یا ۹ باشد؛ لذا داریم:

۱,۲,۴,~~۷~~ — ۱,۲,۴,۷,~~۹~~ — ۱,۷,۹

$\boxed{4}\boxed{3}\boxed{3}$ ⇐ جواب $=4\times3\times3=36$

شروع

۲۰ می‌خواهیم عدد ۵ رقمی بسازیم و تکرار ارقام هم مجاز نیست؛ لذا خانه‌ها را از چپ به راست پُر می‌کنیم:

۱,۲,۳,...,۹ — ~~۱~~,۳,۴,...,۹ — ~~۴~~,۵,...,۹

$\boxed{9}\boxed{8}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{5}$ ⇐ جواب $=9\times8\times7\times6\times5=15120$

~~۱~~,۲,۳,۴,...,۹ — ~~۳~~,۴,۵,...,۹

۲۱ یکان عدد باید زوج باشد، یعنی می‌تواند ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ باشد:

~~۲~~,۳,۴,...,۹

۱,~~۲~~,۳,۴,...,۹ — ~~۳~~,۴,...,۹ — ۲,۴,۶,۸

$\boxed{8}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{4}$ ⇐ جواب $=8\times7\times6\times4=1344$

شروع

۲۲ سه تا خانه رسم می‌کنیم، خانهٔ آخر فقط به ۱ حالت می‌تواند پُر شود (با حرف «د»)؛ در کلمات فارسی، خانه‌ها را از راست به چپ پُر می‌کنیم:

خ، و، ر، ش، ی

فقط (د)

$\boxed{1}\boxed{4}\boxed{5}$ ⇐ جواب $=1\times4\times5=20$

خ، و، ر، ش، ~~ی~~

۲۳ چهار تا خانه رسم می‌کنیم، تکلیف خانه‌های ابتدایی و انتهایی معلوم است. لذا خواهیم داشت:

و، ر، ش، د

فقط (خ)

$\boxed{1}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{1}$ ⇐ جواب $=1\times3\times4\times1=12$

و، ر، ش، ~~د~~ — فقط (ی)

۲۴ «مهرسان» کلمه‌ای فارسی است، پس پُرکردن خانه‌ها را از راست به چپ انجام می‌دهیم. پس از پُرکردن هر خانه، یکی از حروف استفاده شده را حذف می‌کنیم. *(مهم نیست کدوم حرف)*

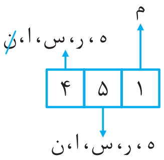
م، هـ، ر، س، ا، ن

م، هـ، ر، س، ~~ا~~

$\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}$ ⇐ جواب $=4\times5\times6=120$

م، هـ، ر، س، ا، ~~ن~~

۲۵ ابتدا خانه سمت راست را پُر می‌کنیم که فقط ۱ حالت دارد (حرف م) سپس خانهٔ وسط به ۵ حالت پُر خواهد شد (*چون دیگه نمی‌تونیم از «م» استفاده کنیم*.) و در نهایت خانهٔ سمت چپ به ۴ حالت پُر می‌شود، چون یکی از حروف خانه وسط را باید حذف کنیم (ما به دلخواه حرف «ن» رو حذف کردیم.).



⇒ جواب = ۴ × ۵ × ۱ = ۲۰

۲۶ چون فقط باید یکی از میوه‌ها را انتخاب کنیم، از اصل جمع استفاده می‌کنیم: تعداد حالت‌ها = ۲ + ۳ + ۴ = ۹

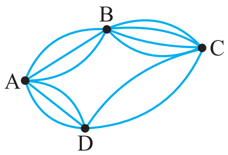
۲۷ باید از اصل جمع استفاده کنیم، چون خودروی انتخابی یا باید سواری باشد یا وانت یا کامیون، لذا داریم:

تعداد حالت‌ها = ۱۰ + ۱۲ + ۶ = ۲۸

۲۸ برای رفتن از C به D به طوری که از B عبور نکنیم، فقط باید مسیر CAD را طی کرد؛ لذا خواهیم داشت:

تعداد حالت‌ها = $\overset{CA}{۳} \times \overset{AD}{۴}$ = ۱۲

۲۹



مسیر ABC: ۳ × ۴ = ۱۲

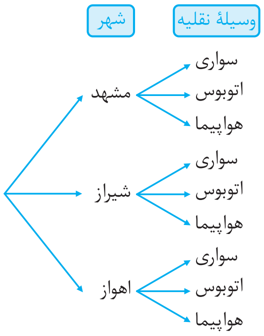
مسیر ADC: ۳ × ۲ = ۶

$\xrightarrow{\text{اصل جمع}}$ ۱۲ + ۶ = ۱۸

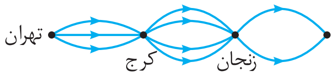
۳۰ طبق اطلاعات مسئله برای انتخاب شهر ۳ گزینه وجود دارد (مشهد، شیراز یا اهواز) و برای انتخاب وسیلهٔ نقلیه نیز ۳ گزینه موجود است (سواری، اتوبوس یا هواپیما) بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد انتخاب‌های این دو عمل در هم ضرب می‌شوند:

۹ = ۳ × ۳ = تعداد راه‌های ممکن برای سفر

۳۱ می‌توانیم، با یک تقسیم‌بندی مناسب (نمودار درختی) حالت‌های مختلف انتخاب را نمایش دهیم:

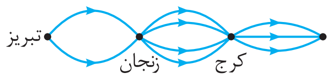


۳۲ تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به تبریز:



⇒ ۳ × ۴ × ۲ = ۲۴

تعداد راه‌های ممکن برای برگشتن از تبریز به تهران:



⇒ ۲ × ۴ × ۳ = ۲۴

طبق اصل ضرب تعداد کل راه‌های رفت و برگشت عبارت است از:

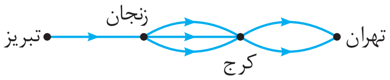
۵۷۶ = ۲۴ × ۲۴

۳۳ مسیرهای رفتن از تهران به تبریز دقیقاً مانند سؤال قبل می‌باشد:

۲۴ = ۲ × ۴ × ۳ = تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به تبریز

چون گفته شده مسیرهای رفت و برگشت نباید تکراری باشند، پس مسیرهایی که در رفت از آن‌ها استفاده کردیم، در برگشت حذف می‌شوند:

تعداد راه‌های ممکن برای برگشت از تبریز به تهران:



⇒ ۱ × ۳ × ۲ = ۶

حال طبق اصل ضرب تعداد کل راه‌های رفت و برگشت عبارت است از:

(تعداد حالات مسیر رفت) × (تعداد حالات مسیر برگشت) = تعداد کل راه‌های انتخابی = ۲۴ × ۶ = ۱۴۴

۳۴ برای رفتن از A به B سه مسیر کلی وجود دارد:

۱) مسیر $A \to C \to B$

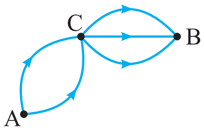
یا

۲) مسیر $A \to D \to B$

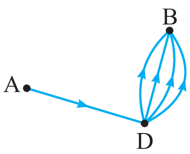
یا

۳) مسیر $A \to E \to B$

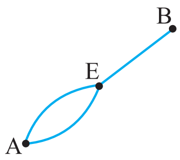
مسیر (۱): مطابق شکل می‌توانیم ابتدا از شهر A به C و سپس از C به B برویم. ملاحظه می‌شود که از A به C دو مسیر مختلف و از C به B سه مسیر متمایز وجود دارد، لذا طبق اصل ضرب این دو عمل با یکدیگر به ۶ = ۳ × ۲ طریق انجام می‌گیرد.



مسیر (۲): ابتدا از A به D و سپس از D به B می‌رویم. ملاحظه می‌شود که از A به D فقط یک مسیر و از D به B چهار مسیر وجود دارد، لذا طبق اصل ضرب این دو عمل با یکدیگر به ۴ = ۴ × ۱ طریق انجام می‌گیرد.



در مسیر (۳) نیز خواهیم داشت:



⇒ تعداد حالت‌ها = ۲ × ۱ = ۲

چون برای رفتن از شهر A به شهر B فقط می‌توانیم یکی از ۳ مسیر (۱)، (۲) یا (۳) را در نظر بگیریم (*به کلمهٔ «یا» در ابتدای پاسخ توجه کنید که نشان‌دهندهٔ اصل جمع است.*)، لذا طبق اصل جمع خواهیم داشت:

۱۲ = ۲ + ۴ + ۶ = تعداد کل حالت‌ها برای رفتن از A به B

۳۵ می‌خواهیم حتماً از شهر C عبور کنیم پس فقط مسیر $A \to C \to B$ را خواهیم داشت:

تعداد حالت‌ها = ۳ × ۲ = ۶

۳۶ | می‌خواهیم از شهر C عبور نکنیم پس دو مسیر $A \to E \to B$ و $A \to D \to B$ را خواهیم داشت:

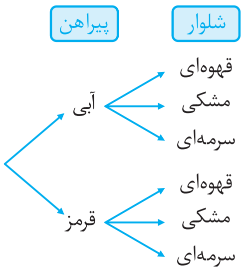
$A \to E \to B$: تعداد حالت‌ها $= 2 \times 1 = 2$

$A \to D \to B$: تعداد حالت‌ها $= 1 \times 4 = 4$

$\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌ها $= 2 + 4 = 6$

---

۳۷ | این فرد برای انتخاب پیراهن به ۲ طریق و برای انتخاب شلوار به ۳ طریق می‌تواند عمل کند، لذا طبق اصل ضرب کلاً به ۶ = ۳ × ۲ طریق می‌تواند لباس بپوشد.



---

۳۸ | طبق اصل شمارش، تعداد انتخاب‌های حالت‌های مختلف را در هم ضرب می‌کنیم: تعداد انتخاب‌ها $= 4 \times 3 \times 2 = 24$

---

۳۹ | ۲ سؤال وجود دارد که برای هرکدام از آن‌ها ۳ گزینه (۳ حالت) وجود دارد. لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

تعداد حالت‌های پاسخگویی به سؤالات $= 3 \times 3 = 9$

---

۴۰ | آ) پاسخ دادن به این ۲۰ سؤال، شامل ۲۰ تصمیم‌گیری است که هر تصمیم‌گیری به ۲ طریق انجام می‌شود. یعنی جواب دادن به سؤال ۱ دو حالت دارد، جواب دادن به سؤال ۲ نیز دو حالت دارد، ... و جواب دادن به سؤال ۲۰ نیز دو حالت دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

تعداد کل حالت‌ها $= \underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{\text{۲۰ بار}} = 2^{20}$

ب) چون پاسخگویی به سؤالات الزامی نیست. پس برای هر سؤال ۳ انتخاب داریم، یعنی به‌عنوان مثال برای جواب دادن به سؤال اول می‌توانیم گزینهٔ «الف» و یا «ب» را انتخاب کنیم و یا می‌توانیم اصلاً به سؤال پاسخ ندهیم. پس تعداد راه‌های ممکن برای جواب دادن عبارت است از:

تعداد کل حالت‌ها $= \underbrace{3 \times 3 \times \ldots \times 3}_{\text{۲۰ بار}} = 3^{20}$

در این‌گونه مسائل که یک کار مشابه را به دفعات زیاد تکرار می‌کنیم راه کوتاه‌تری برای پیدا کردن تعداد حالت‌ها وجود داره؟

پاسخ *بله که وجود داره ... به تذکر زیر خوب دقت کن:*

> اگر یک تصمیم‌گیری دارای k مرحله باشد $(1,2,3,\ldots,k)$ و تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله با هم برابر و مساوی n باشد، آن‌گاه تعداد کل انتخاب‌های ممکن برابر با n^k است.

---

۴۱ | یک فرد می‌تواند هر سه کار را با هم انجام دهد. یعنی هم می‌تواند سوپ، هم پلو و هم سالاد را انتخاب کند. پس از اصل ضرب استفاده می‌کنیم:

تعداد حالت‌ها $= 2 \times 4 \times 3 = 24$

---

۴۲ | $5! - 4! = (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) - (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 120 - 24 = 96$

> از حل این مسئله نتیجه می‌گیریم که در حالت کلی:
>
> $$\begin{cases} a! + b! \neq (a+b)! \\ a! - b! \neq (a-b)! \end{cases}$$
>
> به عنوان مثال نمی‌توان گفت که حاصل $3! + 4!$ برابر $(3+4)!$ یعنی $7!$ است، زیرا اگر حاصل این دو عبارت را جداگانه محاسبه کنیم، خواهیم داشت:
>
> $$\left.\begin{array}{l} 3!+4!=(3\times2\times1)+(4\times3\times2\times1)=6+24=30 \\ 7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040 \end{array}\right\} \Rightarrow 3!+4! \neq 7!$$

---

۴۳ | $$\frac{12!}{10!} = \frac{12 \times 11 \times \cancel{10!}}{\cancel{10!}} = 12 \times 11 = 132$$

---

۴۴ | $$\frac{7!}{3! \times 5!} = \frac{7 \times 6 \times \cancel{5!}}{(3 \times 2 \times 1) \times \cancel{5!}} = \frac{7 \times 6}{6} = 7$$

---

۴۵ | $$\frac{3!+5!}{6!} = \frac{(3\times2\times1)+(5\times4\times3\times2\times1)}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = \frac{6+120}{720} = \frac{126}{720} = \frac{7}{40}$$

---

۴۶ | $$\frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 7!} = \frac{8 \times \cancel{7} \times \cancel{6!}}{(2 \times 1) \times \cancel{7} \times \cancel{6!}} = \frac{8}{2} = 4$$

---

۴۷ | $$0! + 1! + 2! + 3! = 1 + 1 + \underbrace{(2 \times 1)}_{2} + \underbrace{(3 \times 2 \times 1)}_{6} = 10$$

---

۴۸ | $$4! + 2! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) + (2 \times 1) = 24 + 2 = 26$$

---

۴۹ | $$\frac{10!}{6! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{6! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = 1$$

---

۵۰ | $$\begin{cases} 1! + 3! + 4! = 1 + 6 + 24 = 31 \\ 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320 \end{cases}$$

پس رابطهٔ داده‌شده، نادرست است.

---

۵۱ | **روش اول** $$\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\cancel{(n-1)!}}{(n+1) \times n \times \cancel{(n-1)!}} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n)} = \frac{1}{6} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم.}} (n+1)(n) = 6$$

$$\Rightarrow n^2 + n = 6 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{اتحاد جمله}} (n+3)(n-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+3=0 \\ n-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=-3<0 \ (\text{غ ق ق}) \\ n=2 \ (\text{ق ق}) \end{cases}$$

چون n باید عددی طبیعی باشد، پس جواب $n = -3$ غیرقابل قبول است.

روش دوم در معادلهٔ $(n)(n+1)=6$ به جای حل این معادلهٔ درجه دوم به روش دلتا می‌توان گفت که چون $(n+1)$ و n دو عدد متوالی (پشت سر هم) هستند، پس عدد ۶ را نیز به‌صورت دو عدد متوالی می‌نویسیم:

$$(n+1)\times n = 3\times 2 \Rightarrow n=2$$

۵۲ | آ) چون عدد مورد نظر سه‌رقمی است، سه جای خالی می‌کشیم. طبق صورت مسئله چهار عدد به ما داده شده و تکرار ارقام نیز مجاز است، پس هرجای خالی (خانه) به چهار طریق می‌تواند پر شود که بنابه اصل ضرب، تعداد راه‌های انتخاب در یکدیگر ضرب می‌شوند:

هریک از ارقام ۲،۹،۴،۱

[۴] [۴] [۴] ⇒ ۴ × ۴ × ۴ = ۶۴ :تعداد اعداد مطلوب

فلش‌های روی مربع‌ها، ترتیب پر شدن خانه‌ها را نشان می‌دهند.

ب) ابتدا سه خانه می‌کشیم. رقم سمت چپ (صدگان) به چهار طریق مختلف می‌تواند پر شود. چون تکرار ارقام مجاز نیست رقم دهگان (خانهٔ وسط) می‌تواند به سه طریق پر شود، زیرا از رقمی که در خانهٔ اول استفاده کردیم دیگر نمی‌توانیم در خانهٔ وسطی استفاده نماییم. در نهایت در خانهٔ سمت راست (رقم یکان) فقط می‌توانیم از دو رقم استفاده کنیم؛ پس خواهیم داشت:

۱،۴،۹،۲   ~~۴~~،۹،۲

[۴] [۳] [۲]   تعداد اعداد مطلوب = ۴ × ۳ × ۲ = ۲۴

~~۱~~،۴،۹،۲

۵۳ | چون برای قرار گرفتن در یک صف، ترتیب مهم است، لذا با یک مسئلهٔ ترتیب مواجه هستیم. می‌دانیم تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$، لذا تعداد جایگشت‌های ۸ نفر برابر است با:

تعداد کل حالت‌های ممکن: ۸! = ۸ × ۷ × ۶ × ۵ × ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۴۰۳۲۰

۵۴ | چون در کلمهٔ «کتاب» حروف تکراری وجود ندارد و این کلمه ۴ حرفی است، لذا خواهیم نوشت:

تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «کتاب» = ۴! = ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۲۴

۵۵ | تعداد حالت‌های قرارگرفتن n شیء مختلف در کنار هم برابر است با $n!$؛ لذا تعداد حالت‌های قرار گرفتن این ۴ کتاب کنار هم برابر است با:

۴! = ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۲۴

۵۶ | آ) اگر تکرار حروف مجاز باشد، هر یک از سه خانهٔ زیر می‌توانند به ۳۲ طریق مختلف پر شوند.

تعداد کلمات مورد نظر:

هریک از ۳۲ حرف الفبای فارسی

[۳۲] [۳۲] [۳۲] $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ جواب = ۳۲ × ۳۲ × ۳۲ = (۳۲)³

ب) وقتی گفته می‌شود تکرار غیرمجاز است، به آن معنا است که وقتی خانهٔ سمت راست می‌تواند با هر یک از ۳۲ انتخاب پر شود، خانهٔ بعدی با ۳۱ انتخاب و خانهٔ آخر با ۳۰ انتخاب پُر می‌شود.

تعداد کلمات مورد نظر:

[۳۰] [۳۱] [۳۲] $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ جواب = ۳۲ × ۳۱ × ۳۰

علت این‌که پُر کردن خانه‌ها را از سمت راست شروع کردیم، این است که کلمات فارسی از راست به چپ نوشته می‌شوند. *(البته اگه از سمت چپ هم شروع کنید به همین جواب‌ها خواهید رسید.)*

۵۷ | آ) چون کلمات سه‌حرفی می‌خواهیم لذا ۳ خانه در نظر می‌گیریم و چون تکرار حروف مجاز است، خانه‌ها به‌صورت زیر پُر می‌شوند:

س، ع، ا، د، ت

[۵] [۵] [۵] ⇒ تعداد کلمات مطلوب = ۵ × ۵ × ۵ = ۱۲۵

یعنی به عنوان مثال اگر در خانهٔ سمت راست از حرف «س» شروع کردیم در بقیهٔ خانه‌ها نیز می‌توانیم از آن استفاده کنیم. *(دقت کنید که بی‌معنی بودن کلمهٔ ساخته‌شده مهم نیست.)*

ببخشید چرا پُر کردن خونه‌ها رو از سمت راست شروع کردید؟

پاسخ *تو این مسئله چون محدودیتی برای کلمات ۳ حرفی مورد نظر وجود نداره از هر طرف که خواستیم می‌تونیم خونه‌ها رو پُر کنیم ولی در کلمات فارسی همیشه بهتر اینه که از سمت راست، جاهای خالی رو پُر کنیم.*

ب) چون تکرار حروف مجاز نمی‌باشد، خواهیم داشت:

س، ع، ا، د، ت   ~~س~~، ع، ا، د، ت   ~~ع~~، ا، د، ت

[۵]   [۴]   [۳]

⇒ تعداد کلمات مطلوب = ۵ × ۴ × ۳ = ۶۰

یعنی اگر در خانهٔ اول (سمت راست) مثلاً از حرف «س» استفاده کردیم دیگر در خانهٔ بعدی نمی‌توان آن را به کار برد *(پس ۴ حرف باقی می‌مونه.)* و اگر در خانهٔ دوم مثلاً از حرف «ع» استفاده کردیم در خانهٔ سوم دیگر مجاز به استفاده از آن نیستیم *(پس ۳ حرف باقی می‌مونه.)*.

۵۸ | چون کلمهٔ مورد نظر سه‌حرفی است، پس سه خانه در نظر می‌گیریم و چون شروع کلمه باید با حرف نقطه‌دار باشد، خانهٔ سمت راست به دو طریق می‌تواند پُر شود *(حروف «ت» یا «ن»)*. از طرفی تکرار حروف غیرمجاز است پس خانه وسط به ۴ حالت پُر می‌شود چون باید یکی از حروف «ت» و «ن» را که در خانهٔ اول استفاده شده خط بزنیم *(ما «ت» رو خط زدیم.)*.

ت، ن   ~~ت~~، هـ، ر، ا، ن   ~~هـ~~، ر، ا، ن

[۲]   [۴]   [۳]

تعداد کلمات مطلوب = ۲ × ۴ × ۳ = ۲۴

۵۹ | چون کلمهٔ چهارحرفی می‌خواهیم پس چهار خانه می‌کشیم:

[۶] [۵] [۴] [۳]

⇒ تعداد کلمات مورد نظر = ۶ × ۵ × ۴ × ۳ = ۳۶۰

۶۰ چون کلمهٔ سه‌حرفی مورد نظر است، لذا سه خانه می‌کشیم. خانهٔ اول (سمت راست) فقط با یک حالت پُر می‌شود (حرف «س») و خانهٔ آخر (سمت چپ) نیز فقط به یک طریق پُر می‌شود (حرف «ن») و خانهٔ وسط به چهار طریق می‌تواند پُر شود (*یکی از حروف م، ه، ت، ا*)، پس خواهیم داشت:

حرف «ن»   حرف «س»

$\boxed{۱}\ \boxed{۴}\ \boxed{۱} \Rightarrow$ تعداد کلمات مورد نظر = ۱ × ۴ × ۱ = ۴

۶۱ پنج خانه می‌کشیم و دقت می‌کنیم که از هر حرف فقط یک بار می‌توان استفاده کرد (*تکرار حروف غیرمجازه.*)، یعنی خواهیم داشت:

یکی از ۸ حرف کلمه

$\boxed{۸}\ \boxed{۷}\ \boxed{۶}\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}$

یکی از ۷ حرف کلمه

$\Rightarrow$ تعداد کلمات ۵ حرفی = ۸ × ۷ × ۶ × ۵ × ۴ = ۶۷۲۰

۶۲ چهار خانه می‌کشیم. برای حرف سمت چپ فقط یک حالت داریم (حرف T) و برای بقیهٔ خانه‌ها به‌صورت زیر، انتخاب خواهیم داشت:

فقط T

$\boxed{۱}\ \boxed{۷}\ \boxed{۶}\ \boxed{۵} \Rightarrow$ تعداد کلمات مورد نظر = ۱×۷×۶×۵ = ۲۱۰

۶۳ خانه‌های اول و آخر هر کدام فقط به یک طریق پر می‌شوند (*هر کدام یک حالت دارند.*) و می‌توان چنین نوشت:

فقط T   فقط E

$\boxed{۱}\ \boxed{۶}\ \boxed{۵}\ \boxed{۱} \Rightarrow$ تعداد کلمات موردنظر = ۱ × ۶ × ۵ × ۱ = ۳۰

۶۴ آ) چون عدد مورد نظر پنج‌رقمی است، پس پنج خانه در نظر می‌گیریم. چون در این مسئله محدودیتی نداریم (*شرطی مانند زوج بودن، فرد بودن و غیره در صورت مسئله ذکر نشده.*) پس پُر کردن خانه‌ها را از خانهٔ سمت چپ شروع می‌کنیم. می‌دانیم این خانه نمی‌تواند با صفر شروع شود (*اعداد با صفر شروع نمیشن.*) پس به ۴ طریق می‌تواند پر شود ولی خانه‌های بعدی، همگی می‌توانند به ۵ طریق پر شوند (*چون تکرار مجازه و از صفر در خونه‌های دیگه می‌توانیم استفاده کنیم.*):

تعداد اعداد مطلوب:

$\boxed{۴}\ \boxed{۵}\ \boxed{۵}\ \boxed{۵}\ \boxed{۵} \Rightarrow$ ۴ × ۵ × ۵ × ۵ × ۵ = ۲۵۰۰

ب) پنج خانه را در نظر می‌گیریم. خانهٔ سمت چپ همان‌طور که گفته شد می‌تواند به ۴ طریق پر شود و چون تکرار مجاز نیست خانهٔ بعدی می‌تواند به ۴ طریق پر شود (*عددی که با اون، خونهٔ سمت چپ رو پر کردیم حذف میشه.*) به همین ترتیب در هر مرحله، یک عدد باید حذف شود:

تعداد اعداد مطلوب:

$\boxed{۴}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲}\ \boxed{۱} \Rightarrow$ ۴ × ۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۹۶

۶۵ چون عدد مورد نظر پنج‌رقمی است، پنج خانه می‌کشیم که به‌صورت زیر پُر می‌شوند.

تعداد اعداد مورد نظر:

$\boxed{۵}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲}\ \boxed{۱} \Rightarrow$ ۵×۴×۳×۲×۱ = ۱۲۰

دقت کنید که در هر مرحله، از تعداد انتخاب‌ها یکی کم شده است (*زیرا تکرار مجاز نیست.*).

۶۶ برای عدد سه‌رقمی مطلوب، سه خانه در نظر می‌گیریم:

$\boxed{۵}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳} \Rightarrow$ ۵ × ۴ × ۳ = ۶۰   تعداد اعداد مطلوب:

۶۷ چون عدد چهار رقمی است، پس چهار خانه می‌کشیم. خانهٔ سمت چپ طبق صورت مسئله فقط به یک حالت پُر می‌شود (عدد ۲) و بقیهٔ خانه‌ها به‌صورت زیر پُر می‌شوند:

$\boxed{۱}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲} \Rightarrow$ ۱ × ۴ × ۳ × ۲ = ۲۴   تعداد اعداد مورد نظر:

۶۸ برای عدد سه‌رقمی مذکور، سه خانه می‌کشیم خانهٔ سمت چپ فقط می‌تواند به یک حالت پُر شود (عدد سه) خانهٔ سمت راست (یکان) نیز فقط می‌تواند به یک حالت پُر شود (عدد هشت) پس برای خانهٔ وسط سه انتخاب خواهیم داشت (یکی از اعداد ۲، ۴ یا ۶) یعنی می‌توان نوشت:

فقط عدد ۳   فقط عدد ۸

$\boxed{۱}\ \boxed{۳}\ \boxed{۱} \Rightarrow$ ۱ × ۳ × ۱ = ۳ : تعداد اعداد مورد نظر

یکی از اعداد ۲، ۴ یا ۶

۶۹ چون عدد پنج‌رقمی می‌خواهیم پنج خانه می‌کشیم. دو خانهٔ سمت چپ هر کدام فقط به یک حالت امکان پُر شدن دارند، زیرا هر یک از این دو خانه قبلاً با یک عدد پُر شده است. سه خانهٔ باقی‌مانده هرکدام به ۱۰ حالت مختلف می‌توانند پُر شوند (اعداد ۰ تا ۹)؛ لذا می‌توان چنین نوشت:

$\boxed{۱}\ \boxed{۱}\ \boxed{۱۰}\ \boxed{۱۰}\ \boxed{۱۰}$

$\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ تعداد اعداد مورد نظر = ۱ × ۱ × ۱۰ × ۱۰ × ۱۰ = ۱۰۰۰

اگر در صورت مسئله ذکر می‌شد که تکرار غیرمجاز است، سه خانهٔ سمت راست (سه رقم راست عدد) به‌صورت زیر پُر می‌شدند:

$\boxed{۱}\ \boxed{۱}\ \boxed{۸}\ \boxed{۷}\ \boxed{۶} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$

تعداد اعداد مورد نظر = ۱ × ۱ × ۸ × ۷ × ۶ = ۳۳۶

۷۰ آ) برای زوج بودن عدد سه‌رقمی مورد نظر، ۲ انتخاب برای یکان داریم (عدد ۶ یا ۸)، پس:

$۳، ۵، ۶، ۷، \cancel{۸}$ $۳، ۵، ۶، \cancel{۷}$ ۸، ۶

$\boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲}$

شروع

$\Rightarrow$ ۴ × ۳ × ۲ = ۲۴ : تعداد اعداد مورد نظر

ب) برای اول بودن یکان نیز ۳ انتخاب داریم (اعداد ۳، ۵ یا ۷)، پس:

~~۴~~، ۵، ۶، ۷، ۸ — ۵، ۶، ۷، ~~۸~~ — ۳، ۵، ۷

[۴] [۳] [۳]

شروع

تعداد اعداد مورد نظر: ۳۶ = ۳ × ۳ × ۴ ⇐

۷۱| چون عدد مطلوب سه‌رقمی است، سه خانه می‌کشیم و چون تکرار مجاز است هر خانه می‌تواند به پنج طریق پُر شود، بنابراین داریم:

۱، ۲، ۴، ۶، ۷

[۵] [۵] [۵]

تعداد اعداد مورد نظر: ۱۲۵ = ۵ × ۵ × ۵ ⇐

۷۲| چون عدد مطلوب، چهاررقمی است، پس چهار خانه می‌کشیم. خانهٔ سمت راست (یکان) فقط می‌تواند با ارقام ۲، ۴ یا ۶ پر شود (*پس ۳ حالت داریم.*) ولی چون تکرار مجاز است خانه‌های دیگر هرکدام می‌توانند به پنج طریق پر شوند:

۱، ۲، ۴، ۶، ۷ — ۶، ۴، ۲

[۵] [۵] [۵] [۳]

شروع

تعداد اعداد مورد نظر: ۳۷۵ = ۵ × ۵ × ۵ × ۳ ⇐

۷۳| عدد مورد نظر دو رقمی است، پس دو خانه در نظر می‌گیریم. در خانهٔ سمت راست (یکان) فقط می‌توانیم از اعداد ۱ و یا ۷ استفاده کنیم (*چون عدد باید فرد باشه.*) ولی در خانهٔ سمت چپ از هرکدام از پنج عدد داده‌شده می‌توانیم استفاده کنیم (*تکرار مجاز است.*):

۱، ۲، ۴، ۶، ۷ — ۱، ۷

[۵] [۲]

تعداد اعداد مطلوب: ۱۰ = ۵ × ۲ ⇐

۷۴| سه خانه در نظر می‌گیریم. چون عدد مورد نظر باید بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد، در خانهٔ سمت چپ (صدگان) می‌توانیم فقط از اعداد ۳، ۴ یا ۵ استفاده کنیم (۳ حالت) و چون تکرار غیرمجاز است، خانه‌های بعدی به پنج حالت و چهار حالت پُر می‌شوند.

۳، ۴، ۵ — ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ~~۵~~ — ۰، ۱، ۲، ۳، ~~۴~~

[۳] [۵] [۴]

تعداد اعداد مورد نظر: ۶۰ = ۴ × ۵ × ۳ ⇐

۷۵| دقت کنید که عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ رقم سمت چپش نمی‌تواند ۱ یا صفر باشد ولی می‌تواند ۲ یا بیش‌تر باشد (*چون در این حالت‌ها اعداد بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ ساخته میشن.*) ولی خانه‌های (۲)، (۳) و (۴) هیچ محدودیتی ندارند و هرکدام می‌توانند به ۵ طریق پر شوند (*همهٔ رقم‌ها میتونن استفاده بشن.*) لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

تعداد اعداد مورد نظر: [۴] [۵] [۵] [۵] ⇐ ۵۰۰ = ۵ × ۵ × ۵ × ۴

۷۶| آ) می‌دانیم عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد. پس خانهٔ سمت راست به دو طریق یعنی با ۰ یا ۵ پُر می‌شود و چون تکرار ارقام مجاز است خانهٔ سمت چپ به ۵ طریق پُر می‌شود، زیرا صفر نمی‌تواند در آن قرار گیرد (*اعداد با صفر شروع نمی‌شوند.*) و درنهایت خانهٔ وسط به ۶ حالت پُر می‌شود، چون می‌توانیم از تمام ارقام برای پُرکردنش استفاده کنیم:

تعداد اعداد مطلوب:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵ — ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ — ۰، ۵

[۵] [۶] [۲] ⇐ ۶۰ = ۶ × ۵ × ۲

شروع

ب) عدد مورد نظر باید زوج باشد پس رقم یکان (سمت راست) می‌تواند با یکی از اعداد ۰، ۲ یا ۴ پر شود که سه حالت می‌باشد و چون تکرار مجاز است، خانهٔ سمت چپ به ۵ حالت پُر می‌شود، چون صفر نمی‌تواند در آن قرار گیرد؛ پس داریم:

تعداد اعداد مطلوب:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵ — ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ — ۰، ۲، ۴

[۵] [۶] [۳] ⇐ ۹۰ = ۶ × ۵ × ۳

شروع

۷۷| آ) می‌دانیم عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد و چون تکرار ارقام مجاز نیست، باید هر یک از این حالت‌ها را جداگانه بررسی کنیم:

حالت اول **رقم یکان صفر باشد:** در این حالت خانهٔ سمت راست فقط عدد صفر می‌تواند باشد، پس به یک حالت پر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست، خانهٔ سمت چپ به ۵ طریق و خانهٔ وسط به ۴ طریق پُر می‌شود (*از هر رقم فقط یک بار می‌توان استفاده کرد.*).

۱، ۲، ۳، ۴، ۵ — ۱، ۲، ۳، ۴، ~~۵~~ — رقم صفر

[۵] [۴] [۱] ⇐ ۲۰ = ۴ × ۵ × ۱

شروع

حالت دوم **رقم یکان ۵ باشد:** در این حالت خانهٔ سمت راست فقط با عدد ۵ پر می‌شود (۱ حالت) و چون تکرار غیرمجاز است خانهٔ سمت چپ به ۴ حالت پر می‌شود (*چون ۵ و صفر نمیتونن در این خونه قرار بگیرن.*) و خانهٔ وسط به ۴ طریق می‌تواند پر شود (چون از بین ۶ عدد داده‌شده دو عدد در خانهٔ سمت چپ و راست قرار گرفته‌اند.) پس داریم:

۱، ۲، ۳، ۴ — ۰، ۱، ۲، ۳، ~~۴~~ — رقم ۵

[۴] [۴] [۱] ⇐ ۱۶ = ۴ × ۴ × ۱

شروع

طبق اصل جمع، تعداد کل اعداد مورد نظر عبارت است از: ۳۶ = ۱۶ + ۲۰