



مجموعه ها



وَ هُوَ الَّذِي جَعَلَ لَكُمُ النُّجُومَ لِتَهْتَدُوا بِهَا فِي ظُلُمَاتِ الْبَرِّ وَالْبَحْرِ
او (خداوند) کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی های خشکی و دریا، به وسیله آنها راه یابید...
(سوره انعام، آیه ۹۷)



منظومه شمسی مجموعه ای است شامل ستاره خورشید و سیاره هایی که روی مدارهای خاصی در حال چرخش هستند. البته ستاره هایی با بزرگی چند هزار برابر خورشید هم وجود دارند که اگر این ستاره ها به اندازه خورشید به زمین نزدیک بودند، تمام آسمان ما را می پوشانند.

فعالیت

در شکل روبه‌رو شماره‌های طبیعی عدد 6^0 را نوشته‌ایم و بین آنها شماره‌های اول را مشخص کرده‌ایم. شما هم شماره‌های 6^0 را که اول نیستند، در یک منحنی بسته قرار دهید.

اگر شماره‌های طبیعی و اول عدد 6^0 یعنی ۲، ۳ و ۵ را در داخل دو آکلاد قرار دهیم و آن را با حروفی چون A یا B یا ... نام‌گذاری کنیم و بنویسیم $A = \{2, 3, 5\}$ ؛ در این صورت یک **مجموعه** تشکیل داده‌ایم و به هریک از عددهای ۲، ۳ و ۵ یک **عضو** مجموعه A می‌گوییم؛ پس مجموعه A دارای ۳ عضو است.

✱ شما شماره‌های مرکب عدد 6^0 را به صورت یک مجموعه بنویسید و آن را B بنامید.

✱ مجموعه شامل شماره‌های عدد 6^0 که نه اول باشند، و نه مرکب، چند عضو دارد؟ این مجموعه را نیز C بنامید و آن را نمایش دهید.

✱ مجموعه D شامل همه شماره‌های دورقمی 6^0 را تشکیل دهید؛ این مجموعه چند عضو دارد؟

از رضا و احمد خواسته شد تا مجموعه شامل ۳ شماره‌ی زوج عدد 6^0 را تشکیل دهند. احمد نوشت: $\{4, 6, 10\}$ و رضا نوشت: $\{6, 10, 12\}$ به نظر شما چرا جواب‌های آنها با هم فرق دارد؟ نتیجه: در ریاضیات عبارت‌هایی شبیه این عبارت، که مشخص‌کننده یک مجموعه معین و یکتا نباشد، مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند.

در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه، مهم نیست و با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود؛ همچنین با تکرار عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود؛ بنابراین به جای $\{3, 3, 4\}$ می‌نویسیم $\{3, 4\}$.

معرفی مجموعه

ما، در زندگی روزمره در صحبت‌ها و نوشته‌هایمان از واژه‌هایی مانند دسته، گروه و مجموعه استفاده می‌کنیم؛ برای مثال وقتی می‌گوییم «گروهی از ورزشکاران وارد ورزشگاه شدند»، نام ورزشکاران را مشخص نکرده‌ایم، در حالی که ما از مجموعه در ریاضی برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای **مشخص** (عضویت این اشیاء در مجموعه کاملاً معین باشد) و **متمايز** (غیر تکراری) استفاده می‌کنیم.

فعالیت

۱- کدام یک از عبارتهای زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ مجموعه مورد نظر را نمایش دهید.
الف) عددهای طبیعی و یک رقمی (ب) چهار شاعر ایرانی (ج) دو عدد اول کوچکتر از ۱۲

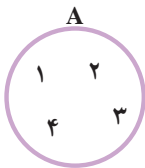
۲- با توجه به شرط متمایز بودن عضوهای یک مجموعه، جاهای خالی را پر کنید:

الف) به جای $A = \{1, 2, 1, 4, 5\}$ باید بنویسیم $A = \{ _, _, _, _ \}$

ب) به دلیل تکراری بودن عدد $B = \{5, 6, 5, 7\}$ در B آن را به صورت _____

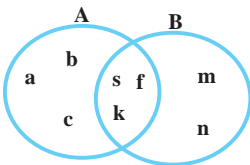
می نویسیم.

اگر مجموعه A را به صورت $A = \{a, b, 5, 7\}$ در نظر بگیریم، برای نشان دادن اینکه a عضوی از مجموعه A است، می نویسیم $a \in A$ و می خوانیم « a عضو A است» و چون عدد ۴ عضو A نیست، می نویسیم $4 \notin A$ و می خوانیم «۴ عضو A نیست».



نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون: مجموعه را می توان با استفاده از منحنی‌ها یا خط‌های شکسته بسته نمایش داد؛ به عنوان مثال، نمایش مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ با استفاده از نمودار ون به صورت مقابل است.

فعالیت



۱- با توجه به نمودار ون، که برای دو مجموعه A و B رسم شده است، مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان مشخص کنید.

۲- دو مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8\}$ را در نظر بگیرید:

دو مجموعه را با یک نمودار ون نمایش دهید. کدام عددها هم در منحنی بسته مربوط به A و

هم در منحنی بسته B وجود دارد؟

۳- مجموعه عددهای دو رقمی و زوج اول را بنویسید و آن را E بنامید. این مجموعه چند

عضو دارد؟

«اگر در مجموعه‌ای عضو وجود نداشته باشد، آن را مجموعه تهی می‌نامیم و با نماد \emptyset یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.» توجه شود که این مجموعه با مجموعه $\{0\}$ یا $\{ \}$ که هر کدام دارای یک عضو هستند، یکی نیست.

- ۴- کدام یک از عبارات‌های زیر، مجموعه تهی را مشخص می‌کند؟
 الف) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶ ب) عددهای صحیح بین ۱- و ۱
 ج) عددهای اول و زوج د) عددهای طبیعی یک رقمی و مضرب ۳ که اول باشد.

کار در کلاس

۱- سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان دهنده مجموعه تهی باشد؛ سپس عبارات‌های خود را با نوشته‌های هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

۲- سه عبارت بنویسید که هر کدام مشخص‌کننده مجموعه‌ای فقط با یک عضو باشد.

۳- عبارتهایی که مجموعه‌ای را مشخص می‌کند، با علامت \checkmark و بقیه را با علامت \times مشخص کنید (با ذکر دلیل).

- الف) چهار عدد فرد متوالی ب) سه عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲
 ج) عددهای اول کوچک‌تر از ۲۰ د) سه شهر ایران ه) شماره‌های عدد ۲۴
 و) ۵ عدد بزرگ ز) عددهای طبیعی بین ۲ و ۳
 ۴- مانند نمونه کامل کنید:

$A = \{ \text{ی، ...، پ، ب، الف} \}$ مجموعه حروف الفبای فارسی

$B = \{ ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ \}$

C : مجموعه حروف a و b و عدد ۳ مجموعه عددهای صحیح بین ۲- و ۳-

$D = \{ ۵ \}$ مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۴

$E = \{ \}$ مجموعه عددهای اول یک رقمی

$F = \{ ۲, ۴, ۶, ۸ \}$ مجموعه مضرب‌های اول عدد ۵

G : مجموعه عددهای طبیعی بین ۲ و ۱۰ $\{ ۳, a, b \}$

$H = \{ ۲, ۳, ۵, ۷ \}$ $\{ ۶, ۴, ۲, ۸ \}$

۵- کدام یک از عبارات‌های زیر مشخص‌کننده یک مجموعه است؟ با نمودار و نشان دهید :

الف) عددهای صحیح مثبت و کمتر از 10

ب) شماره‌های اول عدد 19

ج) عددهایی که شش وجه یک تاس معمولی را مشخص می‌کند.

د) جواب‌های معادله $2x+8=1$

هـ) چهار میوه خوشمزه

و) عددهای صحیح منفی و بزرگ‌تر از -8

تمرین

۱- متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد

عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید :

الف) $A = \{1, 8, 27, 64, 125\}$

ب) $C = \{10\}$

ج) عددهای طبیعی مضرب 5 و کوچک‌تر از 100

د) عددهای طبیعی بزرگ‌تر از 4 و کوچک‌تر از 5

هـ) عددهای صحیح منفی که بین 4 و 7 قرار دارد.

و) عددهای اول دورقمی که مضرب 7 باشد.

۲- جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) عبارت « 5 عدد طبیعی که بین 1 و 20 قرار داشته باشد»، یک مجموعه را مشخص _____ .

ب) مجموعه $\{2, 3, 4, \dots, 9\}$ دارای _____ عضو است.

ج) مجموعه $\{0, \emptyset\}$ دارای _____ عضو است.

د) با توجه به مجموعه $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ ؛ داریم: 5 عضو A است یا با نماد ریاضی، _____

و 12 عضو A نیست یا با نماد ریاضی، _____ .

۳- سه مجموعه متفاوت بنویسید که عدد 2 عضو آنها باشد.

دو مجموعه برابر

فعالیت

| | | |
|----|--|----|
| ۱۰ | | ۱۲ |
| | | |
| -۴ | | -۲ |

۱- جدول عددهای صحیح روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطر آن برابر ۱۲ شود؛ سپس مجموعه عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید.

اکنون مجموعه B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد. هریک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟ آیا هر عضو A در مجموعه B است؟ آیا هر عضو B در مجموعه A است؟

همان‌طور که ملاحظه کردید، عضوهای دو مجموعه A و B یکسان‌اند و هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A است؛ در این صورت دو مجموعه A و B برابراند و می‌نویسیم $A = B$.

۲- مجموعه A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا A را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده و با A برابر است:

(الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰

(ب) مجموعه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱

(ج) مجموعه سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها با ۹ برابر است.

همان‌طور که دیدید، مجموعه $\{۸, ۹, ۱۰\}$ با مجموعه $\{۷, ۸, ۹\}$ برابر نیست؛ زیرا همه عضوهایشان یکسان نیست.

اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد، در این صورت مجموعه A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$.

کار در کلاس

۱- جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشند:

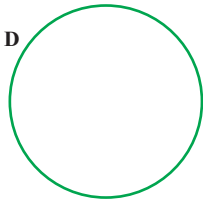
$$\left\{ ۵, \dots, \frac{۲}{۵}, ۴, \frac{۹}{۳} \right\} = \left\{ \frac{۲}{۵}, ۳, \frac{-\sqrt{۴۴}}{(-۲)^۲}, \dots, \sqrt{۲۵} \right\} \quad \text{الف)}$$

$$\left\{ 7, \frac{4}{10}, \sqrt{\frac{4}{9}}, -\frac{1}{2}, \dots, 0/625 \right\} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, -0/5, \frac{5}{8}, \dots, -2 \right\} \quad (\text{ب})$$

۲- دو مجموعه به نام‌های A و B مانند سؤال بالا طرح کنید. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

زیر مجموعه

فعالیت



مجموعه عددهای جدول فعالیت قبل را D بنامید؛ سپس عضوهای

مجموعه D را در نمودار ون روبه‌رو بنویسید:

در نمودار بالا، عضوهایی را که بر ۳ بخش پذیر است، با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید.

مجموعه B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از D نیز هست؟

در مجموعه D، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید؛ آیا $D = C$ ؟

همان‌طور که دیدید، عضوهای مجموعه B همگی در D هست؛ یعنی هر عضو B، عضوی از

D است؛ در این صورت مجموعه B **زیر مجموعه** D است و می‌نویسیم $B \subseteq D$.

آیا مجموعه C زیر مجموعه D است؟

با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیر مجموعه خودش

هست؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم: $A \subseteq A$.

اکنون زیر مجموعه‌ای از D را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشد؛ نام دیگر این

مجموعه چیست؟

آیا عبارت $\{1, 4, -6, 2\} \subseteq D$ درست است؟ چرا؟

اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیر مجموعه A نیست و می‌نویسیم $B \not\subseteq A$.

آیا در مجموعه تهی عضوی هست که در مجموعه دلخواهی مانند A نباشد؟

مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است؛ یعنی: $\emptyset \subseteq A$.

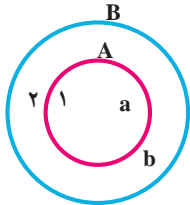
مثال : دلیل درستی رابطه‌های زیر مشخص شده است.

الف) $\{a,b,d\} \not\subseteq \{a,b,c,e\}$ ؛ زیرا در مجموعه سمت چپ، d هست که در مجموعه سمت راست

نیست.

ب) $\{-1, 2, 0, 1, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 0\}$ ؛ زیرا هر عضو مجموعه سمت چپ، عضوی از مجموعه

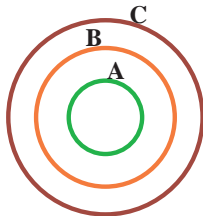
سمت راست است.



$$A \subseteq B, B \not\subseteq A$$

ج) با توجه به شکل مقابل $A \subseteq B$ درست است؛ زیرا همه عضوهای A در B قرار دارند و $B \not\subseteq A$ درست است؛ زیرا عضوی در B مانند 2 می‌توان یافت که در A وجود ندارد.

کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر

را مشخص کنید :

$$C \not\subseteq A, B \subseteq A, A \not\subseteq C$$

$$A \subseteq B, B \subseteq C, \emptyset \subseteq A$$

۲- مجموعه‌های A, B, C را در نظر بگیرید؛ سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را

مشخص کنید (با ذکر دلیل):

$$A = \{1, 3, 6, 4\}, B = \{5, 1, 3\}, C = \{2, 5, 1, 3, 6\}$$

$$B \not\subseteq A, 3 \subseteq B, A \subseteq B, B \subseteq C, A \not\subseteq C, 2 \in A$$

$$\{1, 4\} \in A, 6 \notin A, \{5, 6\} \subseteq C, 5 \in C, \emptyset \subseteq A$$

۳- همه زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ در زیر نوشته شده است :

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

مانند نمونه، تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید :

الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۲. ب) $\{a, b, c, d\}$

نمایش مجموعه‌های اعداد

در سال‌های گذشته با عددهای طبیعی آشنا شده‌اید؛ از این عددها برای شمارش استفاده می‌کنیم.

مجموعه عددهای طبیعی را با \mathbb{N} نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

تاکنون نمایش مجموعه‌ها را با عضوها و نمودار ون آموخته‌اید. یک روش دیگر برای نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است؛ برای مثال: مجموعه عددهای طبیعی زوج $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم عضوهای این مجموعه خاصیت مشترکی دارد؛ یعنی همگی آنها مضرب ۲ است و از قبل می‌دانیم که هر عدد زوج طبیعی به صورت $2k$ قابل نمایش است که در آن $k \in \mathbb{N}$ ، پس می‌نویسیم:

$$E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

و می‌خوانیم E برابر است با مجموعه عددهایی به شکل $2k$ به طوری که k متعلق به مجموعه عددهای طبیعی است. در مجموعه E علامت « \mid » خوانده می‌شود: «به طوری که». در زیر چند مجموعه را با نمادهای ریاضی نوشته‌ایم:

الف) مجموعه عددهای طبیعی فرد: $O = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

ب) $A = \{7, 8, 9, 10\}$ یا $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 10\}$ یا $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x < 11\}$

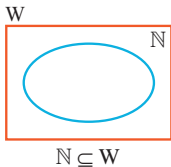
ج) زیرمجموعه‌ای از \mathbb{N} که عضوهای آن همگی بر ۳ بخش پذیر است: $\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$

مثال: مجموعه $A = \{5n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ را با عضوهایش مشخص کنید:

برای این منظور جدول زیر را کامل کنید و در هر مرحله به جای n یک عدد طبیعی در $5n + 3$ قرار دهید.

| n | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ... |
|----------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---|---|---|-----|
| $5n + 3$ | $\frac{5(1)+3}{8}$ | $\frac{5(2)+3}{13}$ | $\frac{5(3)+3}{18}$ | $\frac{5(4)+3}{23}$ | | | | ... |

بنابراین داریم: $A = \{8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, \dots\}$



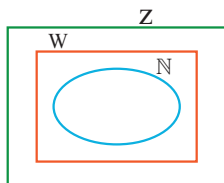
مجموعه عددهای حسابی را با W نمایش می‌دهند: $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه عددهای حسابی را می‌توان با نمادهای ریاضی به صورت

$$W = \{k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

نوشت.

هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است؛ یعنی $\mathbb{N} \subseteq W$



مجموعه عددهای صحیح را با \mathbb{Z} نمایش می‌دهیم:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

همه عددهای طبیعی و حسابی، عضو \mathbb{Z} هم هستند؛ پس: $\mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z}$

کار در کلاس

مجموعه‌های زیر را با اعضاها مشخص کنید :

الف) مجموعه عددهای صحیح فرد (ب) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x < 5\}$

ج) $B = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

مجموعه عددهای گویا را با Q نمایش می‌دهیم. چون اولین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، نمی‌توان این مجموعه را با اعضاها مشخص کرد؛ به همین دلیل مجموعه عددهای

گویا را با نمادهای ریاضی تعریف می‌کنیم: $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

توجه کنید که هر عدد صحیح، عددی گویا است؛ یعنی برای هر عدد صحیح a داریم: $a = \frac{a}{1}$

در نتیجه $\mathbb{Z} \subseteq Q$.

تمرین

۱- مجموعه $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم

برابر است؟

$B = \{x \mid x \in A, x^2 \leq 2\}$, $C = \{x \mid x \in A, -1 \leq x \leq 1\}$, $D = \{x \mid x \in A, x^2 = 1\}$

۲- سه مجموعه مانند A , B و C بنویسید؛ به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه

گرفت $A \subseteq C$ ؟

۳- تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید :

الف) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x + 1 = 3\}$ (ب) $B = \{2x \mid x = 0, 2, 3\}$

۴- نمودار روبه‌رو، وضعیت مجموعه‌های Q, W, \mathbb{N} و \mathbb{Z}

را نسبت به هم نشان می‌دهد؛ آنها را نام‌گذاری و با علامت \subseteq باهم

مقایسه کنید.

۵- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را با ذکر دلیل مشخص

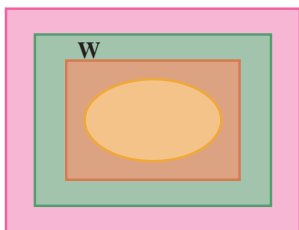
کنید :

(ب) هر عدد حسابی عددی گویاست.

الف) هر عدد گویا عددی حسابی است.

(د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح‌اند.

ج) هر عدد صحیح عددی گویاست.



فعالیت

۱- در کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال هستند. سامان، احسان، فرشید و حسین فقط در تیم والیبال و محمد، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال بازی می‌کنند. الف) اگر مجموعه دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با V و فوتبال را با F نشان دهیم، این مجموعه‌ها را با نمودار ون نمایش دهید و سپس با عضوهایشان بنویسید.

ب) مجموعه دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، بنویسید.

ج) مجموعه دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند، بنویسید.

۲- دو مجموعه $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید و

مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان تشکیل دهید:

الف) $A = \{ \quad \}$ ب) $B = \{ \quad \}$

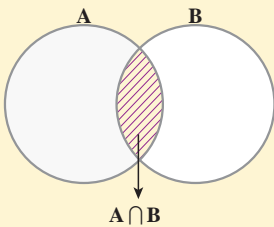
ج) $\{ \quad \} =$ مجموعه عددهایی که در هر دو مجموعه A و B هست

(این مجموعه را اشتراک A و B می‌نامیم و با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم).

د) $\{ \quad \} =$ مجموعه عددهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B هست

(این مجموعه را اجتماع A و B می‌نامیم و با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم).

اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه A و B ، مجموعه‌ای شامل

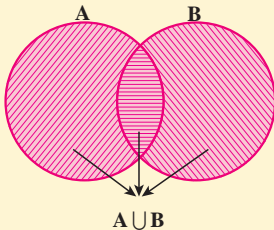


همه عضوهای است که هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B است. این مجموعه را با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم. در نمودار روبه‌رو قسمت هاشور خورده اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد.

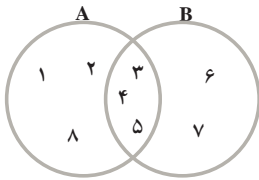
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه A و B ،

مجموعه‌ای است شامل همه عضوهای که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشد. این مجموعه را با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم. در نمودار، قسمت هاشور خورده، اجتماع دو مجموعه را نشان می‌دهد.



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$



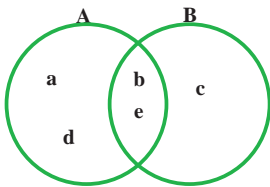
مثال: با توجه به نمودار زیر ابتدا مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان می‌نویسیم و سپس $A \cap B$ و $A \cup B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\} \text{ و } B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5\} \text{ , } A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

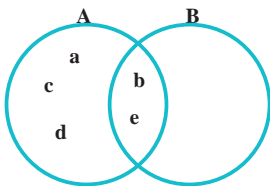
فعالیت

۱- دو مجموعه $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ و $A \cap B = \{b, e\}$ را در نظر بگیرید. از دانش‌آموزان یک کلاس خواسته شده است که با توجه به این دو مجموعه، مجموعه‌های A و B را با نمودار ون نمایش دهند. پاسخ چهار دانش‌آموز این کلاس را در زیر می‌بینید:

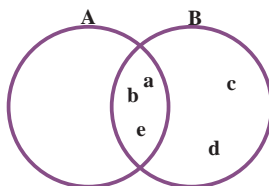


پاسخ حمیده

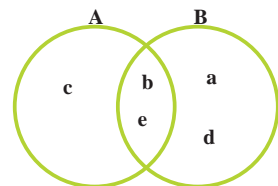
الف) دربارهٔ درستی یا نادرستی پاسخ این دانش‌آموزان بحث کنید و برای درستی یا نادرستی آنها دلیل بیاورید.



پاسخ ریحانه



پاسخ زهرا



پاسخ حنا

ب) آیا شما هم می‌توانید جواب درست دیگری به این سؤال بدهید؟ پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

۲- با توجه به اولین فعالیت این درس و ورزشکاران دو تیم والیبال و فوتبال مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد، ولی عضو تیم فوتبال نباشد (فقط در تیم والیبال بازی کند). این مجموعه را «V منهای F» می‌نامیم و با نماد $V - F$ نمایش می‌دهیم:

$$V - F = \{ \quad \quad \quad \} \quad F - V = \{ \quad \quad \quad \}$$

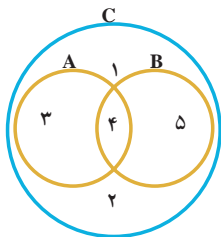
تفاضل دو مجموعه: مجموعه $A - B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که عضو مجموعه A هستند؛ ولی عضو مجموعه B نیستند. در شکل زیر مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ هاشور خورده است:

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$



مثال: اگر $A = \{a, b, c, d, e, k\}$ و $B = \{c, d, k, f, s, t\}$ در این صورت:
 $A - B = \{a, b, e\}$ و $B - A = \{f, s, t\}$

کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار زیر کدام عبارت، درست و کدام نادرست است؟

- الف) $A \subseteq C$ ب) $B \subseteq C$ ج) $C \subseteq (A \cup B)$
 د) $(A \cup B) \subseteq C$ ه) $2 \in (A \cup B)$ و) $4 \notin (A \cap B)$
 ز) $A \cup B = A$ ح) $5 \in (A \cup B)$ ط) $4 \in (A \cup B)$

۲- مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ را A و مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۸ را B بنامید. ابتدا A و B را تشکیل و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید:

- الف) مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن، شمارندهٔ ۱۸ باشد؛ ولی شمارندهٔ ۱۲ نباشد.
 ب) مجموعه‌ای تشکیل دهید که عضوهای آن، هم شمارندهٔ ۱۲ و هم شمارندهٔ ۱۸ باشد.
 ۳- مجموعه‌های $(\mathbb{Z} - \mathbb{N})$ ، $(\mathbb{N} - \mathbb{Z})$ و $(\mathbb{W} - \mathbb{N})$ را تشکیل دهید.

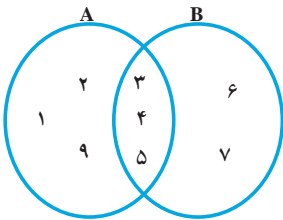
قرار داد: تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم؛ به عنوان مثال، اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد، می‌نویسیم $n(A) = k$.

مثلاً اگر $A = \{2, 4, 6, 7\}$ در این صورت $n(A) = 4$.

۱- مجموعه‌های $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ و $B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$ و $C = \{1, 7, 10, 11\}$ را در نظر بگیرید؛ سپس هر یک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید :

- الف) $A \cup B$ ب) $B \cup C$ ج) $A \cup C$ د) $A \cap B$
 هـ) $A - B$ و) $C - B$ ز) $(A - C) \cup (B - C)$ ح) $(A \cup B) - C$
 ط) $A \cap A$ ی) $A \cap \emptyset$ ک) $B \cup B$ ل) $C \cup \emptyset$

۲- با توجه به نمودار زیر، عبارتهای درست را با \checkmark و گزاره‌های نادرست را با \times مشخص کنید :



الف) $B - A = \{6, 7\}$ (ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

ج) $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6\}$

د) $n(A \cup B) = 8$

هـ) $A - B = B - A$ (و) $n(A - B) = n(B - A)$

۳- کلمات و مجموعه‌های داده شده زیر را در جاهای خالی قرار دهید :

۱) B ۲) A ۳) اجتماع

۴) زیرمجموعه $(A \cup B)$ (۵)

الف) اشتراک دو مجموعه، زیر مجموعه _____ همان دو مجموعه است.

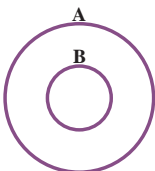
ب) هر یک از دو مجموعه A و B زیرمجموعه _____ است.

ج) اشتراک دو مجموعه A و B _____ هر یک از دو مجموعه A و B است.

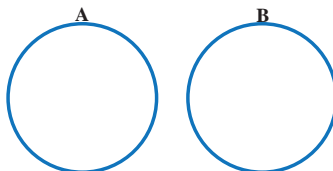
د) مجموعه $A - B$ زیرمجموعه مجموعه _____ است.

هـ) اجتماع دو مجموعه $(B - A)$ و $(A \cap B)$ با مجموعه _____ مساوی است.

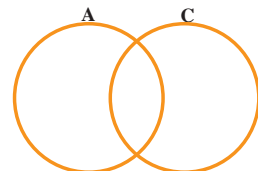
۴- در هر یک از شکل‌های زیر مجموعه مورد نظر را هاشور بزنید.



$A \cap B$



$B - A$



$(A - C) \cup C$

در سال گذشته برای محاسبهٔ احتمال هر پیشامد از دستور زیر استفاده کردیم:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

اکنون با توجه به آشنایی و شناخت شما نسبت به مجموعه‌ها و نمادگذاری‌ها، تا حدودی راحت‌تر می‌توان این فرمول را نوشت و به کار برد.

اگر مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های ممکن را S ، مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های مطلوب را A و احتمال رخ دادن پیشامد A را با نماد $P(A)$ نشان دهیم، دستور بالا به صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ نوشته می‌شود.

یادآوری

مثال: اگر تاسی را بیندازیم، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به دست آورید:



(الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد.

(ب) عدد رو شده اول باشد.

(ج) عدد رو شده از ۶ بزرگ‌تر باشد.

(د) عدد رو شده از ۷ کمتر باشد.

حل: (الف) پیشامد مطلوب یعنی رو شدن مضرب ۳ را A می‌نامیم؛ در این صورت داریم:

$$A = \{۳, ۶\}, S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}; n(A) = ۲, n(S) = ۶$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

(ب) $B = \{۲, ۳, ۵\}; n(B) = ۳$; پیشامد رو شدن عدد اول

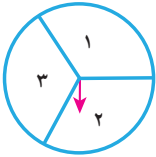
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

(ج) $C = \emptyset \rightarrow n(\emptyset) = ۰$; پیشامد رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۶

$$P(C) = P(\emptyset) = \frac{۰}{۶} = ۰$$

(د) $D = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} = S$; پیشامد رو شدن عدد کمتر از ۷

$$P(D) = P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = \frac{۶}{۶} = ۱$$



با توجه به چرخندهٔ مقابل، همهٔ حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعه S بنامید. S را با عضوهایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید:

$$A = \{3, 1\} \text{ (عقربه روی ناحیه ۱ یا ۳ بایستد) یا (عقربه روی عدد فرد بایستد)}$$

$$B = \{1, 2\} \text{ _____}$$

$$C = \{2, 3\} \text{ _____} \quad D = \{2\} \text{ _____}$$

پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

ب) هریک از زیرمجموعه‌های S را پیشامد تصادفی می‌نامیم. احتمال رخداد هریک از این پیشامدها را به دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها **هم‌شانس‌اند**؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

ج) همهٔ زیرمجموعه‌های S را تشکیل دهید.

کار در کلاس

۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم.



الف) مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ است. پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که «عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد». مجموعهٔ A را تشکیل دهید و احتمال رخداد پیشامد آن را به دست آورید.

ب) مجموعه یا پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخ دادن آن پیشامد، $\frac{4}{10}$ باشد.

ج) اگر B پیشامد خارج شدن عدد اول و C پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های B و C را تشکیل دهید و احتمال رخداد هریک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای B و C هم‌شانس‌اند؟ چرا؟

- ۱- اگر تاسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد :
 (الف) عدد رو شده زوج باشد. (ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ تر باشد.
 (ج) عدد رو شده زوج و اول باشد. (د) عدد رو شده از ۳ کمتر باشد.
- ۲- اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اولاً مجموعه همه حالت‌های ممکن را تشکیل دهید
 (هر عضو این مجموعه را به‌طور مثال به‌صورت (د،د،پ) نمایش دهید). ثانیاً چقدر احتمال دارد این
 خانواده دارای دو دختر (یعنی دقیقاً دو دختر) باشد؟
- ۳- در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی
 از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد :
 (الف) این مهره آبی باشد. (ب) این مهره سبز نباشد.
 (ج) این مهره قرمز یا سبز باشد.
- ۴- اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد :
 (اگر مجموعه همه حالت‌های ممکن را S بنامیم، $n(s) = 36$)
 (الف) هر دو بار، عدد اول رو شود. (ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد.
 (ج) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشد. (د) مجموع دو عدد، ۷ باشد.

حواله‌ها

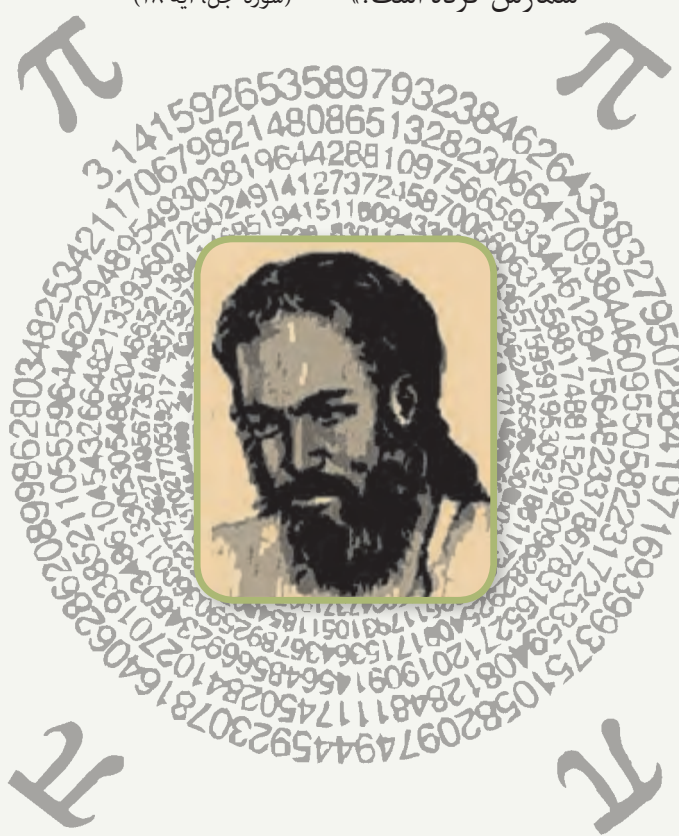
در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از مجموعه به‌عنوان گروهی (یا دسته‌ای) از اشیا نام برده شده است. غافل از آنکه اگر بگوییم مجموعه گروهی از اشیا است، باید بگوییم گروه چیست؟! آیا می‌توانیم گروه را تعریف کنیم؟
 در واقع چاره‌ای نیست جز آنکه مانند سیمورلیپ‌شوتز (ریاضی‌دان معاصر) بگوییم: در همه شاخه‌های ریاضی مجموعه یک مفهوم بنیادی است. به عبارت دیگر مجموعه جزء نخستین تعریف نشده‌هاست، مانند مفاهیمی چون نقطه و خط در هندسه، که برای آنها تعریف دقیقی نداریم ولی آنها را با اثر خود می‌شناسیم.



عددهای حقیقی



«... وَ أَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَ أَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا»
 «... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را به عدد
 شمارش کرده است.» (سوره جن، آیه ۲۸)



غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دوره اسلامی و از بزرگ‌ترین
 مفاخر تاریخ ایران به شمار می‌رود. کاشانی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط
 چندضلعی‌های محاطی و محیطی توانست عدد π که عددی **حقیقی** و **گنگ** است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار
 محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در
 ابتدای رساله محیطیه خود به زبان ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند:
 «به نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است.»

۱- در فصل گذشته با نمایش‌های مختلف مجموعه‌های اعداد آشنا شدید. عبارت‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

| ردیف | عبارت کلامی | زبان نمادین | محور |
|------|-------------------------------|---|------|
| ۱ | عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳ | $\{x \in \mathbb{N} x \geq 3\}$ $\{3, 4, 5, \dots\}$ | |
| ۲ | عددهای حسابی | $\{x \in \mathbb{W} x \leq 2\}$ | |
| ۳ | عددهای صحیح بین -۳ و ۲ | $\{x \in \mathbb{Z} \dots\}$ | |
| ۴ | عددهای صحیح بزرگ‌تر از -۱ | $\{ \dots \}$ | |

نامساوی $x \geq 3$ برای کدام یک از عددهای زیر درست است؟

۱, ۲, ۳, ۴, ۵

در مورد محدودیت‌ها و مزایا و معایب هر کدام از روش‌های نمایش مجموعه در کلاس گفت‌وگو کنید.

۲- می‌خواهیم بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ چند کسر بنویسیم. روش‌های مختلفی را که چهار دانش‌آموز نوشته‌اند، بررسی و کامل کنید؛ راه حل هر کدام را توضیح دهید.

روش بهار

$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{6} < ? < \frac{3}{6}$$

$$\frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12}$$

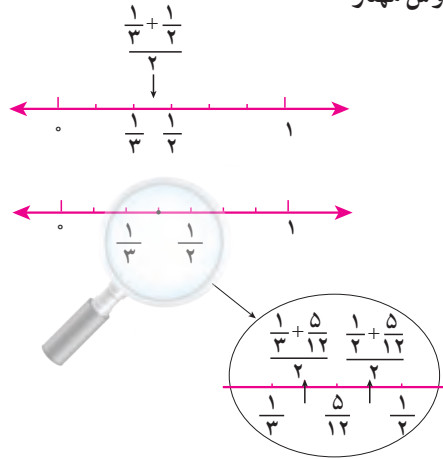
$$\frac{6}{18} < \frac{7}{18}, \frac{8}{18} < \frac{9}{18}$$

روش مریم

$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$



الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان به هر تعداد، کسر پیدا کرد.

ب) آیا مجموعه عددهای گویا را می‌توان با نوشتن عضوها نشان داد؟ چرا؟

ج) آیا می‌توان مجموعه عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟

د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid \right\}$$

کار در کلاس

۱- بین $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

۲- بین $-\frac{1}{2}$ و -1 دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

فعالیت

۱- می‌خواهیم کسرهای $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ و $\frac{7}{8}$ و $\frac{5}{9}$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم.

روش‌های مختلفی را که دانش‌آموزان به کار برده‌اند، با هم مقایسه کنید؛ هر کدام را توضیح دهید و در

صورت لزوم کامل کنید.