

توان‌های گویا و عبارات‌های جبری

فصل ۳

درس ۱

ریشه و توان

صفحه ۴۸ تا ۵۳ کتاب درسی

درس‌نامه ۱ را در صفحه ۷۱ ببینید.

- درستی یا نادرستی عبارات‌های زیر را مشخص کنید.
- ۲۳۹- هر عدد مثبت دارای دو ریشه زوج است که قرینه یکدیگرند. ۲۴۰- چون $\sqrt{16} = \pm 4$ ، پس ± 4 ریشه‌های دوم ۱۶ هستند.
- ۲۴۱- اگر $\sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a}$ باشد، آن‌گاه لزوماً $0 < a < 1$ است. ۲۴۲- اگر $0 < a < 1$ باشد، آن‌گاه $\sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a}$.
- ۲۴۳- اگر a عددی منفی و $\sqrt[3]{a} > a$ باشد، آن‌گاه $-1 < a < 0$ است. ۲۴۴- ریشه n ام عدد صفر برابر صفر است.
- ۲۴۵- ریشه چهارم عدد ۱ برابر ۱ است. ۲۴۶- اعداد منفی ریشه زوج ندارند.
- جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
- ۲۴۷- هر عدد مثبت دارای ریشه ششم است که یکدیگرند.
- ۲۴۸- هر عدد مثبت یا منفی دارای ریشه پنجم است. اگر عدد مثبت باشد ریشه پنجم آن و اگر عدد منفی باشد، ریشه پنجم آن است.
- ۲۴۹- اگر $a > 1$ ، آن‌گاه با بزرگ شدن فرجه، عدد حاصل می‌شود.
- ۲۵۰- اگر a عددی مثبت و $\sqrt[3]{a} > a$ باشد، آن‌گاه
- ۲۵۱- اگر a عددی منفی و $\sqrt[3]{a} > a$ باشد، آن‌گاه
- ۲۵۲- اعداد ۲ و ریشه‌های ششم عدد می‌باشند.
- ۲۵۳- اگر $a = \sqrt[3]{64}$ ، در این صورت حاصل $a^2 + \sqrt{a}$ برابر است با
- ۲۵۴- حاصل $\sqrt[3]{0.0016}$ برابر است با
- نظیر هر تساوی توانی، یک تساوی رادیکالی و نظیر هر تساوی رادیکالی، یک تساوی توانی بنویسید.

$$256 - 256 = 0 / 36 = (0/6)^2$$

$$255 - 125 = (-5)^3$$

$$258 - 13 = \sqrt{169}$$

$$257 - 729 = 3^6$$

$$260 - 2\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{-72}$$

$$259 - 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$$

(مشابه تمرین و کار در کلاس کتاب درسی)

- در هر مورد، مشخص کنید هر ریشه، بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

$$262 - 57 = \sqrt{57}$$

$$261 - 13 = \sqrt{13}$$

$$263 - 19 = \sqrt[3]{-19}$$

$$263 - 30 = -\sqrt{30}$$

$$266 - 145 = \sqrt[3]{145}$$

$$265 - 100 = \sqrt[3]{100}$$

$$268 - 500 = \sqrt[5]{-500}$$

$$267 - 201 = \sqrt[5]{201}$$

- در هر مورد مقادیر خواسته‌شده را در صورت وجود به دست آورید.

$$270 - 625 = \text{ریشه‌های چهارم } 625$$

$$269 - 16 = \text{ریشه‌های دوم } 16$$

$$271 - 64 = \text{ریشه سوم } 64$$

$$271 - 125 = \text{ریشه سوم } 125$$

$$274 - 36 = \text{ریشه‌های دوم } 36$$

$$273 - 1 = \text{ریشه‌های ششم } 1$$

-۲۷۵- ریشه‌های چهارم 7°

-۲۷۶- ریشه سوم 5°

-۲۷۷- ریشه پنجم $0/00032$

-۲۷۸- ریشه هفتم $\frac{1}{128}$

■ در هر مورد، حاصل عبارت داده‌شده را به دست آورید.

-۲۷۹- $\sqrt{3/61}$

-۲۸۰- $\sqrt[3]{343}$

-۲۸۱- $\sqrt[4]{0/0016}$

-۲۸۲- $\sqrt[5]{-\frac{1}{1024}}$

-۲۸۳- $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}$

-۲۸۴- $\sqrt[4]{-128}$

-۲۸۵- $\sqrt[3]{-1}$

-۲۸۶- $\sqrt[5]{0}$

■ در هر مورد، حاصل عبارت خواسته‌شده را به دست آورید.

-۲۸۷- $\sqrt[3]{16} = a \Rightarrow a^2 + 1 = ?$

-۲۸۸- $\sqrt[3]{7} = a \Rightarrow a^3 + 3 = ?$

-۲۸۹- $\sqrt[5]{4} = a \Rightarrow a^{10} - 5 = ?$

-۲۹۰- $\sqrt[6]{a} = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{-a} = ?$

-۲۹۱ سه مکعب تودرتو را در نظر بگیرید به طوری که حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۲۱۶ و حجم مکعب داخلی (کوچک) برابر ۱۲۵ است. طول ضلع مکعب میانی را به صورت یک بازه نمایش دهید.

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

■ در هر مورد تعیین کنید به جای x کدام اعداد طبیعی را می‌توان قرار داد.

-۲۹۲- $6 < \sqrt{x} < 7$

-۲۹۳- $4 \leq \sqrt[3]{x} < 5$

-۲۹۴- $2 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3$

-۲۹۵ اگر $0 < a < 1$ باشد، یکی از علامت‌های مقایسه را در قرار دهید.

a^4 a^5

\sqrt{a} $\sqrt[3]{a}$

-۲۹۶ اگر $a > 1$ باشد، یکی از علامت‌های مقایسه را در قرار دهید.

a^3 a^4

$\sqrt[4]{a}$ $\sqrt[5]{a}$

-۲۹۷ اگر $-1 < a < 0$ باشد، یکی از علامت‌های مقایسه را در قرار دهید.

a^5 a^7

a^3 a^4

a^4 a^6

-۲۹۸ اگر $a < -1$ باشد، یکی از علامت‌های مقایسه را در قرار دهید.

a^3 a^5

a^2 a^4

$\sqrt[4]{a}$ $\sqrt[3]{a}$

$\sqrt[3]{a}$ $\sqrt[5]{a}$

a^7 a^4

■ در هر مورد، یکی از علامت‌های «>»، «<»، «=» را در جای خالی قرار دهید.

-۲۹۹- 11^5 11^8

-۳۰۰- $(0/2)^4$ $(0/2)^7$

-۳۰۱- $(-0/1)^7$ $(-0/1)^9$

-۳۰۲- $(-3)^2$ $(-3)^5$

-۳۰۳- $(-12)^4$ $(-12)^6$

-۳۰۴- $\sqrt[5]{0/00001}$ $0/1$

-۳۰۵- $\sqrt[5]{7}$ $\sqrt[3]{7}$

-۳۰۶- $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ $\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$

-۳۰۷- $\sqrt[3]{-0/3}$ $\sqrt[5]{-0/3}$

-۳۰۸- $\sqrt[4]{-9}$ $\sqrt[3]{-9}$

■ در هر مورد مشخص کنید a چه اعدادی می‌تواند باشد؟

-۳۰۹- $\sqrt[3]{a} > a$ عددی مثبت است و $a > \sqrt[3]{a}$

-۳۱۰- $\sqrt[5]{a} < a$ عددی حقیقی است و $\sqrt[5]{a} < a$

-۳۱۱- $\sqrt[4]{a} > a$ عددی منفی است و $\sqrt[4]{a} > a$

-۳۱۲- $\sqrt[3]{a} = a$ عددی است که ریشه سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$

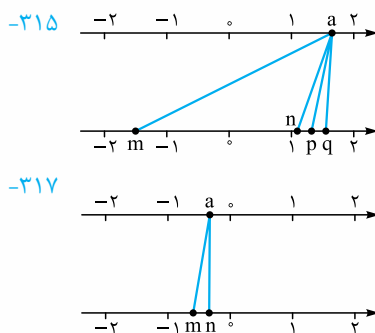
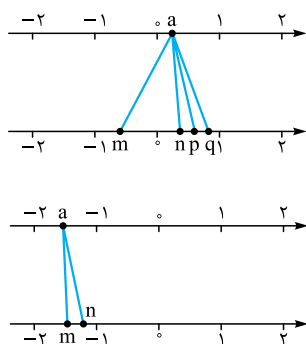
-۳۱۳- $a > \sqrt{a}$ عددی مثبت است که $a > \sqrt{a}$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(مشابه تمرین کتاب درسی)

در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود در محور پایین وصل شده است. مشخص کنید نقاط m ، n ، p و q مربوط به کدام ریشه است؟



۳۱۸- ریشه پنجم عددی از ریشه سوم عدد -64 ، 6 واحد بزرگ‌تر است. آن عدد را به دست آورید.

صفحه ۵۴ تا ۵۸ کتاب درسی

ریشه‌های n

درس ۲

درس‌نامه ۲ را در صفحه ۷۵ ببینید.

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۳۱۹- به ازای هر عدد حقیقی a و b رابطه $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ برقرار است.

۳۲۰- رابطه $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$ به ازای هر عدد طبیعی فرد n ($n > 2$) برقرار است.

۳۲۱- همواره داریم $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$.

۳۲۲- اگر رادیکال‌ها با معنی باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

۳۲۳- می‌توان نوشت: $\sqrt{(\sin(\frac{\pi}{4}) - 3)^2} = \sin(\frac{\pi}{4}) - 3$.

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۳۲۴- حاصل $\sqrt{18} \times \sqrt{2}$ برابر است.

۳۲۵- رابطه $(\sqrt[n]{a^n}) = (\sqrt[n]{a})^n$ وقتی برقرار نیست که

۳۲۶- اگر a عددی منفی و n عددی زوج باشد، حاصل $\sqrt[n]{a^n}$ برابر است با

۳۲۷- حاصل $\sqrt[6]{(64)^{-2}}$ برابر است با

در هر مورد به جای a و b و عدد طبیعی n ، عددهایی قرار دهید که احکام داده شده برقرار باشد.

$$\sqrt[n]{ab} \neq \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \quad 328$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \quad 329$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \neq \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad 330$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad 331$$

در هر مورد حاصل عبارت داده شده را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (همه رادیکال‌ها با معنی‌اند.)

$$\sqrt[5]{256} \times \sqrt[5]{4} \quad 332$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{27} \quad 333$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{24}} \times \sqrt[3]{81} \quad 334$$

$$\frac{\sqrt[4]{512}}{\sqrt[4]{162}} \quad 335$$

$$\sqrt[5]{\frac{b^2}{rac}} \times \sqrt[5]{11a^6b} \times \sqrt[5]{9b^2c} \quad 336$$

$$\sqrt[2]{\frac{5}{16}} \div \sqrt[2]{\frac{4}{25}} \quad 337$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{16a^2b^4}} \times \sqrt[3]{54a^5b} \quad 338$$

$$2^4 \sqrt[3]{375} \times 5^4 \sqrt[3]{135} \quad 339$$

(تمرین کتاب درسی)

■ در هر مورد عبارت داده‌شده را ساده کنید. (همهٔ رادیکال‌ها بامعنی‌اند).

$$\sqrt[3]{16a^4b^5c^6} - 341 \qquad \sqrt{242} - 340$$

$$\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{192} - 343 \qquad \sqrt{72} - 3\sqrt{18} + 2\sqrt{8} - 342$$

(تمرین کتاب درسی)

■ ۳۴۴- با فرض $a \in \mathbb{R}$ و $m \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ بررسی کنید رابطهٔ $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ در چه صورت برقرار است.

■ در هر مورد حاصل عبارت داده‌شده را به دست آورید.

$$\sqrt[3]{(128)^{-3}} - 346 \qquad \sqrt[3]{(64)^2} - 345$$

$$\sqrt[3]{(-625)^2} - 348 \qquad \sqrt[6]{(729)^5} - 347$$

(کار در کلاس کتاب درسی)

■ ۳۴۹- تساوی $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$ به ازای چه مقادیری از a و n برقرار نیست؟

■ در هر مورد حاصل عبارت داده‌شده را به دست آورید.

$$\sqrt[3]{(-7)^3} - 351 \qquad \sqrt{(-3)^2} - 350$$

$$\sqrt[4]{(\sqrt{2} - \sqrt{5})^4} - 353 \qquad \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - 352$$

$$\sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3} - \sqrt[5]{(\sqrt{2} - 6)^5} - 355 \qquad \sqrt[6]{(x^2 + 1)^6} - 354$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

■ ۳۵۶- عددهای زیر را محاسبه کنید.

$$\sqrt[6]{\frac{5^{-6}}{3^{-12}}} \quad \sqrt[4]{5^{-4}} \quad \sqrt[5]{3^{-5}} \quad \sqrt[4]{7^{-3}}$$

■ ۳۵۷- اگر $x < 0$ باشد، حاصل $A = \sqrt[4]{x^4} + \sqrt[5]{x^5}$ را به دست آورید.

■ ۳۵۸- اگر $0 < x < 1$ باشد، حاصل $A = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ را به دست آورید.

■ ۳۵۹- مشخص کنید رابطهٔ $\sqrt[4]{(x-1)^4} = (\sqrt[4]{1-x})^4$ به ازای چه مقادیری از x برقرار است.

■ ۳۶۰- تعیین کنید، تحت چه شرایطی رابطهٔ $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{ab}$ برقرار است.

■ ۳۶۱- حدود x را طوری بیابید که رابطهٔ $\sqrt{(2x-1)^n} = (\sqrt[2]{2x-1})^n$ به ازای هر عدد طبیعی n ($n \geq 2$) برقرار باشد.

■ ۳۶۲- اگر $a < 0 < b$ باشد، عبارت $A = \sqrt{a^2 + b^2} + 2\sqrt{a^2b^2}$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

(تمرین کتاب درسی)

■ ۳۶۳- با استفاده از تعریف ریشه، به شرط بامعنی‌بودن رادیکال، ثابت کنید $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

صفحه ۵۹ تا از کتاب درسی

توان‌های گویا

درس ۳

درس‌نامه ۳ را در صفحه ۷۸ ببینید.

■ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$$-364 \quad (-1)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-1} \qquad -365 \quad \text{رابطهٔ } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ همواره برقرار است.}$$

$$-366 \quad \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5} \qquad -367 \quad \sqrt{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{10}$$

$$-368 \quad \sqrt{3} = \sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{27}$$

■ جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.

■ ۳۶۹- حاصل $81^{\frac{3}{4}}$ برابر است با

■ ۳۷۰- اگر حاصل $2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}}$ برابر $a\sqrt[4]{2}$ باشد، a برابر است با

■ ۳۷۱- اگر m و n دو عدد طبیعی و $a > 0$ ، آن‌گاه $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \dots$

ریشه‌وتوان

تفصیل
درس ۱

صفحه ۴۸ تا ۵۳ کتاب درسی

ریشه

(۱) ریشه‌های دوم: فرض کنیم b یک عدد حقیقی مثبت باشد، چون $b = (\pm\sqrt{b})^2$ ، به اعداد \sqrt{b} و $-\sqrt{b}$ ریشه‌های دوم عدد b می‌گوییم. به طور مثال ریشه‌های دوم عدد ۲۵، عبارت‌اند از $\pm\sqrt{25} = \pm 5$ و ریشه‌های دوم عدد ۶۰ عبارت‌اند از $\pm\sqrt{60}$.

نکته ۱ هر عدد مثبت دو ریشه دوم دارد که قرینه یکدیگرند.

۲ اعداد منفی ریشه دوم ندارند. مثلاً عدد -۱۶ ریشه دوم ندارد.

۳ ریشه‌های دوم عدد ۱ برابر ± 1 و ریشه دوم صفر برابر صفر است.

(۲) ریشه سوم: فرض کنیم b یک عدد حقیقی باشد، چون $b = (\sqrt[3]{b})^3$ ، به عدد $\sqrt[3]{b}$ ریشه سوم عدد b می‌گوییم. به طور مثال؛ ریشه سوم عدد ۸ برابر $\sqrt[3]{8} = 2$ و ریشه سوم عدد ۲۷ برابر $\sqrt[3]{27} = 3$ و ریشه سوم عدد ۵۷ برابر $\sqrt[3]{57}$ است.

نکته هر عدد حقیقی چه مثبت، چه منفی و چه صفر، دقیقاً یک ریشه سوم هم‌علامت با خود عدد دارد.

تذکره اگر عدد $a > 0$ مربع کامل و عدد b نیز مکعب کامل نباشند، آن‌گاه \sqrt{a} و $\sqrt[3]{b}$ اعداد حقیقی گنگ هستند که هیچ‌گاه مقدار دقیق آن‌ها به صورت اعشاری قابل نمایش نیست. به طور مثال $\sqrt{15}$ که برای نمایش ریشه سوم عدد ۱۵ به کار می‌رود را نمی‌توان به طور دقیق با ارقام اعشاری نمایش داد و لذا از تقریبات آن در دنیای واقع استفاده می‌شود.

مثال مشخص کنید اعداد زیر بین کدام دو عدد صحیح واقع هستند.

(الف) $\sqrt{57}$ (ب) $\sqrt{-23}$

پاسخ: الف) داریم $۶۴ < ۵۷ < ۴۹$ ، در نتیجه با جذرگیری از طرفین این نامعادله خواهیم داشت: $۸ < \sqrt{57} < ۷$ پس عدد $\sqrt{57}$ بین دو عدد صحیح ۷ و ۸ قرار دارد.

ب) می‌دانیم $-۸ < -۲۳ < -۲۷$ ، اگر از طرفین این نامعادله، ریشه سوم بگیریم، داریم:

$$\sqrt[3]{-27} < \sqrt[3]{-23} < \sqrt[3]{-8} \Rightarrow -3 < \sqrt[3]{-23} < -2$$

یعنی عدد $\sqrt[3]{-23}$ بین دو عدد صحیح -۳ و -۲ واقع است.

(۳) ریشه‌های چهارم: فرض کنیم b عدد حقیقی مثبت باشد، چون $b = (\pm\sqrt[4]{b})^4$ ، به اعداد $\sqrt[4]{b}$ و $-\sqrt[4]{b}$ ریشه‌های چهارم عدد b می‌گوییم. به طور مثال، ریشه‌های چهارم عدد ۱۶ برابر $\pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$ ، ریشه‌های چهارم عدد ۸۱ برابر $\pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$ و ریشه‌های چهارم عدد ۲۷ برابر $\pm\sqrt[4]{27}$ هستند.

نکته ۱ هر عدد مثبت دارای دو ریشه چهارم است که قرینه یکدیگرند.

۲ اعداد منفی، ریشه چهارم ندارند.

۳ ریشه چهارم صفر برابر صفر است.

$$\cos \alpha = \pm \frac{8}{10} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \cos \alpha = -\frac{8}{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{6}{10}}{-\frac{8}{10}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \\ \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\tan \alpha} + \cot^2 \alpha = \sqrt{\frac{3}{4}} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{16}{9} = \frac{9\sqrt{3} + 32}{18}$$

۲۳۷. در ناحیه دوم مثلثاتی، سینوس زوایا مثبت و کسینوس و تانژانت و کتانژانت منفی است؛ پس:

$$\sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{8}{10}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{64}{100}} = \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{8}{10}} = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{\frac{3}{5}} = -\frac{3}{4} + \frac{5}{3} = \frac{-3 + 20}{12} = \frac{17}{12}$$

$$\cot^2 \alpha + \tan^2 \alpha = 23 \quad ۲۳۸$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cot^2 \alpha + \tan^2 \alpha + 2 \cot \alpha \tan \alpha}_{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} - 2 \cot \alpha \tan \alpha = 23$$

$$\Rightarrow (\cot \alpha + \tan \alpha)^2 - 2 = 23 \Rightarrow (\cot \alpha + \tan \alpha)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \cot \alpha + \tan \alpha = \pm 5$$

در ناحیه سوم مثلثاتی $\cot \alpha$ و $\tan \alpha$ هر دو مثبت هستند؛ پس:

$$\cot \alpha + \tan \alpha = 5$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 5 \Rightarrow \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 5$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{5} \quad (*)$$

اگر مقدار خواسته شده $\sin \alpha + \cos \alpha$ را برابر A قرار دهیم:

$$A = \sin \alpha + \cos \alpha \Rightarrow A^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$$

$$= \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{1} + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Rightarrow A^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \xrightarrow{(*)} A^2 = 1 + 2\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow A = \pm \sqrt{\frac{7}{5}} \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{7}{5}}$$

چون در ربع سوم، $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ هر دو منفی هستند، پس حاصل جمع

$$\sin \alpha + \cos \alpha = -\sqrt{\frac{7}{5}} \quad \text{بنابراین}$$

(۲) $0 < a < 1$: در این حالت هر چه توان بزرگ‌تر باشد، عدد کوچک‌تر می‌شود و هر چه فرجه بزرگ‌تر شود، عدد نیز بزرگ‌تر می‌شود. به عبارت دیگر:

$$0 < a < 1 \Rightarrow \dots < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \dots$$

(۳) $-1 < a < 0$: توان‌های فرد و فرجه‌های فرد این حالت، مانند حالت $a > 1$ عمل می‌کند. در این حالت a ریشه زوج ندارد و داریم:

$$-1 < a < 0 \Rightarrow \dots > a^5 > a^3 > a > \sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a} > \dots$$

$$-1 < a < 0 \Rightarrow a^2 > a^4 > a^6 > \dots$$

(۴) $a < -1$: توان‌های فرد و فرجه‌های فرد این حالت، مانند حالت $0 < a < 1$ عمل می‌کند. در این حالت a ریشه زوج ندارد و داریم:

$$a < -1 \Rightarrow \dots < a^5 < a^3 < a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a} < \dots$$

$$a < -1 \Rightarrow a^2 < a^4 < a^6 < \dots$$

تذکره اگر $a = 1$ یا $a = 0$ ، آن‌گاه:

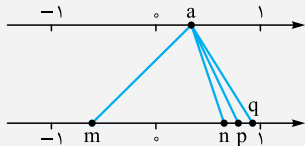
$$\dots = a^3 = a^2 = a = \sqrt{a} = \sqrt[3]{a} = \dots$$

هم‌چنین اگر $a = -1$ ، آن‌گاه:

$$\dots = a^5 = a^3 = a = \sqrt[3]{a} = \sqrt[5]{a} = \dots = -1$$

$$a^2 = a^4 = a^6 = \dots = 1$$

مثال در شکل زیر، عدد a روی محور بالا به ریشه‌های پنجم، ششم و هفتم خود در محور پایین رسم شده است. تعیین کنید اعداد m ، n ، p و q مربوط به کدام یک از این ریشه‌ها هستند.



پاسخ: با توجه به شکل، معلوم می‌شود که $0 < a < 1$ است؛ پس بنابر مطالب گفته‌شده با بزرگ‌شدن فرجه، عدد نیز بزرگ‌تر می‌شود. یعنی رابطه ریشه‌های پنجم، ششم و هفتم عبارت‌اند از:

$$\sqrt[5]{a} < \sqrt[6]{a} < \sqrt[7]{a}$$

پس می‌توان نوشت:

$$n = \sqrt[5]{a}, p = \sqrt[6]{a}, q = \sqrt[7]{a}$$

اما چون عدد a دارای دو ریشه ششم قرینه است، پس $m = -\sqrt[6]{a}$.

پاسخ سوالات

۲۳۹. درست

۲۴۰. نادرست؛ زیرا همواره داریم $\sqrt[3]{16} = 4$ و حاصل $\sqrt[3]{16}$ هرگز برابر -4 نیست. در واقع باید گفته می‌شد، چون $16 = (\pm 4)^2$ ، پس ریشه‌های دوم 16 برابر ± 4 است.

۲۴۱. نادرست؛ علاوه بر این که $0 < a < 1$ می‌تواند باشد، اگر $a < -1$ باشد، باز هم $\sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a}$ خواهد بود.

(۴) **ریشه پنجم:** فرض کنیم b یک عدد حقیقی دلخواه باشد، چون $(\sqrt[5]{b})^5 = b$ ، به عدد $\sqrt[5]{b}$ ریشه پنجم b می‌گوییم. به طور مثال ریشه پنجم عدد 32 برابر 2 و ریشه پنجم عدد -70 برابر $\sqrt[5]{-70}$ است. **نکته:** هر عدد حقیقی (چه مثبت، چه منفی و چه صفر) دقیقاً یک ریشه پنجم دارد که هم‌علامت با خود عدد است.

(۵) **ریشه n ام:** اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می‌گوییم هرگاه $b^n = a$.

تذکره اگر n زوج باشد، ریشه‌های n ام یک عدد مانند ریشه‌های دوم و چهارم و چنان‌چه n فرد باشد، ریشه n ام یک عدد مانند ریشه سوم و پنجم تعریف می‌شود. به طور مثال ریشه‌های هشتم عدد 256 برابر $\pm 2 = \pm \sqrt[8]{256}$ و ریشه هفتم عدد 73 برابر $\sqrt[7]{73}$ است.

پس‌در وجود و تعداد ریشه‌های یک عدد

$a > 0$ دارای دو ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است. **زوج n**
 $a > 0$ دارای یک ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$ است. **فرد n**

$a > 0$ ریشه n ام ندارد. **زوج n**
 $a > 0$ دارای یک ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$ است. **فرد n**

تذکره ریشه n ام عدد صفر، صفر است.

مثال مقادیر خواسته‌شده را به دست آورید.

الف) ریشه‌های ششم عدد 729 (ب) ریشه هفتم عدد $-\frac{1}{128}$
 پ) ریشه‌های هشتم عدد -64

پاسخ:

الف) عدد 729 مثبت است، پس دو ریشه ششم دارد که قرینه یکدیگرند و عبارت‌اند از:

$$\pm \sqrt[6]{729} = \pm \sqrt[6]{3^6} = \pm 3$$

ب) می‌دانیم هر عدد حقیقی فقط یک ریشه هفتم دارد؛ پس عدد $-\frac{1}{128}$ نیز یک ریشه هفتم دارد که عبارت است از:

$$\sqrt[7]{-\frac{1}{128}} = \sqrt[7]{-\frac{1}{2^7}} = -\frac{1}{2}$$

پ) می‌دانیم اعداد منفی ریشه زوج ندارند پس عدد -64 دارای ریشه هشتم نیست.

مقایسه توان‌ها و ریشه‌های مختلف یک عدد

مطابق شکل، اعداد 1 ، صفر و -1 محور اعداد حقیقی را به 4 قسمت (بازه) تقسیم می‌کنند که ویژگی‌های هر یک از این 4 قسمت در زیر آمده است:

$$a < -1 \quad -1 < a < 0 \quad 0 < a < 1 \quad 1 < a$$

(۱) $a > 1$: در این حالت هر چه توان بزرگ‌تر باشد، عدد نیز بزرگ‌تر می‌شود و هر چه فرجه بزرگ‌تر شود، عدد کوچک‌تر می‌شود. به عبارت دیگر:

$$a > 1 \Rightarrow \dots > a^3 > a^2 > a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \dots$$

±√۱۶ = ±۴ ۲۶۹

±√۶۲۵ = ±۲۵ ۲۷۰

√۱۲۵ = ۵ ۲۷۱

√۶۴ = ۴ ۲۷۲

±√[۰/۰۰۰۰۰۱] = ±√[۱۰^{-۶}] = ±۱۰^{-۱} = ±۰/۱ ۲۷۳

۲۷۴. اعداد منفی ریشه زوج ندارند؛ پس ۳۶- ریشه دوم ندارد.

±√[۷] ۲۷۵

√[-۵۰] ۲۷۶

√[-۰/۰۰۰۰۳۲] = √[-۳۲/۱۰۰۰۰۰] = √[-۲۵/۱۰۵] = -۰/۲ ۲۷۷

√[-۱/۱۲۸] = √[-۱/۲^۷] = -۱/۲ ۲۷۸

√[۳/۶۱] = √[(۱/۹)²] = ۱/۹ ۲۷۹

√[۳۴۳] = √[۷³] = ۷ ۲۸۰

√[۰/۰۰۰۱۶] = √[۱۶/۱۰۰۰۰۰] = √[۲^۴/۱۰^۴] = √[(۲/۱۰)⁴] = ۲/۱۰ = ۰/۲ ۲۸۱

√[-۱/۱۰۲۴] = √[-۱/۴^۵] = √[-(۱/۴)⁵] = -۱/۴ ۲۸۲

√[۶۴/۷۲۹] = √[۲^۶/۳^۶] = √[(۲/۳)⁶] = ۲/۳ ۲۸۳

√[-۱۲۸] = √[-۲^۷] = √[-(۲)⁷] = -۲ ۲۸۴

√[-۱] = -۱ ۲۸۵

√[۰] = ۰ ۲۸۶

√[۱۶] = a ⇒ ۲ = a ⇒ a^۲ + ۱ = ۲^۲ + ۱ = ۹ ۲۸۷

√[۷] = a $\xrightarrow{\text{به توان ۲}}$ ۷ = a^۲ ⇒ a^۲ + ۳ = ۷ + ۳ = ۱۰ ۲۸۸

√[۴] = a $\xrightarrow{\text{به توان ۵}}$ ۴ = a^۵ $\xrightarrow{\text{به توان ۲}}$ ۱۶ = a^{۱۰} ۲۸۹

⇒ a^{۱۰} - ۵ = ۱۶ - ۵ = ۱۱ ۲۹۰

√[a] = ۲ $\xrightarrow{\text{به توان ۶}}$ a = ۲^۶ = ۶۴ ⇒ √[-a] = √[-۶۴] ۲۹۱

= √[-(-۴)³] = -۴

۲۹۱. فرض کنیم طول ضلع مکعب میانی برابر a باشد، پس حجم آن برابر a^۳ خواهد بود. طبق فرض می توان نوشت:

۱۲۵ < a^۳ < ۲۱۶

از طرفین نامعادله، ریشه سوم می گیریم:

۵ < a < ۶ ⇒ a ∈ (۵, ۶) ۲۹۲

۶ < √[x] < ۷ $\xrightarrow{\text{به توان ۲}}$ ۳۶ < x < ۴۹ ۲۹۳

$\xrightarrow{x \in \mathbb{N}}$ x ∈ {۳۷, ۳۸, ..., ۴۸}

۴ ≤ √[x] < ۵ $\xrightarrow{\text{به توان ۳}}$ ۶۴ ≤ x < ۱۲۵ ۲۹۴

$\xrightarrow{x \in \mathbb{N}}$ x ∈ {۶۴, ۶۵, ۶۶, ..., ۱۲۴}

۲۴۲. درست

۲۴۳. نادرست؛ زیرا با شرایط داده شده، لازم است a < -۱ باشد.

۲۴۴. درست

۲۴۵. نادرست؛ زیرا ریشه های چهارم عدد ۱، ±۱ هستند.

۲۴۶. درست ۲۴۷ دو - قرینه

۲۴۸. یک - مثبت - منفی ۲۴۹ کوچک

a < -۱ ۲۵۰ ۰ < a < ۱

۲۵۲. ۶۴، -۲

۲۵۳. a^۲ + √[a] = ۱۶ + ۲ = ۱۸ و در نتیجه a = ۴ پس، √[۶۴] = ۴؛ زیرا: ۱۸؛ زیرا: ۲۵۴

۲۵۴. -۰/۲؛ زیرا: ۲۵۵

-√[۰/۰۰۰۱۶] = -√[۱۶/۱۰۰۰۰۰] = -√[(۲/۱۰)⁴] = -۲/۱۰ = -۰/۲ ۲۵۵

(-۵)³ = -۱۲۵ ⇔ √[-۱۲۵] = -۵ ۲۵۶

(۰/۶)² = ۰/۳۶ ⇔ √[۰/۳۶] = ۰/۶ ۲۵۷

۳^۶ = ۷۲۹ ⇔ √[۷۲۹] = ۳ ۲۵۸

√[۱۶۹] = ۱۳ ⇔ ۱۳² = ۱۶۹ ۲۵۹

√[۵۰] = ۵√[۲] ⇔ (۵√[۲])² = ۵۰ ۲۶۰

√[-۷۲] = -۲√[۹] ⇔ (-۲√[۹])³ = -۷۲ ۲۶۱

۲۶۱. ابتدا دو عدد مربع کامل می یابیم که عدد ۱۳ بین آن دو عدد باشد، سپس

از طرفین جذر می گیریم: ۹ < ۱۳ < ۱۶ $\xrightarrow{\text{جذر}}$ ۳ < √[۱۳] < ۴

مانند پاسخ سؤال قبل عمل می کنیم: ۲۶۲

۴۹ < ۵۷ < ۶۴ $\xrightarrow{\text{جذر}}$ ۷ < √[۵۷] < ۸ ۲۶۳

۲۶۳. ابتدا مشخص می کنیم √[۳۰] بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد و سپس

طرفین را در یک منفی ضرب می کنیم. در این حالت جهت نامساوی عوض

۲۵ < ۳۰ < ۳۶ $\xrightarrow{\text{جذر}}$ ۵ < √[۳۰] < ۶ ۲۶۴

می شود: $\xrightarrow{\times(-1)}$ -۶ < -√[۳۰] < -۵

۲۶۴. باید ببینیم عدد ۱۹- بین کدام دو عدد صحیح و مکعب کامل قرار دارد

و سپس از طرفین فرجه ۳ بگیریم: ۲۶۵

-۲۷ < -۱۹ < -۸ $\xrightarrow{\sqrt[3]{}}$ -۳ < √[۳]{-۱۹} < -۲

۲۶۵. می دانیم ۴² = ۶۴ و ۵² = ۱۲۵، پس: ۲۶۶

۶۴ < ۱۰۰ < ۱۲۵ $\xrightarrow{\sqrt[3]{}}$ ۴ < √[۳]{۱۰۰} < ۵

۲۶۶. می دانیم ۳³ = ۲۷ و ۴³ = ۶۴، پس: ۲۶۷

۳⁴ < ۱۴۵ < ۴⁴ $\xrightarrow{\sqrt[3]{}}$ ۳ < √[۳]{۱۴۵} < ۴

۲۶۷. می دانیم ۳² = ۳۲ و ۳³ = ۲۷، پس: ۲۶۸

۲۵ < ۲۰۱ < ۳۵ $\xrightarrow{\sqrt[3]{}}$ ۲ < √[۳]{۲۰۱} < ۳

۲۶۸. می دانیم ۳⁵ = ۲۴۳ و ۴⁵ = ۱۰۲۴، پس: ۲۶۹

۳⁵ < ۵۰۰ < ۴⁵ $\xrightarrow{\times(-1)}$ -۴⁵ < -۵۰۰ < -۳⁵

$\xrightarrow{\sqrt[3]{}}$ -۴ < √[۳]{-۵۰۰} < -۳

۳۰۶. می‌دانیم اگر $0 < a < 1$ ، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد نیز بزرگ

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}} < \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \quad \text{می‌شود. چون } 1 < \frac{2}{3} < \frac{4}{3}; \text{ پس:}$$

۳۰۷. می‌دانیم اگر $0 < a < 1$ ، آن‌گاه فقط با فرجه فرد a تعریف می‌شود و نیز با بزرگ‌شدن فرجه، عدد کوچک می‌شود. چون $0 < \frac{1}{3} < -1 < 0$ ، پس:

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{3}} > \sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$$

۳۰۸. می‌دانیم اگر $a < -1$ باشد، آن‌گاه فقط فرجه‌های فرد a تعریف می‌شود و نیز با بزرگ‌شدن فرجه، عدد نیز بزرگ می‌شود. چون $-9 < -1$ ، پس:

$$\sqrt[3]{-9} < \sqrt[3]{-1}$$

۳۰۹. در دو حالت، عدد a از ریشه‌های بامعنی خود کوچک‌تر است، یکی این که $0 < a < 1$ و دیگر این که $a < -1$.

در این‌جا طبق فرض a عددی مثبت است، پس برای آن که $a < \sqrt[3]{a}$ باشد، می‌بایست $0 < a < 1$.

۳۱۰. اگر $a > 1$ یا $0 < a < 1$ باشد، آن‌گاه عدد a از ریشه‌های بامعنی خود بزرگ‌تر خواهد بود؛ پس برای آن که $\sqrt[3]{a} < a$ باشد، می‌بایست $a > 1$ یا این که $0 < a < 1$.

۳۱۱. گفتیم اگر $0 < a < 1$ یا $a < -1$ ، آن‌گاه عدد a از تمام ریشه‌های بامعنی خودش کوچک‌تر است. طبق فرض a عددی منفی است. بنابراین برای آن که نامعادله $a < \sqrt[3]{a}$ برقرار باشد، لازم است $a < -1$.

۳۱۲. اعدادی که ریشه سوم آن‌ها با خود آن‌ها برابر است، عبارت‌اند از ۱، صفر و -۱.

۳۱۳. بنا بر توضیحات سؤالات قبل، اگر $a > 1$ باشد آن‌گاه $a > \sqrt[3]{a}$.

۳۱۴. می‌دانیم اگر $a > 1$ ، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد کوچک‌تر می‌شود. به عبارت دیگر:

$$a > 1 \Rightarrow a > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \sqrt[5]{a}$$

بنابراین در این‌جا که $a > 1$ روی محور بالا قرار دارد، معلوم می‌شود که $n = \sqrt[5]{a}$ ، $p = \sqrt[4]{a}$ و $q = \sqrt[3]{a}$ و چون هر عدد مثبت دو ریشه زوج و قرینه دارد، پس $m = -\sqrt[3]{a}$.

۳۱۵. می‌دانیم اگر $0 < a < 1$ ، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد نیز بزرگ می‌شود. به عبارت دیگر:

$$0 < a < 1 \Rightarrow a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a}$$

بنابراین در این‌جا چون $0 < a < 1$ روی محور بالا قرار دارد، داریم:

$$n = \sqrt[5]{a}, p = \sqrt[4]{a}, q = \sqrt[3]{a}, m = -\sqrt[3]{a}$$

۳۱۶. می‌دانیم اگر $0 < a < -1$ ، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد کوچک می‌شود. البته چون a منفی است، فقط فرجه‌های فرد برای a تعریف می‌شود، به عبارت دیگر:

$$-1 < a < 0 \Rightarrow a > \sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a}$$

بنابراین با توجه به شکل داریم: $n = \sqrt[5]{a}$ و $m = \sqrt[3]{a}$

۳۱۷. می‌دانیم اگر $a < -1$ ، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد بزرگ‌تر می‌شود. البته فقط فرجه‌های فرد برای a تعریف می‌شود. به عبارت دیگر:

$$a < -1 \Rightarrow a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a}$$

بنابراین با توجه به شکل، داریم:

$$m = \sqrt[3]{a}, n = \sqrt[5]{a}$$

۳۱۸. عدد مطلوب را x می‌گیریم. طبق فرض می‌توان نوشت:

$$\sqrt[5]{x} = \sqrt[3]{-64} + 6 \Rightarrow \sqrt[5]{x} = -4 + 6 \Rightarrow \sqrt[5]{x} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۵}} x = 2^5 = 32$$

$$294. \quad 16 \leq x \leq 81 \xrightarrow{\text{به توان ۴}} 2 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3$$

$$\xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x \in \{16, 17, \dots, 81\}$$

۲۹۵. الف) وقتی $0 < a < 1$ باشد، با بزرگ‌شدن توان، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. پس:

$$a^2 \geq a^5$$

ب) وقتی $0 < a < 1$ باشد، با بزرگ‌شدن فرجه، عدد حاصل نیز بزرگ‌تر می‌شود. پس:

$$\sqrt{a} \leq \sqrt[3]{a}$$

۲۹۶. الف) وقتی $a > 1$ باشد، با بزرگ‌ترشدن، توان عدد حاصل نیز بزرگ‌تر می‌شود، پس:

$$a^2 \leq a^4$$

ب) وقتی $a > 1$ باشد، با بزرگ‌ترشدن فرجه، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود، پس:

$$\sqrt[3]{a} \leq \sqrt[5]{a}$$

۲۹۷. الف) وقتی $0 < a < -1$ ، با بزرگ‌ترشدن توان‌های فرد، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود، پس:

$$a^5 \leq a^7$$

ب) وقتی $0 < a < -1$ ، با بزرگ‌ترشدن توان‌های زوج، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود، پس:

$$a^4 \geq a^6$$

پ) وقتی $0 < a < -1$ ، پس a عددی منفی است، لذا $a^2 < a^4$ و در نتیجه:

$$a^2 \leq a^4$$

ت) وقتی $0 < a < -1$ ، با بزرگ‌ترشدن فرجه، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود، پس:

$$\sqrt[3]{a} \geq \sqrt[5]{a}$$

۲۹۸. الف) وقتی $a < -1$ ، با بزرگ‌ترشدن توان‌های فرد، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود؛ پس:

$$a^2 \geq a^5$$

ب) وقتی $a < -1$ ، با بزرگ‌ترشدن فرجه، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود؛ پس:

$$\sqrt[3]{a} \leq \sqrt[5]{a}$$

پ) وقتی $a < -1$ ، با بزرگ‌ترشدن توان‌های زوج، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود، پس:

$$a^2 \leq a^4$$

ت) چون $a < -1$ ، پس $a^5 < 0$ و $a^4 > 0$ است و لذا داریم:

$$a^5 \leq a^4$$

۲۹۹. می‌دانیم اگر $a > 1$ ، با بزرگ‌ترشدن توان، عدد حاصل نیز بزرگ‌تر می‌شود. داریم:

$$11^5 < 11^8 \Rightarrow 11 > 1$$

۳۰۰. می‌دانیم اگر $0 < a < 1$ ، با بزرگ‌ترشدن توان، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 > \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

۳۰۱. می‌دانیم اگر $0 < a < -1$ ، با بزرگ‌ترشدن توان‌های فرد، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود. بنابراین داریم:

$$-1 < -\frac{1}{1} < 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{1}\right)^7 < \left(-\frac{1}{1}\right)^9$$

۳۰۲. می‌دانیم اگر $a < -1$ ، آن‌گاه با بزرگ‌ترشدن توان‌های فرد، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. داریم:

$$-3 < -1 \Rightarrow (-3)^3 > (-3)^5$$

۳۰۳. می‌دانیم اگر $a < -1$ ، با بزرگ‌ترشدن توان‌های زوج، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود. داریم:

$$-12 < -1 \Rightarrow (-12)^4 < (-12)^6$$

۳۰۴. می‌توان نوشت: $\sqrt[5]{\frac{1}{1000001}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{10}\right)^5} = \frac{1}{10}$ ، پس:

$$\sqrt[5]{\frac{1}{1000001}} = \frac{1}{10}$$

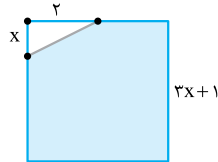
۳۰۵. می‌دانیم اگر $a > 1$ ، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه عدد کوچک‌تر می‌شود. چون $7 > 1$ است، پس:

$$\sqrt[7]{7} > \sqrt[7]{7}$$



۰/۷۵	نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید. الف) شدت بارندگی (کم، زیاد، متوسط) ب) تعداد ماشین‌های یک پارکینگ پ) نوع آلاینده‌گی هوا	۱۷
۲۰	جمع نمرات «موفق باشید»	

ردیف	امتحان شماره	رشته: ریاضی و فیزیک - علوم تجربی	تاریخ امتحان: خردادماه
نمره	پایه دهم دوره دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	

۰/۷۵	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A' - B = A' - A$. ب) اگر n و k دو عدد طبیعی باشند، آن‌گاه $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$. پ) در پرتاب ۶ سکه، احتمال این‌که همه سکه‌ها مثل هم ظاهر شوند $\frac{1}{3^6}$ است.	۱
۰/۷۵	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) مجموع طول و عرض پایین‌ترین نقطه سهمی $y = 2x^2 - 8x + 5$ برابر است. ب) اگر تابع f همانی باشد و $f(f(x)) + f(4) = 3$ ، آن‌گاه مقدار x برابر است. پ) متغیری که اگر دو مقدار a و b را اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز می‌تواند اختیار کند متغیر است.	۲
۰/۵	گزینه درست را انتخاب کنید. الف) اگر نقطه $P(x, -2x)$ روی دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\cos \theta$ کدام است؟ <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> (۱) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۲) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ </div> ب) حاصل $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ کدام است؟ <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> (۱) $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ (۲) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ (۳) $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ (۴) $\begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix}$ </div>	۳
۱/۷۵	الف) در یک الگوی خطی جمله سوم و سیزدهم به ترتیب -4 و 16 هستند. جمله عمومی این دنباله را به دست آورید. ب) جمله پنجم یک دنباله هندسی برابر 2 است. حاصل ضرب 9 جمله اول این دنباله را به دست آورید.	۴
۱/۷۵	الف) اگر $A = 3 \sin x - 2$ ، حداقل و حداکثر A را تعیین کنید. ب) اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{4}$ ، حاصل $\tan x + \cot x$ را به دست آورید.	۵
۱/۲۵	کسر $A = \frac{\sqrt{\sqrt{x-1}+1} \times \sqrt[4]{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-2}}$ را ساده کنید. ($x > 2$)	۶
۱	اگر $a = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$ باشد، حاصل $\left(\frac{3}{a} - 1\right)^3$ را به دست آورید.	۷
۱/۲۵	در مربع شکل مقابل، مساحت قسمت سایه‌زده 15 سانتی‌متر مربع است، مقدار x را به دست آورید. (نوشتن راه‌حل الزامی است). 	۸
۲	حدود m را طوری به دست آورید که نمودار سهمی $y = \frac{1}{4}x^2 + (m-1)x + m - 1$ همواره بالای محور x ها باشد.	۹

۱	الف) اگر $f = \begin{cases} x^2 + 3x & x \leq 1 \\ 2x + m & x \geq 1 \end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار m را به دست آورید. ب) مقدار $f(f(-4))$ را به دست آورید.	۱۰
۱	طول مستطیلی از نصف عرض آن ۲ واحد بیشتر است، تابعی بنویسید که قطر مستطیل را برحسب طول آن بیان کند.	۱۱
۱/۲۵	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -2 \leq x < 0 \\ 3 & 0 \leq x < 1 \\ 3 - x & x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید و برد آن را مشخص کنید.	۱۲
۱/۵	چند عدد طبیعی سه‌رقمی با ارقام متمایز و بزرگ‌تر از ۴۲۶ می‌توان نوشت؟	۱۳
۱/۲۵	الف) مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ ، چند زیرمجموعه ۳ یا ۴ عضوی دارد که شامل عدد ۲ و ۳ باشد ولی شامل عدد ۷ نباشد؟ ب) با اعداد مجموعه A چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت؟	۱۴
۱	خانواده‌ای سه فرزند دارد. الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید. ب) احتمال این‌که فرزند دوم فقط یک برادر داشته باشد، را به دست آورید.	۱۵
۱/۲۵	مهین، سارا و ۵ نفر دیگر می‌خواهند در یک ردیف کنار هم بنشینند. چه‌قدر احتمال دارد که دقیقاً دو نفر بین مهین و سارا قرار بگیرند؟	۱۶
۰/۷۵	الف) مرحله اول و چهارم علم آمار را به ترتیب نام ببرید. ب) نوع متغیر «مدرک تحصیلی افراد» را مشخص کنید.	۱۷
۲۰	جمع نمرات	«موفق باشید»