

فصل اول

جبر و معادله

۱

حسابان یازدهم

بهترین جمله‌ای که در مورد این فصل می‌توان گفت، این است که: «پلی است از گذشته به آینده» در واقع این فصل و حتی می‌توان گفت کتاب حسابان (۱) ارتباطی بین دانش گذشته و بخصوص مطالب ریاضی دهم و مطالب پیش رو در سال آینده و کتاب حسابان دوازدهم است. از یک طرف با تکمیل آموخته‌های سال‌های قبل شما را به سطح خوبی از دانش حسابان می‌رساند و از طرف دیگر شما را برای مواجهه با مطالب جدی‌تر آماده می‌کند. با نگاهی به فهرست مطالب فصل اول، خیلی زود در می‌یابید که این فصل آتش شله‌قلم‌کاری است که در همین ابتدا می‌خواهد مطالب جامانده و مقدمات لازم را به سمع و نظر شما برساند و همین جاست که اهمیت این فصل را بر همگان آشکار می‌سازد. از این فصل، ۱۰ نمره در نوبت اول و ۴ نمره در نوبت دوم و شهریور سؤال طرح می‌شود.

بسته ۷



بسته‌های ۵ و ۶



بسته‌های ۳ و ۴



بسته‌های ۱ و ۲



برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

فیلم
شب
امتحان

مجموع جملات دنباله حسابی

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

بسته اول



این کتاب و این فصل رو با دنباله‌ها شروع می‌کنیم، باشه که این شروع خال نیکی برای ادامه داستان حسابان شود.

یادآوری از دنباله‌های حسابی

اگر از سال گذشته به یاد داشته باشید، جملات دنباله‌های حسابی از جمع عددی ثابت با جمله قبل آن، به دست می‌آیند:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots \Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)d$$

(a_n ، جمله عمومی و d ، قدرنسبت دنباله می‌باشد.)

بنابراین اختلاف هر دو جمله متوالی در دنباله‌های حسابی، برابر با قدرنسبت دنباله است:

$$a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow a_n - a_m = (n - m)d$$

$$2b = a + c \text{ یا } b = \frac{a+c}{2}$$

نکته! اگر a ، b ، c سه جمله متوالی از دنباله حسابی باشند، b واسطه حسابی بین a و c است و در نتیجه:

سؤال مقدار a را از دنباله حسابی $\dots, 5, a, -1$ بیابید. سپس قدرنسبت این دنباله را به دست آورید.

پاسخ

$$-1, a, 5, \dots \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} 2a = (-1) + 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{2} = 2, d = a_2 - a_1 = 2 - (-1) = 3$$

هالا که دنباله‌های حسابی خوب یادتون اومد، بریم که جمله‌های این دنباله‌ها رو با هم جمع کنیم ببینیم چی دستگیرمون می‌شه.

مجموع جملات دنباله‌های حسابی

برای پیدا کردن مجموع n عدد طبیعی متوالی اولیه یعنی $1 + 2 + 3 + \dots + n$ ، جناب گاوس یک ابتکار به خرج دادند و به روش زیر، این حاصل جمع را محاسبه کردند:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ 1 & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 1 \end{array}$$

$$\underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{\text{ت} n} = n(n+1) \Rightarrow 2(1+2+\dots+n) = n(n+1)$$

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

و در نتیجه داریم:

سؤال مجموع چه تعداد از اعداد طبیعی اولیه، برابر با ۲۱۰ می‌گردد؟

پاسخ

$$1+2+3+\dots+n = 210 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 210 \Rightarrow n(n+1) = 420 \Rightarrow n(n+1) = 20 \times 21 \Rightarrow n = 20$$

حالا می‌توانیم از همین ابتکار الگو بگیریم و مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و جمله n ام، a_n را پیدا کنیم:

$$\begin{array}{cccccccc} & & a_2 & & a_3 & & \dots & & a_{n-1} & & a_n \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ S_n = & a_1 & + & (a_1 + d) & + & (a_1 + 2d) & + & \dots & + & (a_1 + (n-2)d) & + & (a_1 + (n-1)d) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\ & (a_1 + (n-1)d) & + & (a_1 + (n-2)d) & + & (a_1 + (n-3)d) & + & \dots & + & (a_1 + d) & + & a_1 \end{array} = S_n$$

با جمع کردن دو رابطه بالا داریم:

$$\xrightarrow{+} 2S_n = \underbrace{(2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + \dots + (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d)}_{\text{ت} n}$$

$$\Rightarrow 2S_n = n(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = a_1 + \dots + a_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

و در نتیجه اگر از فرمول جمله n ام دنباله حسابی یعنی $a_n = a_1 + (n-1)d$ کمک بگیریم، داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + (a_1 + (n-1)d)) \Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

سؤال مجموع چند جمله اول از دنباله حسابی $12, 9, 6, \dots$ برابر صفر است؟

پاسخ با یک دنباله حسابی با قدرنسبت $d = -3$ مواجه ایم، پس داریم:

$$S_n = 0 \Rightarrow \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} = 0 \xrightarrow{\substack{a_1=12 \\ d=-3}} n(2(12) + (n-1)(-3)) = 0 \xrightarrow{n \neq 0} 24 - 3n + 3 = 0 \Rightarrow 3n = 27 \Rightarrow n = 9$$

بنابراین مجموع ۹ جمله اول این دنباله حسابی برابر صفر است.

سؤال در یک دنباله حسابی اگر $a_2 + a_9 = 15$ باشد، مجموع ۲۰ جمله اول این دنباله را بیابید.

$$a_2 + a_9 = (a_1 + d) + (a_1 + 8d) = 2a_1 + 9d = 15 \quad (*)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \stackrel{(*)}{=} 10(15) = 150$$

۱ $a_1 = S_1$

۲ $S_n - S_{n-1} = a_n$

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + \dots + a_{n-1}) = a_n$$

نکته اگر S_n مجموع n جمله اول دنباله حسابی a_n باشد، داریم:

زیرا:

سؤال اگر مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از فرمول $S_n = 5n^2 + 3n$ به دست آید، قدرنسبت و جمله عمومی دنباله را بیابید.

$a_1 = S_1 = 5(1)^2 + 3(1) = 8$, $S_2 = a_1 + a_2 = 5(2)^2 + 3(2) = 20 + 6 = 26$

$a_2 = S_2 - S_1 = 26 - 8 = 18 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 18 - 8 = 10$

$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 8 + 10(n-1) = 10n - 2$

با یک دنباله حسابی با قدرنسبت $d = 10$ مواجهیم، پس داریم:

توجه کنید که جمله عمومی دنباله را به طور مستقیم از فرمول S_n هم می توانستیم بیابیم:

$a_n = S_n - S_{n-1} = 5n^2 + 3n - (5(n-1)^2 + 3(n-1))$

$= 5n^2 + 3n - (5n^2 - 10n + 5 + 3n - 3) = 5n^2 + 3n - 5n^2 + 10n - 5 - 3n + 3 = 10n - 2 \Rightarrow a_n = 10n - 2$

پاسخ

مشابه تمرین ۲ صفحه ۶ کتاب درسی

سؤال مجموع اعداد دو رقمی مضرب ۶ را بیابید.

۶ مضرب ۶: اعداد دو رقمی مضرب ۶: $12, 18, 24, \dots, a_n = 12 + 6(n-1) = 6n + 6$

$a_n = 6n + 6 < 100 \Rightarrow 6n < 94 \Rightarrow n < \frac{94}{6} = 15.6 \Rightarrow n \leq 15$

اولاً باید:

پس بزرگترین مضرب دو رقمی عدد ۶، به ازای $n = 15$ به دست می آید، بنابراین:

$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = \frac{15}{2} (2(12) + (15-1)(6)) = \frac{15}{2} \times 108 = 810$

و یا:

$a_n = a_{15} = 96 \Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} (a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2} (12 + 96) = 810$

پاسخ

مجموع جملات دنباله حسابی

پرسش های تشریحی

بسته ۱

در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱. مجموع جمله از دنباله حسابی $3, 7, 11, \dots$ برابر ۶۰ است. (خرداد ۱۴۰۲ نوبت عصر)
۲. در دنباله حسابی با جمله اول ۴ و قدرنسبت ۸، حداقل جمله را با هم جمع کنیم حاصل بیشتر از ۴۰۰ می شود. (خرداد ۱۴۰۲ نوبت صبح)
۳. مجموع جملات دنباله حسابی $1, 3, 5, 7, \dots, 199$ برابر با است. (شهریور ۱۴۰۲ غایبین)
۴. حاصل عبارت $100 + \dots + 6 + 4 + 2$ برابر با است. (شهریور ۱۴۰۲)
۵. به کمک شکل های زیر، مجموع n عدد طبیعی اولیه (از ۱ تا n) را به دست آورید. (مشابه فعالیت صفحه ۲ کتاب درسی)



۶. به کمک شکل زیر ثابت کنید مجموع n عدد طبیعی فرد متوالی اولیه، برابر با n^2 است. (مشابه تمرین ۱ صفحه ۶ کتاب درسی)



۷. در هر یک از دنباله های حسابی زیر، مجموع بیست جمله اول را بیابید.

الف) $5, 0, 5, \dots$

ب) $5, -3, -1, \dots$

۸. مجموع جملات دنباله $4, 7, 10, \dots, 100$ را بیابید.

۹. مجموع اعداد طبیعی فرد مضرب ۳ و کوچک تر از ۱۰۰ چقدر است؟

۱۰. مجموع اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۱۵ چقدر است؟ (مشابه تمرین ۲ صفحه ۶ کتاب درسی)

- ۱۱ ☆ در یک دنباله حسابی، هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه $\frac{1}{p}$ بیش تراست. اگر جمله هفتم برابر ۱۳ باشد، مجموع ۲۰ جمله اول دنباله چقدر است؟
- ۱۲ ☆ در یک دنباله حسابی جملات هفتم و دوازدهم به ترتیب ۳۲ و ۱۲ می باشد. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله را بیابید.
- ۱۳ ☆ در دنباله حسابی ۳, ۹, ۱۵, ...، حداقل چند جمله آن را باید با هم جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیش ترشود؟ (مشابه تمرین ۳ صفحه ۶ کتاب درسی و دی ۹۳)
- ۱۴ در یک دنباله حسابی جمله چهارم برابر با ۳ و جمله هفتم برابر با ۱۲ است،
 [آ] جمله اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.
 [ب] حداکثر چند جمله از آن را با هم جمع کنیم، تا حاصل کم تر از ۴۵۰ شود؟
- ۱۵ در دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = 3 - 2n$ ، مجموع n جمله اولیه دنباله (S_n) را بیابید، سپس مجموع ۱۵ جمله اول آن را به دست آورید.
- ۱۶ ☆ اگر مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $S_n = \frac{6n^2 - 5n}{12}$ باشد،
 [آ] قدرنسبت و جمله اول آن را به دست آورید.
 [ب] مجموع ۱۰ جمله اول آن چقدر است؟
- ۱۷ ☆ در یک دنباله حسابی با ۲۰ جمله، مجموع جملات ردیف فرد برابر ۲۴۰ و مجموع جملات ردیف زوج برابر با ۲۷۰ می باشد، جمله اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.
- ۱۸ ☆ در یک دنباله حسابی با ۱۰ جمله، مجموع ۵ جمله اول برابر ۲۵ و مجموع ۵ جمله آخر برابر ۱۰۰ می باشد، جمله اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.
- ۱۹ ☆ در یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 :
 [آ] اگر قدرنسبت یک واحد افزایش یابد، به مجموع ۱۰ جمله اول آن چند واحد افزوده می شود؟
 [ب] اگر همه جملات دو برابر شوند، مجموع ۱۰ جمله اول آن چند برابر می شود؟
- ۲۰ مجموع چند عدد طبیعی اولیه، $\frac{3}{5}$ مربع تعداد آن ها می باشد؟
- ۲۱ ☆ بر روی محیط یک دایره n نقطه قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می کنیم. اگر تعداد کل پاره خط های ایجاد شده برابر ۵۵ باشد، تعداد این نقاط چند تا است؟ (این مسئله را به دو روش حل کنید.)
- ۲۲ یک موسسه خیریه در اولین سال فعالیت خود ۵۰۰ خانوار را تحت پوشش خود دارد. اگر هدف این موسسه آن باشد که هر سال ۴۰ خانوار را به اعضای تحت پوشش خود بیفزاید، پس از ۱۰ سال مجموعاً چند خانوار را تحت پوشش خواهد داشت؟
- ۲۳ ☆ یک مسابقه دو، طوری طراحی شده که از کنار یک سید شروع به دویدن کرده، در ایستگاه اول یک توپ برداشته، برمی گردیم و در سید می اندازیم و سپس تا ایستگاه دوم رفته و دو توپ برمی داریم، برمی گردیم و در سید می اندازیم و به همین ترتیب تا ایستگاه n ام رفته، n توپ برمی داریم و برمی گردیم در سید می اندازیم. اگر دونه ای در مجموع ۵۵ توپ در سید انداخته باشد و فاصله بین هر دو ایستگاه متوالی و هم چنین ایستگاه اول تا سید، ۲ متر باشد، مجموع مسافت های طی شده توسط این دونه را بیابید.

مجموع جملات دنباله هندسی

صفحه ۴ تا ۷ کتاب درسی

بسته دوم



قبل از این که یاد بگیریم چه طور و با چه فرمولی مجموع جملات به دنباله هندسی رو به دست بیاریم، لازم می دونم که یادآوری کوچیکی از دنباله های هندسی داشته باشیم.

یادآوری از دنباله های هندسی

جملات دنباله های هندسی از ضرب عددی ثابت و مخالف صفر در جمله قبل آن به دست می آیند:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots \Rightarrow a_n = a_1q^{n-1}$$

a_n جمله عمومی (n ام) و q قدرنسبت دنباله می باشد.

بنابراین نسبت هر دو جمله متوالی در دنباله هندسی، برابر با قدرنسبت دنباله است:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \Rightarrow \frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$$

نکته! اگر a, b, c سه جمله متوالی از دنباله هندسی با جملات مثبت باشند، b را واسطه هندسی a و c می گویند و داریم: $b^2 = ac$ یا $b = \sqrt{ac}$

سؤال مقادیر x و y را در دنباله هندسی $\dots, \frac{1}{4}, y, x, 4$ بیابید.

پاسخ روش اول

$$\frac{1}{4}, x, y, \frac{1}{4}, \dots \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} \begin{cases} x^2 = 4y \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} \\ y^2 = \frac{1}{4}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{x^4}{16} = \frac{x}{4} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x^4 = 16x \xrightarrow{x \neq 0} x^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{y = \frac{x^2}{4}} y = \frac{4}{4} = 1$$

روش دوم در دنباله داده شده $a_1 = 4$ و $a_4 = \frac{1}{4}$ است، پس داریم:

$$q^{4-1} = \frac{a_4}{a_1} \Rightarrow q^3 = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = a_1 q = 4\left(\frac{1}{4}\right) = 1 \\ y = x\left(\frac{1}{4}\right) = 1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

مجموع جملات دنباله‌های هندسی

اگر $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی باشد، به کمک روش زیر می‌توان فرمولی برای S_n یافت:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} \quad (*)$$

طرفین رابطه بالا را در q ضرب می‌کنیم:

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \quad (**)$$

حالا اگر طرفین دو رابطه را از هم کم کنیم، داریم:

$$(**) - (*) \rightarrow qS_n - S_n = (a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n) - (a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1})$$

$$\Rightarrow \underbrace{qS_n - S_n}_{S_n} = \underbrace{a_1 q^n - a_1}_{a_1} \Rightarrow S_n (q-1) = a_1 (q^n - 1) \Rightarrow S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1}$$

توجه کنید که فرقی نمی‌کند بنویسیم $S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1}$ یا $S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}$! آنگاه گفتین چرا؟

مشابه کار در کلاس صفحه ۵ کتاب درسی

سؤال مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی $\dots, 1, 2, \frac{1}{4}$ ، چند برابر جمله اول آن است؟

پاسخ

$$\frac{1}{4}, 1, 2, \dots \Rightarrow q = 2, a_1 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{a_1 (q^{10} - 1)}{q-1} = \frac{\frac{1}{4} (2^{10} - 1)}{2-1} = \frac{1}{4} (1024 - 1) = \frac{1023}{4} \Rightarrow \frac{S_{10}}{a_1} = \frac{\frac{1023}{4}}{\frac{1}{4}} = 1023$$

سؤال در یک دنباله هندسی، مجموع ۱۰ جمله اول برابر ۶۶ و مجموع ۵ جمله اول برابر ۶۴ است. قدرنسبت دنباله را بیابید.

پاسخ

$$\begin{cases} S_{10} = \frac{a_1 (q^{10} - 1)}{q-1} = 66 \\ S_5 = \frac{a_1 (q^5 - 1)}{q-1} = 64 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم.}} \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{\frac{a_1 (q^{10} - 1)}{q-1}}{\frac{a_1 (q^5 - 1)}{q-1}} = \frac{66}{64}$$

$$\xrightarrow{\text{دور در دور، نزدیک در نزدیک}} \frac{a_1 (q^{10} - 1) (q-1)}{a_1 (q^5 - 1) (q-1)} = \frac{66}{64} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{(q^5 - 1)(q^5 + 1)}{q^5 - 1} = \frac{66}{64}$$

$$\Rightarrow q^5 + 1 = \frac{66}{64} \Rightarrow q^5 = \frac{66}{64} - 1 \Rightarrow q^5 = \frac{2}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

① $S_1 = a_1$

② $S_n - S_{n-1} = a_n$

برای مجموع n جمله اول دنباله هندسی، یعنی S_n ، نیز رابطه‌های روبه‌رو برقرار است:

نکته

سؤال اگر مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی برابر با $S_n = 2^n - 1$ باشد، جمله اول و قدرنسبت این دنباله را بیابید.

$a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$

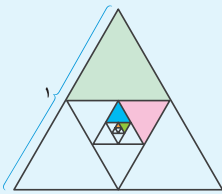
پاسخ روش اول

$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1} (2 - 1) = 2^{n-1}$

$a_n = a_1 q^{n-1} \xrightarrow{a_1=1, a_n=2^{n-1}} 2^{n-1} = 1 \times q^{n-1} \Rightarrow q = 2$

روش دوم

$S_n = 2^n - 1 \begin{cases} \rightarrow S_1 = a_1 = 2 - 1 = 1 \\ \rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = 2^2 - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow 1 + a_2 = 3 \Rightarrow a_2 = 2 \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$



سؤال اگر هر بار وسط اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع روبه‌رو را به هم وصل کنیم، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟

پاسخ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ برابر است با:

$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

در هر مرحله مساحت رنگ شده $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث قبلی است:

$a_1 = \frac{1}{4} S = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$: مساحت مثلث رنگی اول:

$a_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} S \right) = \left(\frac{1}{4} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$: مساحت مثلث رنگی دوم:

$a_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} S \right) \right) = \left(\frac{1}{4} \right)^3 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$: مساحت مثلث رنگی سوم:

⋮

بنابراین با دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\left(\frac{1}{4} \right)$ مواجهیم و مساحت کل قسمت رنگی ایجاد شده برابر است با:

$$S_\infty = a_1 + a_2 + \dots + a_\infty = \frac{a_1(q^\infty - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) \left(\left(\frac{1}{4} \right)^\infty - 1 \right)}{\left(\frac{1}{4} - 1 \right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1 - 4^\infty}{4^\infty}}{-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{341}{-4^6 \times 3} \times \sqrt{3}}{4^0 \cdot 96} = \frac{341\sqrt{3}}{4096}$$

مجموع جملات دنباله هندسی

پرسش‌های تشریحی

بسته
۲

۲۴. در یک دنباله هندسی اگر مجموع ۶ جمله اول ۹ برابر مجموع ۳ جمله اول باشد، مجموع ۱۰ جمله اول چند برابر مجموع ۵ جمله اول است؟

(شهریور ۱۴۰۲ غایبین)

۲۵. طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. پس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از

مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

(شهریور ۱۴۰۲)

● در هر یک از دنباله‌های هندسی زیر، مجموع ۱۰ جمله اول را بیابید.

(خرداد ۹۱، با کمی تغییر)

۲۶ ☆ $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

(شهریور ۹۵، با کمی تغییر)

۲۷ $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots$

۲۸ ☆ $\frac{1}{8}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$

● حاصل عبارات‌های زیر را به دست آورید.

۲۹ ☆ $\frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + \dots + 2048$

۳۰ $-1 - 3 - 9 \dots - 729$

۳۱ ☆ $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{729} - \frac{1}{128}$

(خرداد ۹۰)

۳۲ ☆ مجموع چند جمله اول از دنباله هندسی $6, -12, 24, \dots$ برابر 126 خواهد شد؟

۳۳ در یک دنباله اعداد، هر جمله دو برابر جمله قبلی خود است. اگر مجموع ۵ جمله اول آن برابر $46/5$ باشد، جمله اول دنباله را بیابید.

۳۴ ☆ در یک دنباله هندسی جمله پانزدهم ۸ برابر جمله دوازدهم است. مجموع ۸ جمله اول این دنباله، چند برابر جمله اول آن است؟

۳۵ مجموع ۱۲ جمله اول یک دنباله هندسی ۹ برابر مجموع ۶ جمله اول آن است. قدرنسبت را بیابید.

۳۶ مجموع ۱۰ جمله دوم دنباله هندسی $1, 2, 4, \dots$ چند برابر مجموع ۱۰ جمله اول آن است؟

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۶ کتاب درسی)

۳۷ ☆ جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = 3 \times 2^n$ است،

الف) مجموع ۵ جمله اول آن را بیابید. ب) مجموع چند جمله از این دنباله برابر با 3066 است؟

۳۸ ☆ در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q ، مجموع ۱۰ جمله اول S می باشد،

الف) اگر جمله اول را دو برابر کنیم، مجموع ۱۰ جمله اول چند برابر می شود؟

ب) اگر قدرنسبت را به توان ۲ برسانیم، مجموع ۱۰ جمله اول را بر حسب S و q بیابید.

(مشابه تمرین ۷ صفحه ۶ کتاب درسی)

● درستی هریک از تساوی‌های زیر را اثبات کنید.

۳۹ ☆ $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$

۴۰ $a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - a + 1)$; (n فرد)

۴۱ ☆ $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$

۴۲ اگر ضلع مربع ۱ واحد باشد و در هر مرحله وسط اضلاع مربع را به هم وصل کنیم تا مربع جدیدی

حاصل شود، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



۴۳ ☆ طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم و به همین ترتیب در هر

مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد از سطح مربع رنگ شده است؟

(تمرین ۶ صفحه ۶ کتاب درسی - دی ۹۴)

۴۴ برای از بین بردن ذرات معلق در یک محلول، آن را از صافی‌هایی عبور می‌دهیم. اگر در اثر عبور از هر صافی تعداد ذرات معلق موجود در محلول نصف

شود، حداقل چند صافی نیاز است تا ذرات معلق موجود در محلول، حداقل ۹۶ درصد کاهش یابد؟

۴۵ ☆ یک مثلث با محیط P را در نظر بگیرید و وسط اضلاع آن را به هم وصل کنید تا مثلث کوچک‌تری ایجاد شود. این عمل را به طور متوالی انجام دهید.

(خرداد ۹۴، با کمی تغییر)

مجموع محیط مثلث‌های به دست آمده از مثلث اول تا مثلث دهم، چند برابر P است؟

۴۶ ☆ توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی زمین بخورد، پس از زمین خوردن به اندازه $\frac{1}{3}$ ارتفاع اولیه‌اش بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را به طور قائم از

زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۹ متری برسد. پس از شروع پرتاب تا ۶۰ امین برخورد به زمین، در کل مسافت عمودی طی شده این توپ چه قدر

است؟ (خرداد ۹۰، با کمی تغییر و مشابه مثال صفحه ۵ کتاب درسی)

۴۷ علی می‌خواهد پول خود را پس انداز کند. او روز اول ۳۰۰۰ تومان پس انداز می‌کند و روزهای دیگر میزان آن را ۱۰ درصد نسبت به روز قبل افزایش

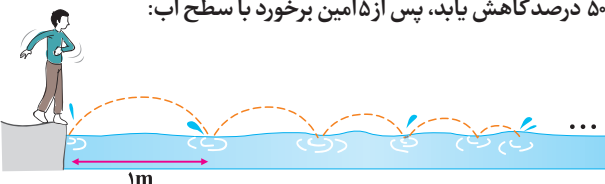
می‌دهد، پس از یک هفته چند تومان پس انداز می‌کند؟ $(1/95) \approx (1/11)$

۴۸ ☆ کودکی سنگی را بر روی سطح آب پرتاب می‌کند. این سنگ در مسیر نیم‌دایره‌هایی به سطح آب برخورد می‌کند. اگر اولین برخورد سنگ با سطح آب

۱ متر جلوتر از کودک باشد و پس از هر برخورد سنگ با آب، قطر نیم‌دایره ۵۰ درصد کاهش یابد، پس از ۵ امین برخورد با سطح آب:

الف) فاصله سنگ تا کودک چقدر است؟ (تا دو رقم اعشار)

ب) سنگ چه مسافتی را پیموده است؟ $(\pi \approx 3/2)$



☆ ۴۹. پدری برای کادوی سالگرد تولد فرزندش، سال اول ۱ سکه، سال دوم ۲ سکه، سال سوم ۴ سکه و به همین ترتیب هر سال دو برابر سال قبل سکه برای او پس انداز می‌کند. اگر بهای هر سکه ۱۰۰۰۰ تومان باشد، وقتی این فرزند به ۱۰ سالگی می‌رسد، چند سکه کادو گرفته و بهای کل آن‌ها چقدر است؟
(مشابه کار در کلاس صفحه ۶ کتاب درسی)

☆ ۵۰. در مسئلهٔ مخترع شطرنج در صفحه ۵ کتاب درسی، اگر وزن هردانهٔ گندم ۱ گرم باشد، نشان دهید این مخترع بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن گندم جایزه دریافت خواهد کرد.
(کار در کلاس صفحه ۶ کتاب درسی)

روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

صفحه ۸ تا ۹ کتاب درسی

بسته سوم



🕒 سال گذشته با معادلهٔ درجه دوم با شکل کلی $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) آشنا شدید و روش‌های مختلف حل اون‌ها رو یاد گرفتید. برای یادآوری به مثال زیر توجه کنید.

سؤال معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

۲ $x^2 + 3x + 2 = 0$ (روش تجزیه)

۱ $(x-1)^2 - 25 = 0$ (ریشه‌گیری)

۴ $3x^2 - x - 2 = 0$ (روش کلی)

۳ $2x^2 + 6x - 3 = 0$ (مربع کامل)

پاسخ ۱ برای حل معادلهٔ درجه دوم به روش ریشه‌گیری آن را به فرم $x^2 = a^2$ درآورده، سپس با شرط $a \geq 0$ ، می‌توان با جذر گرفتن از طرفین تساوی، نتیجه گرفت $x = \pm\sqrt{a}$:

$$(x-1)^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 25 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} x-1 = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 5+1 = 6 \\ x = -5+1 = -4 \end{cases}$$

۲ برای حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه، کافی است عبارت را به کمک فاکتورگیری یا اتحادها، به حاصل ضرب ۲ عبارت درجه اول تجزیه کنیم. سپس به کمک خاصیت حاصل ضرب صفر، هریک از عبارات را برابر صفر قرار دهیم. توجه کنید که در این حالت اگر عبارت تجزیه نشدنی باشد، فاقد ریشه است.

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

۳ برای حل معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل، ابتدا طرفین معادله را به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم:

$$2x^2 + 6x - 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 3x - \frac{3}{2} = 0$$

$$x^2 + 3x = \frac{3}{2}$$

مقدار ثابت را به سمت دیگر معادله می‌بریم:

به طرفین معادله، مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{b}{2})^2$ را اضافه می‌کنیم تا یک طرف به شکل مربع کامل درآید: مربع نصف ضریب x

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4}$$

طرفین را تا حد امکان ساده می‌کنیم و سپس به کمک ریشه‌گیری جواب‌ها را می‌یابیم:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{4} \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} x + \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{2}$$

۴ برای حل معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، به روش کلی (روش Δ)، داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} \Delta < 0 \rightarrow \text{ریشه ندارد.} \\ \Delta = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a} \text{ (ریشه مضاعف)} \\ \Delta > 0 \rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

$$3x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{\substack{a=3, b=-1 \\ c=-2}} \Delta = (-1)^2 - 4(3)(-2) = 1 + 24 = 25 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2(3)} = \frac{1+5}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2(3)} = \frac{1-5}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

نکته! گاهی برای حل یک معادله می‌توان از تغییر متغیر کمک گرفت تا معادله به صورت ساده‌تری تبدیل گردد.

سؤال هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 4 = 0$ ۲
 $(1 - \sqrt{2}x)^2 + \sqrt{2}x = 0$ ۱

پاسخ ۱ وقتی به معادله نگاه می‌کنیم به عبارت ترسناک به شکل $(1 - \sqrt{2}x)^2$ می‌بینیم که یا باید اون رو به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای بازش کنیم یا این که برای از بین بردن ترس فودمون این عبارت رو به متغیر جدید در نظر بگیریم تا شکل اش عوض بشه!

ریشه ندارد. $\Delta < 0 \rightarrow t^2 - t + 1 = 0 \Rightarrow t^2 + 1 - t = 0 \xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \sqrt{2}x = 1 - t \Rightarrow (1 - \sqrt{2}x) = t$

۲ در این معادله عبارت $(x^2 - 1)$ تکرار شده پس اسم این عبارت رو عوض می‌کنیم و به اسم (متغیر) جدید برایش انتخاب می‌کنیم تا معادله شکل ساده تری به فودش بگیره!

$t = x^2 - 1 \xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ t = -4 \Rightarrow x^2 - 1 = -4 \Rightarrow x^2 = -3 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.} \end{cases}$

۳ حالا که مسابی معادله درجه دوم یادتون اومد بریم سراغ مبحث شیرین روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم!

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

گفتیم که در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر $\Delta > 0$ باشد، آن‌گاه معادله دارای دو ریشه α و β است:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

در این صورت می‌توان نوشت:

مجموع ریشه‌ها: $\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

حاصل ضرب ریشه‌ها: $\alpha\beta = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{(2a)^2} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$

$= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

یعنی:

$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$: مجموع ریشه‌ها
 $P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$: حاصل ضرب ریشه‌ها

به کمک روابط بالا می‌توان مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های یک معادله درجه دوم را (در صورت وجود) بدون حل معادله به دست آورد.

سؤال در معادله درجه دوم $2x^2 - 4x + 1 = 0$ ، اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، بدون حل معادله حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$\alpha^2 + \beta^2$ ۴
 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ۳
 $\alpha\beta$ ۲
 $\alpha + \beta$ ۱

۱ $2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow a = 2, b = -4, c = 1$

۲ $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

۳ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \times 2 = 4$

۴ $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 2^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - 1 = 3$



سؤال اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $2x^2 - mx - 3 = 0$ باشد، مقدار m و ریشه دیگر را بیابید.

مشابه کار در کلاس صفحه ۵ و مثال صفحه ۶ کتاب درسی

پاسخ روش اول ریشه معادله در معادله صدق می‌کند:

$$2x^2 - mx - 3 = 0 \xrightarrow{x=-1} 2(-1)^2 - m(-1) - 3 = 0 \Rightarrow 2 + m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3 - 2 = 1$$

حال با جای‌گذاری $m = 1$ داریم:

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 25 \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

روش دوم کافی است از روابط بین ریشه‌ها کمک بگیریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-(-m)}{2} = \frac{m}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{-3}{2} \end{cases} \xrightarrow{x_1=-1} \begin{cases} -1 + x_2 = \frac{m}{2} \\ (-1)(x_2) = \frac{-3}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -1 + \frac{3}{2} = \frac{m}{2} \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 1$$

سؤال در هر مورد m را طوری بیابید که حاصل ضرب ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x + m = 0$.

۱ برابر با ۲ باشد. ۲ برابر با (-۱) باشد.

پاسخ

$$2x^2 - 3x + m = 0 \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = m \end{cases}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 2 = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 4$$

۱

$$2x^2 - 3x + 4 = 0$$

اما توجه کنید که به ازای $m = 4$ معادله فاقد ریشه است:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(4) = 9 - 32 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

پس $m = 4$ قابل قبول نیست. یعنی به ازای هیچ m ای حاصل ضرب ریشه‌ها ۲ نمی‌شود.

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow -1 = \frac{m}{2} \Rightarrow m = -2$$

۲

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

به ازای $m = -2$ معادله دارای دو ریشه است:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25 > 0$$

بنابراین $m = -2$ قابل قبول است.

نکته ! توجه کنید در سؤالات مشابه سؤال بالا که یکی از پارامترها مجهول است و مجموع یا حاصل ضرب ریشه‌ها داده شده، پس از به دست آوردن مقدار

پارامتر مجهول حتماً چک شود که آیا معادله به ازای آن دارای ریشه است و مقدار به دست آمده قابل قبول است یا نه.

نوشتن یک معادله درجه دوم با داشتن ریشه‌های آن

اگر α و β ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، این معادله را می‌توان به صورت‌های روبه‌رو نوشت:

صورت اول: $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

صورت دوم: $\begin{cases} S = \alpha + \beta \\ P = \alpha\beta \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$

توجه کنید که هر ضربی از معادلات بالا نیز دارای ریشه‌های α و β است.

سؤال معادله درجه دومی بنویسید که دارای ریشه‌های ۲ و -۳ باشد.

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - (-3)) = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

پاسخ روش اول

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -3 + 2 = -1 \\ P = \alpha\beta = (-3)(2) = -6 \end{cases} \xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} x^2 + x - 6 = 0$$

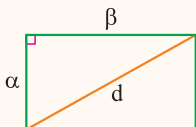
روش دوم

سؤال اگر محیط و مساحت یک مستطیل به ترتیب ۱۶ و ۱۵ باشد،

۱ بدون محاسبه ابعاد مستطیل، طول قطران را بیابید. ۲ با تشکیل معادله درجه دوم، ابعاد مستطیل را بیابید.

$$\begin{cases} \text{محیط: } 2(\alpha + \beta) = 16 \Rightarrow \alpha + \beta = 8 \\ \text{مساحت: } \alpha\beta = 15 \end{cases}$$

پاسخ اگر α و β را طول و عرض این مستطیل در نظر بگیریم، داریم:



$$d^2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 8^2 - 2(15) = 64 - 30 = 34$$

$$\Rightarrow d^2 = 34 \Rightarrow d = \sqrt{34}$$

۱ اگر طول قطر مستطیل برابر d باشد، داریم:

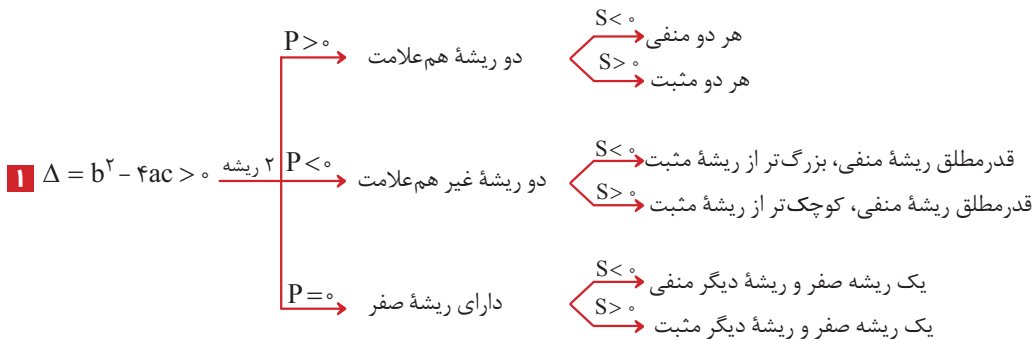
۲ با داشتن $S = \alpha + \beta = 8$ و $P = \alpha\beta = 15$ ، می‌توان نوشت:

$$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{\begin{matrix} S=8 \\ P=15 \end{matrix}} x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4(1)(15) = 64 - 60 = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-(-8) + \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{8+2}{2} = 5: \text{طول} \\ \beta = \frac{-(-8) - \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{8-2}{2} = 3: \text{عرض} \end{cases}$$

تعداد و علامت ریشه‌ها

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، با توجه به علامت Δ و علامت ضرایب a ، b و c ، می‌توان در مورد تعداد و علامت ریشه‌های معادله بدون حل آن اظهار نظر کرد: (S مجموع و P حاصل ضرب ریشه‌های معادله است.)



مثال $2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 17 > 0$ $P = -\frac{1}{2} < 0$ $S = \frac{3}{2} > 0$ → دو ریشه غیر هم‌علامت → قدرمطلق ریشه منفی، کوچک‌تر از ریشه مثبت

مثال $-x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 > 0$ $P = 3 > 0$ $S = 4 > 0$ → دو ریشه هم‌علامت → هر دو ریشه مثبت است.

🕒 **یادآوری** به وقت نیابین همه مطالب گفته شده رو حفظ کنید! خیلی راحت فوتون می‌تونین با به کار گرفتن مغزتون و به کویپولو استفاده از استدلال، به نتایج گفته شده برسین. کافیه به بار امتحان کنین. به ترتیب از علامت Δ ، بعدش علامت P و در نهایت علامت S می‌تونین نتیجه‌های بالا رو به دست بیارین.

۲ $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ ریشه مضاعف منفی $S < 0$
 ریشه مضاعف مثبت $S > 0$

مثال $ax^2 - 2ax + a = 0 \Rightarrow \Delta = 4a^2 - 4a(a) = 0 \xrightarrow{S=2>0}$ ریشه مضاعف مثبت دارد.

۳ $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ ریشه ندارد.

نکته! چند نکته در مورد معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

- ۱ اگر $b = 0$ باشد، با شرط $ac < 0$ معادله دارای دو ریشه قرینه است.
- ۲ اگر $a = c$ باشد، با شرط $\Delta > 0$ معادله دارای دو ریشه معکوس است.
- ۳ اگر $a = -c$ باشد، معادله دارای دو ریشه قرینه و معکوس است.
- وقتی a و c هم علامت نباشن هتماً معادله ۲ تا ریشه رو داره! (به نظر تون پیرا؟)
- ۴ اگر $a + b + c = 0$ باشد، (مجموع ضرایب صفر باشد). معادله دارای دو ریشه $x_1 = 1$ و $x_2 = \frac{c}{a}$ می باشد.
- ۵ اگر $a + c = b$ باشد، معادله دارای دو ریشه $x_1 = -1$ و $x_2 = -\frac{c}{a}$ می باشد.

سؤال در مورد ریشه‌های معادلات زیر بحث کنید.

۱ $-3x^2 + 2x + 1 = 0$ ۲ $2x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$ ۳ $6x^2 + 5x - 1 = 0$ ۴ $-x^2 + 3x + 1 = 0$

۱ $-3x^2 + 2x + 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$

۲ $2x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{P > 0, \Delta > 0} S > 0$ هر دو ریشه مثبت است. معادله دارای دو ریشه هم علامت است.

۳ $6x^2 + 5x - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a} = \frac{-(-1)}{6} = \frac{1}{6}$

۴ $-x^2 + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{a=-c} S > 0$ معادله دارای دو ریشه قرینه و معکوس. کوچک تر از ریشه مثبت

می‌تونیم بگیریم ریشه‌های این معادله به صورت α و $\frac{-1}{\alpha}$ که $\alpha > 1$ است! آگه گفتین پیرا؟

روابط بین ریشه‌های معادله درجه دوم

پرسش‌های تشریحی

بسته
۳

در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۵۱. حاصل ضرب ریشه‌های معادله $4x^2 + 3x - 8 = 0$ برابر با است. (شهریور ۱۴۰۲)

۵۲. معادله درجه دوم دارای ریشه‌های $3 \pm 2\sqrt{5}$ است. (خرداد ۱۴۰۲ نوبت صبح)

۵۳. معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید. ☆

آ $6x^2 - 30x = 0$ (تجزیه) ب $x^2 - 3x + 2 = 0$ (تجزیه)

پ $(x-3)^2 - 16 = 0$ (ریشه‌گیری) ت $x^2 + 6x - 7 = 0$ (مربع کامل)

ث $4x^2 + 12x + 5 = 0$ (مربع کامل) ج $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (روش کلی)

ج $x^2 + 3x + 5 = 0$ (روش کلی)

معادلات زیر را حل کنید. ☆

۵۴. $(2 + \sqrt{2})x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2} - 2) = 0$ ۵۵. $(2 - \sqrt{2})x^2 + 4x + (\sqrt{2} + 2) = 0$

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

۵۶. $(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$ (شهریور ۹۵) ☆ ۵۷. $(\frac{x^2}{2} - 1)^2 + (\frac{x^2}{2} - 1) - 2 = 0$ (شهریور ۹۵)

۵۸. $(x^2 - 1)^4 + (x^2 - 1)^2 - 2 = 0$ (شهریور ۹۲) ☆ ۵۹. $(\frac{x^2}{3} - 2)^2 - 11(\frac{x^2}{3} - 2) + 10 = 0$ (دی ۹۱)

۶۰. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، بدون محاسبه ریشه‌ها، حاصل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ را بیابید.

۶۱. اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 8x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$ را بیابید.

۳

بخش



پاسخنامه

۶ | با توجه به الگوی داده شده می توان نوشت:

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

$$\vdots$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

مجموع n عدد طبیعی فرد اولیه

۷ | با یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = -5$ و قدرنسبت $d = -(-5) = 5$ مواجه ایم. بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\xrightarrow{n=20} S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = \frac{a_1 = -5}{d=5} \frac{20}{2}(2(-5) + 19(5))$$

$$\Rightarrow S_{20} = 10(-10 + 95) = 10 \times 85 = 850$$

ب) با یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = -5$ و قدرنسبت $d = -3 - (-5) = 2$ مواجه ایم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\xrightarrow{n=20} S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = \frac{a_1 = -5}{d=2} \frac{20}{2}(2(-5) + 19(2))$$

$$\Rightarrow S_{20} = 10(-10 + 38) = 10 \times 28 = 280$$

۸ | $1, 3, 5, \dots, 100$

دنباله حسابی با $a_1 = 1$ و قدرنسبت $d = 2$ می یابیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 100 = 1 + (n-1) \times 2 \Rightarrow 2(n-1) = 99 \Rightarrow n-1 = 49.5 \Rightarrow n = 50.5$$

حالا تعداد جملات دنباله را می یابیم:

$$a_n = 100 \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} 100 = 1 + (n-1) \times 2 \Rightarrow 2(n-1) = 99 \Rightarrow n-1 = 49.5 \Rightarrow n = 50.5$$

$$\Rightarrow n-1 = \frac{99}{2} = 49.5 \Rightarrow n = 50.5$$

$$\Rightarrow S_{50} = \frac{50}{2}(1 + 100) = \frac{50}{2} \times 101 = 2525$$

۹ | $3, 6, 9, \dots, 99$

دنباله حسابی با $a_1 = 3$ و قدرنسبت $d = 3$ می یابیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 99 = 3 + (n-1) \times 3 \Rightarrow 3(n-1) = 96 \Rightarrow n-1 = 32 \Rightarrow n = 33$$

$$\Rightarrow S_{33} = \frac{33}{2}(3 + 99) = \frac{33}{2} \times 102 = 1683$$

$$S_{17} = \frac{17}{2}(a_1 + a_{17}) = \frac{17}{2}(3 + 99) = \frac{17 \times 102}{2} = 867$$

۱ | $x, y, 12, \dots \Rightarrow d = 5 \Rightarrow x + 5 = y \Rightarrow x = y - 5 \Rightarrow a_1 = y - 5$

فرض کنیم مجموع n جمله از دنباله حسابی برابر با ۶۰ باشد:

$$S_n = 60 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 60$$

$$\xrightarrow{a_1 = y-5, d=5} \frac{n}{2}(2(y-5) + (n-1)(5)) = 60$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(4 + 5n - 5) = 60 \Rightarrow \frac{n}{2}(5n - 1) = 60 \Rightarrow 5n^2 - n - 120 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(5)(-120) = 1 + 2400 = 2401 = 49^2$$

$$\Rightarrow n = \frac{-(-1) \pm 49}{2(5)} = \frac{1 \pm 49}{10} \xrightarrow{n > 0} n = \frac{1 + 49}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

۲ | $S_n > 400 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) > 400$

$$\xrightarrow{a_1 = 4, d=8} \frac{n}{2}(2(4) + (n-1)8) > 400$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(8 + 8(n-1)) > 400$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} \times 8(1 + n - 1) > 400 \Rightarrow 4n^2 > 400$$

$$\Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10 \Rightarrow n \geq 11$$

۳ | $1, 3, 5, 7, \dots, 199$

حال باید تعداد جملات را بیابیم:

$$a_n = 199 \Rightarrow a_1 + (n-1)d = 199$$

$$\xrightarrow{a_1 = 1, d=2} 1 + (n-1) \times 2 = 199 \Rightarrow 2(n-1) = 198$$

$$\Rightarrow n-1 = 99 \Rightarrow n = 100$$

حال مجموع جملات را می یابیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{100}{2}(1 + 199) = \frac{100 \times 200}{2} = 10000$$

۴ | $2, 4, 6, \dots, 100$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 2 \\ n = 50 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{50} = \frac{50}{2}(2 + 100) = 50 \times 51 = 2550$$

۵ | با توجه به الگوی داده شده می توان نوشت:

$$2(1) = 1 \times 2$$

$$2(1+2) = 2 \times 3$$

$$2(1+2+3) = 3 \times 4$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow 2(1+2+\dots+n) = n \times (n+1) \Rightarrow 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۱۴ | آ

$$\begin{cases} a_4 = 3 \\ a_n - a_m = (n-m)d \end{cases} \rightarrow a_4 - a_1 = (4-1)d$$

$$\Rightarrow 3 - 12 = (-3)d \Rightarrow d = \frac{-9}{-3} = 3$$

حالا با جای‌گذاری در رابطه a_4 یا a_1 مقدار a_1 را می‌یابیم:

$$a_4 = a_1 + 3d = 3 \Rightarrow a_1 + 3(3) = 3 \Rightarrow a_1 = 3 - 9 = -6$$

$$S_n < 450 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) < 450$$

$$\frac{a_1 = -6}{d = 3} \rightarrow \frac{n}{2}(2(-6) + (n-1)(3)) < 450$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از 3}} \frac{3n}{2}(n-5) < 450$$

$$\times \frac{2}{3} \rightarrow n(n-5) < 300 \Rightarrow n^2 - 5n - 300 < 0$$

$$\Rightarrow (n-20)(n+15) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -15 < n < 20$$

$$\xrightarrow{n > 0} n < 20 \Rightarrow n \leq 19$$

حداکثر ۱۹ جمله را می‌توانیم با هم جمع کنیم تا حاصل کم‌تر از ۴۵۰ شود.

۱۵ | ب

$$a_n = 3 - 2n \Rightarrow a_1 = 3 - 2 = 1$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + 3 - 2n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(-2n + 4) \xrightarrow{\text{فاکتور از 2}} \frac{2n}{2}(-n + 2) = n(2 - n)$$

$$\Rightarrow S_{15} = 15(2 - 15) = 15 \times (-13) = -195$$

روش دوم

$$a_n = 3 - 2n \begin{cases} n=1 \rightarrow a_1 = 3 - 2 = 1 \\ n=15 \rightarrow a_{15} = 3 - 2(15) = 3 - 30 = -27 \end{cases}$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2}(1 - 27) = \frac{15 \times (-26)}{2} = -195$$

۱۶ | آ

$$S_n = \frac{6n^2 - 5n}{12} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = a_1 = \frac{6-5}{12} = \frac{1}{12} \\ S_2 = a_1 + a_2 = \frac{6(4) - 5(2)}{12} = \frac{14}{12} \end{cases}$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = \frac{14}{12} - \frac{1}{12} = \frac{13}{12}$$

$$d = a_2 - a_1 = \frac{13}{12} - \frac{1}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

$$S_{10} = \frac{6(10)^2 - 5(10)}{12} = \frac{600 - 50}{12} = \frac{550}{12} = \frac{275}{6}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 5(2(\frac{1}{12}) + 9(1)) = 5(\frac{55}{6}) = \frac{275}{6}$$

ب

و یا:

۱۰ | اعداد بخش پذیر بر ۱۵، بر ۳ و ۵ بخش پذیرند و اولین عدد طبیعی

سه رقمی که بر ۳ و ۵ بخش پذیر باشد، ۱۰۵ است. $\xrightarrow{+15, +15}$ ۱۰۵، ۱۲۰، ۱۳۵، ...

برای یافتن تعداد اعداد طبیعی سه رقمی بخش پذیر بر ۱۵ داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d < 1000 \Rightarrow 105 + (n-1)(15) < 1000$$

$$\Rightarrow 15n + 90 < 1000 \Rightarrow 15n < 910 \Rightarrow n < \frac{910}{15} \approx 60.6 \Rightarrow n \leq 60$$

بنابراین داریم:

$$S_{60} = \frac{60}{2}(2a_1 + 59d) = \frac{60}{2}(2(105) + 59(15))$$

$$= 30(210 + 885) = 32850$$

$$a_n = a_{60} = 105 + 59(15) = 990$$

و یا می‌توان گفت:

$$\Rightarrow S_{60} = \frac{60}{2}(a_1 + a_{60}) = 30(105 + 990) = 32850$$

۱۱ | چون هر جمله از جمله قبلی به اندازه $\frac{1}{3}$ بیش‌تر است، پس

قدرنسبت دنباله حسابی برابر $d = \frac{1}{3}$ است و چون $a_1 = 13$ ، پس داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 13 + (n-1)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow a_1 + 3 = 13 \Rightarrow a_1 = 13 - 3 = 10$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \xrightarrow{\substack{a_1=10 \\ d=\frac{1}{3}}} 10(2(10) + 19(\frac{1}{3}))$$

$$= 10(20 + 9\frac{1}{3}) = 295$$

۱۲ |

$$\begin{cases} a_7 = 32 \\ a_n - a_m = (n-m)d \end{cases} \rightarrow a_7 - a_{12} = (7-12)d$$

$$\Rightarrow 32 - 12 = -5d \Rightarrow d = -4$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 32 \xrightarrow{d=-4} a_1 + 6(-4) = 32 \Rightarrow a_1 = 32 + 24 = 56$$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}(2a_1 + 14d) = \frac{15}{2}(2(56) + 14(-4))$$

$$= \frac{15}{2}(112 - 56) = \frac{15}{2} \times 56 = 420$$

۱۳ |

$\xrightarrow{+6, +6}$ ۳، ۹، ۱۵، ... $\Rightarrow a_1 = 3$ و $d = 6$ دنباله حسابی با ۳۰۰ جمله

می‌خواهیم مجموع جملات بیشتر از ۳۰۰ شود:

$$S_n > 300 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) > 300$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(2(3) + (n-1)(6)) > 300$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(6 + 6(n-1)) > 300 \xrightarrow{\text{فاکتور از 6}} \frac{6n}{2}(1 + n - 1) > 300$$

$$\Rightarrow 3n^2 > 300 \Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10 \Rightarrow n \geq 11$$

حداقل ۱۱ جمله را باید با هم جمع کنیم.

حالا با دو برابر شدن جملات و دنباله، خواهیم داشت:

$$S'_1 = \frac{1}{2} (2a_1 + 2a_{10}) = 2 \left(\frac{1}{2} (a_1 + a_{10}) \right) = 2S_1 \Rightarrow \text{برابر می شود.} \Rightarrow \text{فاکتور از ۲}$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{3}{5} n^2 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n^2}{5} \quad | \quad 20$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 + n}{2} = \frac{3n^2}{5} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \Delta n^2 + \Delta n = 6n^2$$

$$\Rightarrow n^2 - \Delta n = 0 \Rightarrow n(n - \Delta) = 0 \xrightarrow{n \neq 0} n = \Delta$$

۲۱ | روش اول | از نقطه اول به (n-1) نقطه دیگر وصل می کنیم

← (n-1) پاره خط

از نقطه دوم به (n-2) نقطه دیگر (همه به غیر از نقطه اول) وصل

می کنیم. ← (n-2) پاره خط

از نقطه سوم به (n-3) نقطه دیگر (همه به غیر از نقاط اول و دوم) وصل می کنیم.

← (n-3) پاره خط

با ادامه این روند، تعداد پاره خط های ایجاد شده برابر است با:

$$\text{تعداد کل پاره خط ها} = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1$$

مجموع (n-1) عدد طبیعی اولیه ⇒

$$\Rightarrow \text{تعداد پاره خط ها} = \frac{(n-1)}{2} ((n-1) + 1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

می دانیم تعداد پاره خط ها ۵۵ تا است:

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 55 \Rightarrow n(n-1) = 110$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 11 \times 10 \Rightarrow n = 11$$

روش دوم | ترکیبیات: برای داشتن هر پاره خط کافی است دو نقطه از این n

نقطه را انتخاب کنیم، در نتیجه:

$$\text{تعداد پاره خط ها} = \binom{n}{2} = 55 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 55$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 110 = 11 \times 10 \Rightarrow n = 11$$

۲۲ | با یک دنباله حسابی مواجه ایم که:

$$a_1 = 500, d = 40$$

می خواهیم مجموع خانوارهای تحت پوشش را پس از ۱۰ سال بیابیم:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{10} = \frac{1}{2} (2a_1 + 9d)$$

$$= 5(2(500) + 9(40))$$

$$\Rightarrow S_{10} = 5(1000 + 360) = 1360 \times 5 = 6800 \text{ خانوار}$$

$$+ d + d + d \quad | \quad 17$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{20}$$

بنابراین داریم:

مجموع ۱۰ جمله از دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت $2d$

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = 240 \\ a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = 270 \end{cases}$$

مجموع ۱۰ جمله از دنباله حسابی با جمله اول a_2 و قدرنسبت $2d$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} (2a_1 + 9(2d)) = 240 \\ \frac{1}{2} (2a_2 + 9(2d)) = 270 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta (2a_1 + 18d) = 240 \\ \Delta (2a_1 + 2d + 18d) = 270 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div 5} \begin{cases} 2a_1 + 18d = 48 \\ 2a_1 + 20d = 54 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم}} 20d - 18d = 54 - 48$$

$$\Rightarrow 2d = 6 \Rightarrow d = 3$$

$$\xrightarrow{2a_1 + 18d = 48} 2a_1 + 18(3) = 48 \Rightarrow 2a_1 = 48 - 54 = -6$$

$$\Rightarrow a_1 = -3$$

۱۸ |

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_5 = 25 \Rightarrow \frac{5}{2} (2a_1 + 4d) = 25 \\ a_6 + \dots + a_{10} = 100 \Rightarrow \frac{5}{2} (2a_6 + 4d) = 100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} \times 2(a_1 + 2d) = 25 \Rightarrow \Delta (a_1 + 2d) = 25 \\ \frac{5}{2} \times 2(a_6 + 2d) = 100 \Rightarrow \Delta (a_1 + 5d + 2d) = 100 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div 5} \begin{cases} a_1 + 2d = 5 \\ a_1 + 7d = 20 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم}} 7d - 2d = 20 - 5 \Rightarrow 5d = 15$$

$$\Rightarrow d = 3 \xrightarrow{a_1 + 2d = 5} a_1 + 2(3) = 5 \Rightarrow a_1 = 5 - 6 = -1$$

۱۹ | دنباله حسابی را با جمله اول a_1 و قدرنسبت d در نظر می گیریم، داریم:

$$S_{10} = \frac{1}{2} (2a_1 + 9d) = 5(2a_1 + 9d)$$

حال اگر به قدرنسبت یک واحد اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$S'_{10} = \frac{1}{2} (2a_1 + 9(d+1)) = 5(2a_1 + 9d + 9) = 5(2a_1 + 9d) + 45$$

$$\Rightarrow S'_{10} - S_{10} = 45 \Rightarrow \text{واحد افزوده می شود.}$$

ب) اگر a_1 و a_{10} به ترتیب جمله اول و دهم دنباله باشند، داریم:

$$S_{10} = \frac{1}{2} (a_1 + a_{10})$$

۲۶

دنباله هندسی با $a_1 = \frac{1}{3}$ و $q = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{10} - 1 \right)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3^{10}} - 1 \right)}{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1 - 3^{10}}{3^{10}} \right)}{-\frac{2}{3}} = \frac{1 - 3^{10}}{3^{10} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{3^{10} - 1}{2 \times 3^{10}}$$

۲۷

دنباله هندسی با $a_1 = \frac{1}{5}$ و $q = \frac{1}{5}$ $\Rightarrow \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots$

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{5} \left(\left(\frac{1}{5}\right)^{10} - 1 \right)}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5^{10}} - 1 \right)}{-\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{1 - 5^{10}}{5^{10}} \right)}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5^{10} - 1}{4 \times 5^{10}}$$

۲۸

دنباله هندسی با $a_1 = \frac{1}{8}$ و $q = -2$ $\Rightarrow \frac{1}{8}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{8} \left((-2)^{10} - 1 \right)}{-2 - 1} = \frac{\frac{1}{8} (2^{10} - 1)}{-3}$$

$$= \frac{1024 - 1}{-3 \times 8} = -\frac{1023}{24} = -\frac{341}{8}$$

۲۹

دنباله هندسی با $a_1 = \frac{1}{2}$ و $q = 2$ $\Rightarrow \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots, 2048$

حالا تعداد جملات دنباله را می‌یابیم:

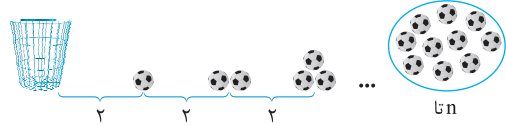
$$a_n = 2048 \Rightarrow a_1 q^{n-1} = 2048 \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{2}, q = 2} \frac{1}{2} \times 2^{n-1} = 2048$$

$$\Rightarrow 2^{n-2} = 2^{11} \Rightarrow n - 2 = 11 \Rightarrow n = 13$$

$$\Rightarrow \frac{S_{13}}{2} = \frac{a_1(q^{13} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2}(2^{13} - 1)}{2 - 1} = \frac{2^{13} - 1}{2}$$

$$= \frac{8192 - 1}{2} = \frac{8191}{2} = 4095.5$$

۲۳



مجموع توپ‌هایی که دونده در سید انداخته ۵۵ تا است، بنابراین داریم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 55 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 55$$

$$\Rightarrow n(n+1) = 110 = 10 \times 11 \Rightarrow n = 10$$

یعنی دونده تا ایستگاه ۱۰ عملیات رفت و برگشت را انجام داده است و مسافت طی شده توسط او برابر است با:

$$2 \times 2 = 4 \text{ برای ایستگاه اول}$$

$$4 \times 2 = 8 \text{ برای ایستگاه دوم}$$

$$6 \times 2 = 12 \text{ برای ایستگاه سوم}$$

$$\vdots$$

$$S_{10} = \frac{10 \times 4}{2} = 20 \text{ متر}$$

۲۴

اگر قدر نسبت دنباله q را در نظر بگیریم، با شرط $q \neq 1$ داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 9(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$\Rightarrow \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = 9 \times \frac{a_1(q^3 - 1)}{q - 1}$$

$$\Rightarrow (q^6 - 1) = 9(q^3 - 1) \Rightarrow (q^3 - 1)(q^3 + 1) = 9(q^3 - 1)$$

اتحاد مزدوج

$$\Rightarrow q^3 + 1 = 9 \Rightarrow q^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow q = 2$$

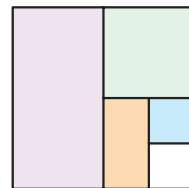
بنابراین داریم:

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = \frac{(q^5 - 1)(q^5 + 1)}{(q - 1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)} = q^5 + 1$$

$$\xrightarrow{q=2} \frac{S_{10}}{S_5} = 2^5 + 1 = 32 + 1 = 33$$

۲۵

مقدار مساحت رنگ شده در هر مرحله



تشکیل دنباله هندسی می‌دهد:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$$

بنابراین داریم:

$$S_n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \geq \frac{99}{100}$$

$$\frac{a_1 = \frac{1}{2}}{q = \frac{1}{2}} \rightarrow \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1 - \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 7$$

بنابراین دست کم پس از ۷ مرحله، حداقل ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.