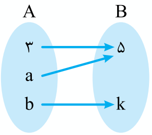
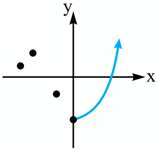
فصل دوم

تابع

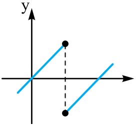
۱۳ تعریف تابع

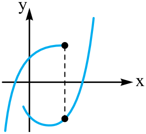
رابطهٔ تعریف‌شده از مجموعهٔ A به B زمانی تابع است که به هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B (نه بیشتر نه کم‌تر) نظیر شود. روش‌های مختلف نمایش رابطه و شرط تابع‌بودن آن‌ها در جدول زیر آمده است:

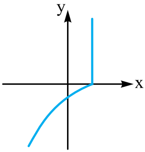
نوع رابطه	شرط تابع‌بودن رابطه	مثال
۱) زوج مرتبی	در بین زوج مرتب‌ها، مؤلفهٔ اول تکراری موجود نباشد مگر این‌که مؤلفهٔ دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشد. تکراری‌بودن مؤلفهٔ دوم ایرادی ندارد.	$f=\{(۱,۲),(۳,۴),(۵,۴)\}$
۲) نمودار پیکانی	از هر یک از اعضای مجموعهٔ A، دقیقاً یک پیکان خارج شود. این‌که به اعضای مجموعهٔ B، بیش از یک پیکان وارد شود ایرادی ندارد.	
۳) جدولی	در ردیف یا ستون مربوط به متغیر x، مؤلفهٔ تکراری نداشته باشیم.	x: کریم، مهدی، پرسپولیس، علی y: ۶، ۲، ۶، ۸

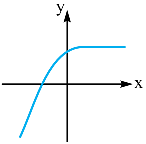
نوع رابطه	شرط تابع‌بودن رابطه	مثال
۴) مختصاتی (نموداری)	آزمون خط عمودی: هر خط عمودی با هر طولی، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.	
۵) توصیفی	توصیف نسبت داده‌شده به یک عبارت، دقیقاً واحد باشد.	رابطه‌ای که به هر فرد کد ملی او را نسبت می‌دهد.
۶) ضابطهٔ جبری	به فرم $\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$ نمایش داده می‌شود که A دامنه و $y = f(x)$ ضابطهٔ آن است. به ازای هر ورودی (دامنه) دقیقاً یک خروجی (برد) وجود داشته باشد.	$\begin{cases} f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 3x - 1 \end{cases}$

تست کدام نمودار، نمایش یک تابع $y = f(x)$ است؟ (خارج ۹۸)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ **گزینهٔ ۴** در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) حداقل یک خط عمودی وجود دارد، که با نمودار تابع بیش از یک برخورد داشته باشد.

تست اگر $f=\{(۱,x-۲y),(۲,۳),(۹,۵),(۱,-۷),(۹,x+y)\}$ یک تابع باشد، مقدار $x^۲+y^۲$ چند برابر $-x-۴y$ است؟ (سراسری ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

پاسخ **گزینهٔ ۳** رابطهٔ داده‌شده تابع است و نباید بین زوج مرتب‌ها مؤلفهٔ اول تکراری وجود داشته باشد؛ مگر این‌که مؤلفهٔ دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند؛ بنابراین مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌های $(۱,x-۲y),(۱,-۷)$ را با هم و مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌های $(۹,۵),(۹,x+y)$ را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x+y=۵ \xrightarrow{\times ۲} \\ x-۲y=-۷ \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} ۲x+\cancel{۲y}=۱۰ \\ x-\cancel{۲y}=-۷ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x=۳ \Rightarrow x=۱ \\ x+y=۵ \xrightarrow{x=۱} ۱+y=۵ \Rightarrow y=۴ \end{cases}$$

در نهایت داریم:

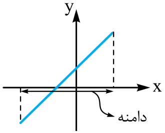
$$\frac{x^۲+y^۲}{-x-۴y}=\frac{۱+۱۶}{-۱-۱۶}=\frac{۱۷}{-۱۷}=-۱$$

۱۴ مقدار، دامنه و برد تابع

مقدار خروجی تابع به ازای هر مقدار مشخص ورودی را «مقدار تابع» می‌گوییم. به مجموعهٔ متشکل از مقادیر ورودی و خروجی تابع به ترتیب، دامنه (D) و برد (R) می‌گوییم. در نمایش‌های مختلف تابع، دامنه و برد به صورت صفحهٔ بعد به دست می‌آید:

دامنـه

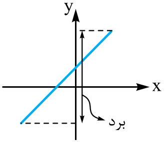
- **زوج مرتب**: مجموعهٔ متشکل از مؤلفه‌های اول
- **نمودار پیکانی**: مجموعه‌ای که پیکان از اعضای آن خارج می‌شود.
- **جدول**: مجموعهٔ مربوط به متغیر x
- **مختصاتی**: مجموعه اعدادی که نمودار، روی محور xها پوشش می‌دهد.



- **ضابطهٔ جبری**: مجموعه‌ای (بازه یا فاصله) از اعداد که می‌توان آن‌ها را به عنوان مقادیر ورودی به تابع داد.

بـرد

- **زوج مرتب**: مجموعهٔ متشکل از مؤلفه‌های دوم
- **نمودار پیکانی**: مجموعهٔ B که پیکان به اعضای آن‌ها وارد می‌شود.
- **جدول**: مجموعهٔ مربوط به متغیر y
- **مختصاتی**: مجموعه اعدادی که نمودار، روی محور yها پوشش می‌دهد.



- **ضابطهٔ جبری**: مجموعه‌ای (بازه یا فاصله) از اعداد که به ازای مقادیر ورودی از تابع خارج می‌شود.

تست **اگر در تابع** $\begin{cases} f: A \to B \\ f(x) = \dfrac{۳x - ۱}{x - ۲} \end{cases}$ **مجموعهٔ** $A = \{-۳, ۱, ۳, ۷\}$ **باشد، مجموع اعضای برد تابع f کدام است؟**

۱) ۱۲ ۲) صفر ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ گزینهٔ ۱ اعضای مجموعهٔ A دامنهٔ تابع f هستند؛ بنابراین آن‌ها را به عنوان ورودی به تابع f داده و مقدار تابع را به دست می‌آوریم. مقادیر به دست آمده مجموعه برد تابع f را تشکیل می‌دهند.

$$\left.\begin{array}{l} f(-۳)=\dfrac{۳(-۳)-۱}{-۳-۲}=\dfrac{-۱۰}{-۵}=۲ \\ f(۱)=\dfrac{۳(۱)-۱}{۱-۲}=\dfrac{۲}{-۱}=-۲ \\ f(۳)=\dfrac{۳(۳)-۱}{۳-۲}=\dfrac{۸}{۱}=۸ \\ f(۷)=\dfrac{۳(۷)-۱}{۷-۲}=\dfrac{۲۰}{۵}=۴ \end{array}\right\} \Rightarrow$$ جمع مقادیر برد $=۲-۲+۸+۴=۱۲$

۱۵ تابع خطی و رسم آن

الف. فرم کلی تابع:

به صورت $f(x)=y=mx+n$ است که در آن m شیب و n عرض از مبدأ را نشان می‌دهد.

خطوط عمودی و افقی را به ترتیب به فرم $x=k$ و $y=h$ $(k,h\in\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم.

ب. نوشتن ضابطه:

با داشتن دو نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ شیب به صورت $m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ به دست می‌آید. با جای‌گذاری m_{AB} و یکی از نقاط A یا B در $y=mx+n$ مقدار n نیز مشخص می‌شود. (اگر از اول m و یک نقطه داشتیم، فقط جای‌گذاری می‌کنیم.)

پ. رابطهٔ بین سه نقطه از یک خط

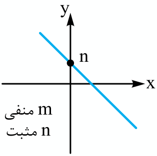
اگر تابع خطی f از نقاط A و B و C عبور کند داریم: $m_{AB}=m_{BC}$

ت. رسم تابع

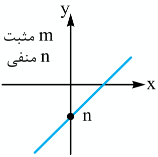
الف. رسم دقیق: دو نقطه از تابع را با مقداردهی می‌یابیم و به هم وصل می‌کنیم.

ب. رسم تقریبی: با پیداکردن مقدار و علامت شیب (m) و عرض از مبدأ (n)، شش حالت داریم: $(m \neq ۰)$

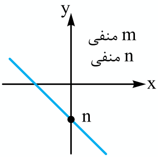
شکل تابع خطی به صورت یک خط صاف است.



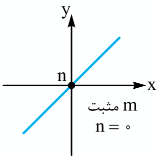
از ناحیهٔ ③ نمی‌گذرد.



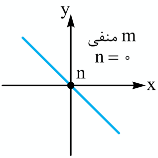
از ناحیهٔ ② نمی‌گذرد.



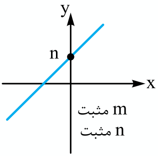
از ناحیهٔ ① نمی‌گذرد.



از ناحیهٔ ② و ④ نمی‌گذرد.



از ناحیهٔ ① و ③ نمی‌گذرد.



از ناحیهٔ ④ نمی‌گذرد.

ث. کاربرد تابع خطی در حل مسائل

در بعضی سؤالات رابطهٔ داده‌شده به صورت خطی است. به عنوان مثال رابطهٔ بین درجهٔ دما برحسب سانتی‌گراد و فارنهایت به صورت $F = \frac{۹}{۵}C + ۳۲$ است.

تست نمودار یک تابع خطی از نقاط $(-۲,a)$، $(-۱,۳)$ و $(۱,-۴)$ می‌گذرد. مقدار a کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۱)

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

پاسخ **گزینهٔ ۲** روش اول: اگر نقاط را به ترتیب $A(-۲,a)$، $B(-۱,۳)$ و $C(۱,-۴)$ فرض کنیم داریم:

$$m_{AB}=m_{BC}\Rightarrow \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}$$

$$\Rightarrow \frac{۳-a}{-۱-(-۲)}=\frac{-۴-۳}{۱-(-۱)}\Rightarrow \frac{۳-a}{۱}=\frac{-۷}{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} ۶-۲a=-۷\Rightarrow ۲a=۱۳\Rightarrow a=۶/۵$$

روش دوم: بین نقاط موجود روی یک خط تناسب خطی برقرار است؛ یعنی به ازای تغییرات مقدار مشخصی از x (ورودی تابع) مقدار مشخصی از y (خروجی یا مقدار تابع) تغییر می‌کند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{ccccc} & \text{ورودی} & & \text{خروجی} & \\ & ۱ & \rightarrow & -۴ & \\ -۲ & & & & +۷ \\ & -۱ & \rightarrow & ۳ & \\ -۱ & & & & k \\ & -۲ & \rightarrow & a & \end{array}$$

حالا بین تغییرات (افزایشی یا کاهشی) تناسب می‌بندیم و مقدار k را می‌یابیم:

$$k=\frac{(-۱)\times(+۷)}{-۲}=\frac{۷}{۲}$$

حالا برای مقدار a داریم:

$$a=۳+k=۳+۳/۵=۶/۵$$

تست **در یک تابع خطی $f(۱)=۵$، $f(۳)=-۹$ است. اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۰\le x\le ۵\}$ دامنهٔ تابع f باشد، برد این تابع کدام است؟**

۱) $-۴۷\le y\le ۷$

۲) $-۲۳\le y\le ۷$

۳) $-۴۷\le y\le ۱۲$

۴) $-۲۳\le y\le ۱۲$

(خارج ۱۴۰۱)

پاسخ **گزینهٔ ۴** با توجه به صورت سؤال تابع از نقاط $(۱,۵)$ و $(۳,-۹)$ عبور می‌کند. شیب را به دست آورده و با جای‌گذاری یکی از

نقاط، ضابطهٔ تابع خطی را به دست می‌آوریم:

$$m=\frac{-۹-۵}{۳-۱}=\frac{-۱۴}{۲}=-۷$$

$$y=mx+n \xrightarrow{m=-۷} y=-۷x+n$$

$$\xrightarrow{(۱,۵)} ۵=-۷(۱)+n \Rightarrow n=۱۲ \Rightarrow y=-۷x+۱۲$$

در تابع خطی می‌توان دو سر بازهٔ مربوط به دامنه $(x=۵, x=۰)$ را به تابع داده و دو سر بازهٔ مربوط به برد را به دست آورد:

$$\begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=-۷(۰)+۱۲=۱۲ \\ x=۵ \Rightarrow y=-۷(۵)+۱۲=-۲۳ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{-۲۳}_{\text{عدد کوچک‌تر}} \leq y \leq \underbrace{۱۲}_{\text{عدد بزرگ‌تر}}$$

تست **اگر دمای تهران در طی تابستان ۱۵ درجهٔ سانتی‌گراد افزایش یابد، میزان افزایش برحسب فارنهایت چند درجه بوده است؟**
$(F=\frac{۹}{۵}C+۳۲)$

۱) ۱۵ ۲) ۲۷ ۳) ۳۲ ۴) ۲۲

پاسخ **گزینهٔ ۲** روش اول: فرض می‌کنیم دمای اولیه $C_۱=۰\ ^\circ C$ سانتی‌گراد بوده و پس از ۱۵ درجه افزایش به $C_۲=۱۵\ ^\circ C$ رسیده است. (توجه کنید دمای اولیه را هر درجه‌ای می‌توانید فرض کنید چون صرفاً تغییرات دما اهمیت دارد)؛ بنابراین:

$$F_۱=\frac{۹}{۵}C_۱+۳۲ \xrightarrow{C_۱=۰} F_۱=\frac{۹}{۵}(۰)+۳۲=۳۲$$

$$F_۲=\frac{۹}{۵}C_۲+۳۲ \xrightarrow{C_۲=۱۵} F_۲=\frac{۹}{۵}(۱۵)+۳۲=۵۹$$

میزان تغییرات دما برحسب فارنهایت برابر $F_۲-F_۱=۲۷$ است.

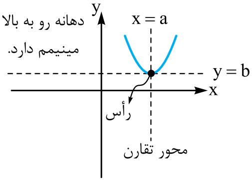
روش دوم: اگر دما به اندازهٔ C درجهٔ سانتی‌گراد تغییر کند، میزان تغییرات دما برحسب فارنهایت از رابطهٔ $F=\frac{۹}{۵}C$ به دست می‌آید. بنابراین:

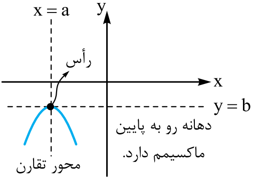
$$F=\frac{۹}{۵}\times ۱۵=۲۷$$

۱۶ تابع درجه‌دوم (سهمی)

۱. فرم‌های مختلف نمایش تابع درجه‌دوم (سهمی)	
فرم	$y=ax^2+bx+c$ (فرم اول) $y=a(x-k)^2+h$ (فرم دوم)
نقاط خاص	عرض از مبدأ: c رأس سهمی: S
مختصات رأس	$S\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ $S(k,h)$
معادلهٔ محور تقارن	$x=\frac{-b}{2a}$ $x=k$
وضعیت دهانه	دهانه رو به بالا: $a>0$ دهانه رو به پایین: $a<0$

شکل کلی تابع درجه‌دوم به صورت زیر است. نقاط ماکسیمم (بیشترین مقدار) و مینیمم (کم‌ترین مقدار) سهمی همان رأس سهمی هستند.





با توجه به شکل‌های بالا اگر $x=a$ محور تقارن سهمی و $y=b$ خط افقی باشد که از رأس سهمی می‌گذرد (بر سهمی مماس است)، مختصات رأس سهی به صورت $S(a,b)$ است.