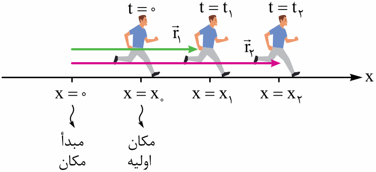
مفاهیم اولیه

مبدأ مکان (مبدأ) به مکان $x = 0$ روی محور x، **مبدأ مکان** یا **مبدأ** گفته می‌شود.

مکان اولیه (x_0) به مکان جسم متحرک در لحظهٔ $t = 0$ (لحظهٔ شروع بررسی حرکت)، **مکان اولیه** گفته می‌شود.

بردار مکان ($\vec{r}$) برداری است که مبدأ مکان را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند.



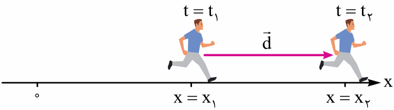
شکل روبه‌رو دونده‌ای را نشان می‌دهد که از مکان x_0 شروع به دویدن می‌کند و در لحظات t_1 و t_2 به ترتیب از مکان‌های x_1 و x_2 عبور می‌کند.

$\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ به ترتیب بردارهای مکان دونده در لحظات t_1 و t_2 است.

بردار جابه‌جایی ($\vec{d}$) برداری است که مکان اولیهٔ جسم را به مکان نهایی آن در یک بازهٔ زمانی مشخص وصل می‌کند و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_2\vec{i} - x_1\vec{i} = (x_2 - x_1)\vec{i} = \Delta x\vec{i}$$

در شکل زیر، بردار جابه‌جایی دونده را مشاهده می‌کنید.



توجه در بررسی حرکت اجسام بر خط راست، می‌توانیم جابه‌جایی متحرک را به صورت $d = \Delta x$ محاسبه کنیم. به جدول زیر توجه کنید.

جابه‌جایی متحرک در یک بُعد $d = \Delta x = x_{\text{پایانی}} - x_{\text{اولیه}}$	$\Delta x > 0$	متحرک در جهت محور x **جابه‌جا** شده است.
	$\Delta x < 0$	متحرک خلاف جهت محور x **جابه‌جا** شده است.

مسافت (ℓ) به **طول مسیری** که متحرک طی می‌کند، **مسافت** گفته می‌شود.

توجه تفاوت بین جابه‌جایی و مسافت:

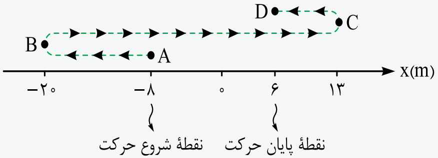
جابه‌جایی $(\vec{d})$	مسافت (ℓ)
کمیتی برداری است.	کمیتی نرده‌ای است.
فقط به مکان ابتدایی و مکان نهایی بستگی دارد و مستقل از مسیر حرکت است.	به مسیر حرکت بستگی دارد.

نکته

مسافت طی‌شده همواره از اندازهٔ جابه‌جایی متحرک بزرگ‌تر است $(\ell > |\vec{d}|)$، مگر آن‌که متحرک **بدون تغییر، جهت روی خط راست** حرکت کند که در این صورت مسافت و اندازهٔ جابه‌جایی با یکدیگر برابر هستند $(\ell = |\vec{d}|)$.

مثال **متحرکی بر روی محور x از نقطهٔ $x = -۸\ m$ شروع به حرکت می‌کند. متحرک دو مرتبه و به ترتیب در نقاط $x = -۲۰\ m$ و $x = +۱۳$ جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد تا در نهایت به نقطهٔ $x = ۶\ m$ برسد. مسافت پیموده‌شده توسط متحرک و اندازهٔ جابه‌جایی آن را برحسب متر مشخص کنید.**

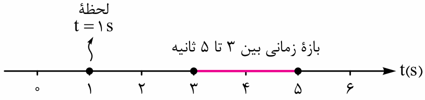
پاسخ ابتدا با توجه به توضیحات سؤال مسیر حرکت متحرک را روی محور x نشان می‌دهیم (شکل زیر):



$$\ell = |AB| + |BC| + |CD| = ۱۲ + ۳۳ + ۷ = ۵۲\ m$$

$$\Delta x = x_{\text{پایانی}} - x_{\text{اولیه}} = ۶ - (-۸) = ۱۴\ m$$

لحظه و بازهٔ زمانی هر حرکتی در لحظه‌ای شروع می‌شود و در لحظه‌ای به پایان می‌رسد. به مدت‌زمان بین این دو لحظه **بازهٔ زمانی** گفته می‌شود. مطابق شکل زیر، کمیت زمان را می‌توان به کمک رسم محور زمان نشان داد. یک لحظه را بر روی محور زمان با یک نقطه و بازهٔ زمانی را با یک پاره‌خط نشان می‌دهیم.



نکته

معمولاً در سؤالات، بازهٔ زمانی به دو صورت مطرح می‌شوند که در جدول زیر می‌بینید.

بازهٔ زمانی	توضیح	مثال
ثانیهٔ nاُم	از لحظهٔ $n-1$ ثانیه تا لحظهٔ n ثانیه	ثانیهٔ هفتم یعنی از لحظهٔ ۶ s تا لحظهٔ ۷ s
T ثانیهٔ nاُم	از لحظهٔ $(n-1)T$ ثانیه تا لحظهٔ nT ثانیه	۳ ثانیهٔ پنجم یعنی از لحظهٔ ۱۲ s تا لحظهٔ ۱۵ s

تندی متوسط (s_{av}) **کمیتی نرده‌ای** است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}}$$

s_{av} ← تندی متوسط (m/s) ؛ ℓ → مسافت (m) ؛ Δt → مدت‌زمان حرکت (s)

سرعت متوسط ($\vec{v}_{av}$) **کمیتی برداری** است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}}$$

$\vec{v}_{av}$ ← سرعت متوسط (m/s) ؛ $\vec{d}$ → بردارجابه‌جایی (m) ؛ Δt → مدت‌زمان حرکت (s)

برای حرکت در یک بعد ←

$$\boxed{v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

نکته

تندی متوسط متحرک در یک بازهٔ زمانی همواره از اندازهٔ سرعت متوسط آن بزرگ‌تر است ($s_{av} > |\vec{v}_{av}|$)، مگر آن‌که متحرک **بدون تغییر جهت، روی خط راست** حرکت کند که در این صورت تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط با هم برابر هستند ($s_{av} = |\vec{v}_{av}|$).

نکته

یکای تندی و سرعت در SI متر بر ثانیه (m/s) است، البته کیلومتر بر ساعت (km/h) یکای متداول دیگری برای سرعت و تندی است که به صورت زیر می‌توان آن را به یکای متر بر ثانیه (m/s) تبدیل کرد:

$$km/h \xrightarrow{\div ۳/۶} m/s$$

تست

متحرکی روی محور x حرکت می‌کند و در مبدأ زمان از مکان $x_۰ = -۴۰\,m$ می‌گذرد و در لحظهٔ $t_۱ = ۶\,s$ به مکان $x_۱ = ۱۰۰\,m$ می‌رسد و در نهایت در لحظهٔ $t_۲ = ۱۰\,s$ از مکان $x_۲ = ۲۰\,m$ می‌گذرد. سرعت متوسط این متحرک در SI در این ۱۰ ثانیه کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۲۲ ۲) ۱۴ ۳) ۶ ۴) ۲

پاسخ گزینهٔ «۳» برای محاسبهٔ سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $(۰,۱۰\,s)$ کافی است به اطلاعات سؤال در ابتدا و انتهای این بازهٔ زمانی دقت کنیم:

$$v_{av(۰,۱۰)} = \frac{x_۲ - x_۰}{t_۲ - t_۰} = \frac{۲۰ - (-۴۰)}{۱۰ - ۰} = ۶\,m/s$$

مثال **معادلهٔ مکان ـ زمان جسمی در SI به صورت $x = ۲t^۲ + ۴t - ۸$ است. سرعت متوسط متحرک در فاصلهٔ زمانی $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۳\,s$ چند متر بر ثانیه است؟**

پاسخ ابتدا به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان، موقعیت مکانی متحرک را در لحظات مورد نظر مشخص می‌کنیم:

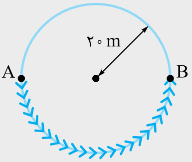
$$t_۱ = ۱\,s \Rightarrow x_۱ = ۲(۱)^۲ + ۴(۱) - ۸ = -۲\,m$$

$$t_۲ = ۳\,s \Rightarrow x_۲ = ۲(۳)^۲ + ۴(۳) - ۸ = ۲۲\,m$$

حال سرعت متوسط متحرک در طی این جابه‌جایی را محاسبه می‌کنیم:

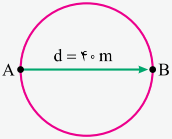
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۲۲-(-۲)}{۳-۱} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲\ m/s$$

مثال **مطابق شکل روبه‌رو، دوچرخه‌سواری نیمی از محیط یک میدان دایره‌ای‌شکل را طی می‌کند و از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رسد. اگر بزرگی سرعت متوسط دوچرخه‌سوار $۴\ m/s$ باشد، تندی متوسط آن چند متر بر ثانیه است؟ $(\pi = ۳)$**



پاسخ مطابق شکل روبه‌رو، جابه‌جایی دوچرخه‌سوار برابر با $۴۰\ m$ است:

$$d = ۴۰\ m$$



حال با داشتن اندازهٔ سرعت متوسط و جابه‌جایی دوچرخه‌سوار، مدت‌زمان حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow ۴ = \frac{۴۰}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = ۱۰\ s$$

برای محاسبهٔ تندی متوسط باید مسافت طی‌شده (ℓ) که برابر با نصف محیط دایره است را در فرمول زیر قرار دهیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\frac{۱}{۲} \times (\text{محیط دایره})}{\Delta t} = \frac{\pi R}{\Delta t} = \frac{۳ \times ۲۰}{۱۰} = ۶\ m/s$$

همان‌طور که می‌بینید تندی متوسط دوچرخه‌سوار از اندازهٔ سرعت متوسط دوچرخه‌سوار بزرگ‌تر است، چون دوچرخه‌سوار در مسیر مستقیم حرکت نکرده است.

تندی لحظه‌ای (s) تندی متحرک در هر لحظه از زمان را تندی لحظه‌ای می‌نامند؛ تندی لحظه‌ای یک **کمیت نرده‌ای** همواره مثبت است.

سرعت لحظه‌ای ($\vec{v}$) به تندی متحرک در هر لحظه با در نظر گرفتن جهت حرکت آن، **سرعت لحظه‌ای** گفته می‌شود؛ از این رو سرعت لحظه‌ای یک **کمیت برداری** است. *برای مثال وقتی می‌گوییم سرعت متحرک در لحظه‌ای $-6\,m/s\,\vec{i}$ است، یعنی متحرک در آن لحظه با تندی $6\,m/s$ خلاف جهت محور x در حرکت است.*

توجه در هر لحظه، تندی لحظه‌ای متحرک برابر با اندازهٔ سرعت لحظه‌ای متحرک است.

نتیجه برای متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، داریم:

اگر $v > 0$	متحرک در حال حرکت در جهت محور x است.
اگر $v < 0$	متحرک در حال حرکت در خلاف جهت محور x است.

توجه هرگاه گفته شود «سرعت» و «تندی»، منظور سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای است.

شتاب متوسط ($\vec{a}_{av}$) هرگاه سرعت جسمی تغییر کند (اندازهٔ سرعت تغییر کند یا جهت بردار سرعت تغییر کند)، حرکت آن شتابدار است و شتاب متوسط آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{شتاب متوسط } (m/s^2) \leftarrow \vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \begin{array}{l} \rightarrow (m/s) \text{ تغییر سرعت} \\ \rightarrow (s) \text{ مدت‌زمان تغییر سرعت} \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{برای حرکت در یک بعد}} a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

توجه شتاب متوسط **کمیتی برداری** و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت $(\Delta \vec{v})$ است.

نکته

اگر سرعت متحرکی ثابت باشد، آن‌گاه در هر بازهٔ زمانی دلخواه شتاب متوسط آن صفر است.

تست

متحرکی در مسیر مستقیم حرکت می‌کند و معادلهٔ سرعت ـ زمان آن در SI به صورت $v = ۲t^۲ - ۴t - ۲$ است. شتاب متوسط آن در ۲ ثانیهٔ دوم چند متر بر ثانیه است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ | گزینهٔ «۴» ابتدا سرعت متحرک را در ابتدا و انتهای بازهٔ مورد نظر (۲ ثانیهٔ دوم یعنی $t_۱ = ۲\,s$ تا $t_۲ = ۴\,s$) مشخص می‌کنیم:

$$t_۱ = ۲\,s \Rightarrow v_۱ = ۲(۲)^۲ - ۴(۲) - ۲ = -۲\,m/s$$

$$t_۲ = ۴\,s \Rightarrow v_۲ = ۲(۴)^۲ - ۴(۴) - ۲ = ۱۴\,m/s$$

شتاب متوسط متحرک در ۲ ثانیهٔ دوم برابر است با:

$$\vec{a}_{av} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۱۴ - (-۲)}{۴ - ۲} = \frac{۱۶}{۲} = ۸\,m/s^۲$$

تست

متحرکی روی محور x در حال حرکت است. بردار شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۵\,s$ تا $t_۲ = ۱۰\,s$ در SI برابر $-۴\vec{i}$ و در بازهٔ زمانی $t_۲ = ۱۰\,s$ تا $t_۳ = ۱۲\,s$ برابر با $۲\vec{i}$ است. بردار شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۵\,s$ تا $t_۳ = ۱۲\,s$ در SI کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{۲}{۷}\vec{i}$ ۲) $-\frac{۱۶}{۷}\vec{i}$ ۳) $۴\vec{i}$ ۴) $۸\vec{i}$

پاسخ | گزینهٔ «۲» ابتدا به کمک رابطهٔ $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$، تغییرات سرعت متحرک را در هر دو بازهٔ زمانی به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av(۵,۱۰)} = \frac{\Delta\vec{v}_{(۵,۱۰)}}{۱۰ - ۵} \Rightarrow -۴\vec{i} = \frac{\Delta\vec{v}_{(۵,۱۰)}}{۵} \Rightarrow \Delta\vec{v}_{(۵,۱۰)} = -۲۰\vec{i}$$

$$\vec{a}_{av(10,12)} = \frac{\Delta\vec{v}_{(10,12)}}{12-10} \Rightarrow 2\vec{i} = \frac{\Delta\vec{v}_{(10,12)}}{2} \Rightarrow \Delta\vec{v}_{(10,12)} = 4\vec{i}$$

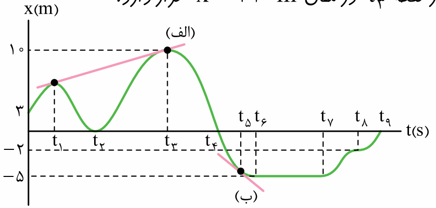
تغییر سرعت متحرک در بازهٔ $(5s, 12s)$ برابر است با:

$$\Delta\vec{v}_{(5,12)} = \Delta\vec{v}_{(5,10)} + \Delta\vec{v}_{(10,12)} = -20\vec{i} + 4\vec{i} = -(16\,m/s)\vec{i}$$

حال شتاب متوسط متحرک را در بازهٔ $(5s, 12s)$ به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av(5,12)} = \frac{-16\vec{i}}{12-5} = -(\frac{16}{7}m/s^2)\vec{i}$$

نمودار مکان ـ زمان نموداری است که مکان متحرک را در هر لحظه نشان می‌دهد. *برای مثال در نمودار زیر، مکان اولیهٔ متحرک* $x_0 = +3\,m$ *است و متحرک در لحظهٔ* t_3 *در مکان* $x = +10\,m$ *قرار دارد.*



از نمودار مکان ـ زمان، اطلاعات دیگری را هم می‌توان به دست آورد:

- **سرعت متوسط متحرک** بین دو لحظهٔ دلخواه برابر با شیب خطی است که نمودار مکان ـ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند، *برای مثال شیب خط (الف) برابر با سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی* t_1 *تا* t_3 *است.*

سرعت متوسط $= v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} =$ شیب خط گذرنده از نمودار مکان ـ زمان در دو لحظه

- **سرعت متحرک در هر لحظه** برابر با شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در آن لحظه است. *مثلاً شیب خط (ب) برابر با سرعت متحرک در لحظهٔ t_5 است.*

$$\text{سرعت لحظه‌ای} = v = \text{شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در لحظهٔ مورد نظر}$$

توجه به کمک جدول زیر می‌تونیم علامت سرعت متحرک را در هر لحظه مشخص کنیم:

اگر نمودار مکان ـ زمان صعودی باشد. (شیب مثبت)	$v > 0$
اگر نمودار مکان ـ زمان نزولی باشد. (شیب منفی)	$v < 0$

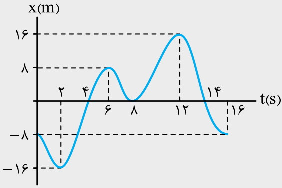
برای مثال سرعت متحرک در بازه‌های زمانی $(0, t_1)$، (t_2, t_3)، (t_7, t_8) و (t_8, t_9) *مثبت و در بازه‌های زمانی* (t_1, t_2) و (t_3, t_6) *منفی است.*

توجه اگر نمودار مکان ـ زمان متحرک در یک بازهٔ زمانی به صورت یک **خط افقی** باشد، متحرک در آن بازهٔ زمانی **ساکن** است *(در نمودار صفحهٔ قبل، از لحظهٔ t_6 تا t_7).*

- در نقاط قله و درهٔ نمودار مکان ـ زمان، **متحرک تغییر جهت می‌دهد**، *برای مثال در لحظات t_1، t_2 و t_3.*

- در لحظاتی که نمودار مکان ـ زمان محور زمان را قطع می‌کند، متحرک از مبدأ مکان عبور کرده و در نتیجه **بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد** *(برای نمونه در لحظهٔ t_4).*

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. با توجه به نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) جابه‌جایی متحرک از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظه‌ای که برای چهارمین مرتبه تغییر جهت می‌دهد، چند متر است؟

ب) مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی بین دو لحظه‌ای که بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد، چند متر است؟

پ) بزرگی سرعت متوسط متحرک در ۶ ثانیهٔ دوم حرکت را به دست آورید.

ت) تندی متوسط متحرک در لحظاتی که بردار مکان آن در جهت محور x، ولی سرعت آن خلاف محور x است را به دست آورید.

پاسخ | الف متحرک در لحظات ۲، ۶، ۸ و ۱۲ ثانیه تغییر جهت می‌دهد؛ پس بازهٔ مورد نظر $(۰,۱۲\,s)$ است. حال بزرگی جابه‌جایی را در این بازهٔ زمانی به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{(۰,۱۲)} = x_{۱۲} - x_{۰} = ۱۶ - (-۸) = ۲۴\ m$$

ب بردار مکان متحرک در لحظات ۴ و ۱۴ ثانیه تغییر جهت می‌دهد. مسافت طی‌شده بین این دو لحظه برابر است با:

$$\ell = ۸ + ۸ + ۱۶ + ۱۶ = ۴۸\ m$$

پ ۶ ثانیهٔ دوم یعنی بازهٔ زمانی $(۶\,s,۱۲\,s)$؛ پس داریم:

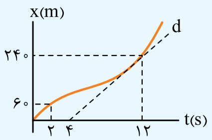
$$v_{av(۶,۱۲)} = \frac{\Delta x_{(۶,۱۲)}}{\Delta t} = \frac{۱۶-۸}{۱۲-۶} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}\ m/s$$

ت در دو بازهٔ زمانی $(۶\,s, ۸\,s)$ و $(۱۲\,s, ۱۴\,s)$ بردار مکان متحرک در جهت محور x و بردار سرعت آن خلاف محور x است. مسافتی که متحرک در مجموع این دو بازه، طی می‌کند برابر با ۲۴ متر $(۱۶+۸)$ است؛ پس تندی متوسط به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۲۴}{۲+۲} = ۶\ m/s$$

تست

نمودار مکان ـ زمان متحرکی مطابق شکل زیر است. اگر تندی در لحظهٔ $t = ۱۲\,s$ برابر با تندی متوسط در بازهٔ $(۲s, ۱۴s)$ باشد، سرعت متوسط ۲ ثانیهٔ اول چند برابر سرعت متوسط ۲ ثانیهٔ هفتم است؟ (خط d مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = ۱۲\,s$ است.) (تجربی خارج ۱۴۰۰)



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ گزینهٔ «۱» تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۱۲\,s$ برابر با شیب خط مماس بر نمودار در این لحظه است (*یعنی شیب خط d*)؛ بنابراین داریم:

$$S_{(t=۱۲\,s)} = \text{شیب خط } d = \frac{۲۴۰}{۱۲-۴} = ۳۰\ m/s$$

طبق صورت سؤال داریم:

$$S_{(t=۱۲\,s)} = s_{av(۲,۱۴)} \Rightarrow ۳۰ = \frac{\ell_{(۲,۱۴)}}{۱۲} \Rightarrow \ell_{(۲,۱۴)} = ۳۶۰\ m$$

مطابق شکل صورت سؤال، جهت حرکت متحرک در بازهٔ زمانی $(۲\,s, ۱۴\,s)$ تغییر نکرده است؛ پس مسافت طی‌شده و جابه‌جایی

متحرک در این بازه با هم برابر است؛ بنابراین داریم:

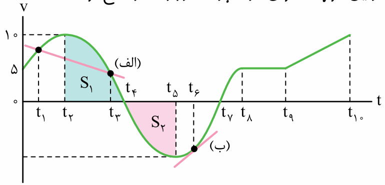
$$\ell_{(۲,۱۴)} = \Delta x_{(۲,۱۴)} = x_{۱۴} - x_{۲} = ۳۶۰\,m \Rightarrow x_{۱۴} - ۶۰ = ۳۶۰$$

$$\Rightarrow x_{۱۴} = ۴۲۰\,m$$

حال خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_{av(۰,۲)}}{v_{av(۱۲,۱۴)}} = \frac{\dfrac{x_{۲} - x_{۰}}{۲ - ۰}}{\dfrac{x_{۱۴} - x_{۱۲}}{۱۴ - ۱۲}} = \frac{x_{۲} - x_{۰}}{x_{۱۴} - x_{۱۲}} = \frac{۶۰ - ۰}{۴۲۰ - ۲۴۰} = \frac{۶۰}{۱۸۰} = \frac{۱}{۳}$$

نمودار سرعت ـ زمان نموداری است که سرعت متحرک را در هر لحظه نشان می‌دهد. *به طور مثال در نمودار زیر، سرعت اولیهٔ متحرک $+۵\ m/s$ است و در لحظهٔ $t_{۴}$ سرعت آن برای اولین مرتبه صفر می‌شود. (چون محور زمان را قطع کرده است.)*



از نمودار سرعت ـ زمان اطلاعات زیر را هم می‌توان به دست آورد:

- **جهت حرکت متحرک** را می‌توان به کمک علامت سرعت تشخیص داد. در لحظاتی که علامت سرعت متحرک مثبت است، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند *(برای مثال در بازهٔ صفر تا $t_{۴}$)* و در لحظاتی که علامت سرعت منفی است، متحرک خلاف جهت محور x حرکت می‌کند *(برای مثال در بازهٔ $t_{۴}$ تا $t_{۷}$)*.

توجه در لحظاتی که نمودار سرعت ـ زمان محور زمان را قطع می‌کند، علامت سرعت متحرک تغییر می‌کند و در نتیجه **متحرک تغییر جهت می‌دهد** *(در لحظات $t_{۴}$ و $t_{۷}$)*.

• **شتاب متوسط متحرک** بین دو لحظهٔ دلخواه برابر با شیب خطی است که نمودار سرعت ـ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند؛ *برای مثال شیب خط (الف) برابر با شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 است.*

$$\text{شتاب متوسط} = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{شیب خط گذرنده از نمودار}}{\text{سرعت ـ زمان در دو لحظه}}$$

• **شتاب لحظه‌ای متحرک** در هر لحظه برابر با شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان در آن لحظه است. *در نمودار صفحهٔ قبل، شیب خط (ب) برابر با شتاب متحرک در لحظهٔ t_6 است.*

$$\text{شتاب لحظه‌ای} = a = \frac{\text{شیب خط مماس بر نمودار}}{\text{سرعت ـ زمان در لحظهٔ مورد نظر}}$$

توجه ۱ به کمک جدول زیر می‌توانیم علامت شتاب متحرک را در هر لحظه تشخیص دهیم؛

اگر نمودار سرعت ـ زمان صعودی باشد (شیب مثبت).	$a > 0$
اگر نمودار سرعت ـ زمان نزولی باشد (شیب منفی).	$a < 0$

به طور مثال در نمودار صفحهٔ قبل، شتاب متحرک در بازهٔ زمانی $(0, t_2)$ مثبت و در بازهٔ زمانی (t_2, t_5) منفی است.

۲ در بازه‌های زمانی که نمودار سرعت ـ زمان به صورت یک خط راست باشد، شیب نمودار ثابت و در نتیجه شتاب متحرک، ثابت است *(برای مثال در بازهٔ t_9 تا t_{10}).*

۳ اگر نمودار سرعت ـ زمان متحرک در یک بازهٔ زمانی به صورت یک خط افقی باشد، سرعت متحرک در آن بازهٔ زمانی ثابت است *(در نمودار صفحهٔ قبل، از لحظهٔ t_8 تا t_9).*

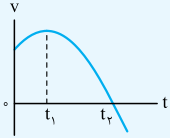
۴ در نقاط قله و درهٔ نمودار سرعت ـ زمان، شتاب متحرک صفر می‌شود. در این لحظات شتاب متحرک تغییر علامت می‌دهد *(برای مثال در لحظات t_2 و t_5).*

• **مساحت سطح محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است.** اگر نمودار بالای محور زمان باشد، جابه‌جایی مثبت و اگر پایین محور زمان باشد، جابه‌جایی منفی است. *برای مثال جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی t_2 تا t_4 برابر با $+S_1$ و در بازهٔ زمانی t_4 تا t_5 برابر با $-S_2$ است؛ پس جابه‌جایی متحرک در بازهٔ t_2 تا t_5 برابر با S_1-S_2 می‌شود.*

• مجموع مساحت سطح‌های محصور بین نمودار و محور زمان (بدون در نظر گرفتن علامت منفی) برابر با مسافت طی‌شده توسط متحرک است. *برای مثال مسافت طی‌شده توسط متحرک در بازهٔ t_2 تا t_5 برابر S_1+S_2 می‌شود.*

تست

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. کدام گزینه صحیح است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰ ـ با کمی تغییر)



۱) جهت سرعت و شتاب در لحظهٔ t_1 تغییر کرده است.

۲) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 حرکت در جهت محور x است.

۳) در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 تندی متحرک در حال کاهش است.

۴) بردار شتاب در بازهٔ زمانی صفر تا t_2 خلاف جهت محور x است.

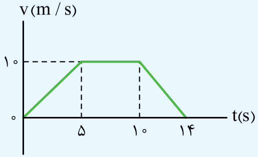
پاسخ گزینهٔ «۲» **بررسی گزینه‌ها** گزینهٔ (۱): با توجه به شکل سؤال، علامت سرعت متحرک در بازهٔ $(0,t_2)$ همواره مثبت است؛ پس جهت سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 تغییر نمی‌کند.

گزینهٔ (۳): با توجه به شکل سؤال، سرعت متحرک در بازهٔ زمانی $(0,t_1)$ در حال افزایش است؛ پس تندی متحرک نیز در این بازه افزایش می‌یابد.

گزینهٔ (۴): شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان صورت سؤال در بازهٔ زمانی $(\circ, t_1)$ مثبت است؛ پس در این بازهٔ زمانی شتاب حرکت متحرک مثبت است و نمی‌توانیم علامت شتاب متحرک در بازهٔ $(\circ, t_2)$ را کلاً منفی در نظر بگیریم.

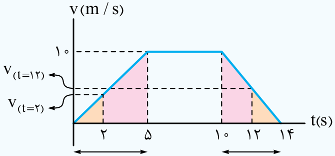
تست

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. شتاب متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی $t = ۲\,s$ تا $t = ۱۲\,s$ چند متر بر مربع ثانیه است؟ (تجربی ۹۲)



۱) ۰/۱ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷ ۴) صفر

پاسخ گزینهٔ «۱» ابتدا باید به کمک تشابه مثلثاتی، سرعت متحرک را در لحظات $t = ۲\,s$ و $t = ۱۲\,s$ به دست آورد.



$$\frac{v_{(t=۲\,s)}}{۲} = \frac{۱۰}{۵} \Rightarrow v_{(t=۲\,s)} = ۴\,m/s$$

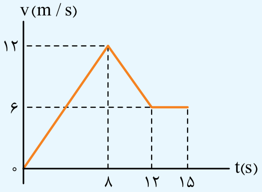
$$\frac{v_{(t=۱۲\,s)}}{۲} = \frac{۱۰}{۴} \Rightarrow v_{(t=۱۲\,s)} = ۵\,m/s$$

حال شتاب متوسط را در بازهٔ زمانی مورد نظر به دست می‌آوریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{۱۲} - v_{۲}}{۱۲ - ۲} = \frac{۵ - ۴}{۱۰} = ۰/۱\,m/s^۲$$

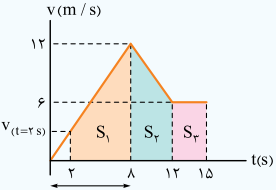
تست

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. اگر در لحظهٔ $t_1 = ۲\,s$ مکان متحرک در SI به صورت $\vec{x}_1 = -۶\vec{i}$ باشد، مکان متحرک در لحظهٔ $t_2 = ۱۵\,s$ در SI کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)



۱) $۹۳\vec{i}$ ۲) $۹۶\vec{i}$ ۳) $۱۰۵\vec{i}$ ۴) $۱۱۸\vec{i}$

پاسخ گزینهٔ «۱» ابتدا به کمک تشابه مثلثاتی سرعت متحرک را در لحظهٔ $t = ۲\,s$ به دست می‌آوریم:



$$\frac{v_{(t=۲\,s)}}{۲} = \frac{۱۲}{۸}$$

$$\Rightarrow v_{(t=۲\,s)} = ۳\,m/s$$

در گام بعدی، سطح زیر نمودار در بازهٔ $(۲s, ۱۵s)$ را به دست می‌آوریم تا جابه‌جایی متحرک در این بازهٔ زمانی مشخص شود:

$$\Delta x = S_1 + S_2 + S_3 = (\frac{۳+۱۲}{۲} \times ۶) + (\frac{۱۲+۶}{۲} \times ۴) + (۳ \times ۶)$$

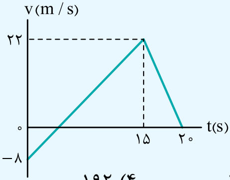
$$= ۴۵ + ۳۶ + ۱۸ = ۹۹\,m$$

بنابراین داریم: $\Delta x = x_{(t=۱۵)} - x_{(t=۲)} = x_{(t=۱۵)} - (-۶) = ۹۹$

$$\Rightarrow x_{(t=۱۵)} = ۹۳\,m$$

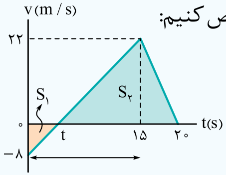
تست

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر مسیری مستقیم حرکت می‌کند به صورت روبه‌رو است. مسافت پیموده‌شده توسط این متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۲۰ s چند متر است؟ (ریاضی ۹۸)



۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۶ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۲

پاسخ گزینهٔ «۴» در شکل زیر، ابتدا باید لحظه‌ای که نمودار سرعت ـ زمان محور زمان را قطع می‌کند (لحظهٔ t) مشخص کنیم:



تشابه مثلثاتی: $\frac{۸}{t} = \frac{۲۲}{۱۵ - t}$

$\Rightarrow ۱۲۰ - ۸t = ۲۲t$

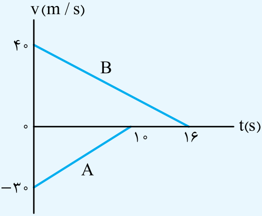
$\Rightarrow t = ۴\,s$

حال با محاسبهٔ مساحت سطح زیر نمودار در بازهٔ زمانی مورد نظر، مسافت طی‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\ell = S_۱ + S_۲ = (\frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۸) + (\frac{۱}{۲} \times ۱۶ \times ۲۲) = ۱۹۲\ m$$

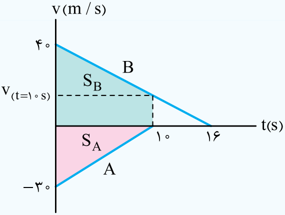
تست

نمودار سرعت ـ زمان دو قطار A و B که روی ریل مستقیم به طرف هم حرکت می‌کنند، مطابق شکل مقابل است. در لحظهٔ $t = ۰$ فاصلهٔ قطارها از هم ۵۰۰ متر است. لحظه‌ای که قطار A می‌ایستد، قطار B در چه فاصله‌ای از آن قرار دارد؟ (تجربی خارج ۹۷)



۱) ۲۵ ۲) ۷۵ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۵

پاسخ گزینهٔ «۲» ابتدا مسافت طی‌شده توسط هر یک از قطارها را به دست می‌آوریم. به کمک تشابه مثلثاتی برای نمودار قطار B، سرعت این قطار را در لحظهٔ $t=10\,s$ محاسبه می‌کنیم.



$$\frac{40}{16}=\frac{v_{(t=10\,s)}}{16-10}\Rightarrow v_{(t=10\,s)}=15\,m/s$$

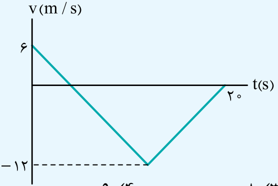
$$\left.\begin{array}{l}\ell_A=S_A=\frac{1}{2}\times10\times30=150\,m\\ \ell_B=S_B=\frac{40+15}{2}\times10=275\,m\end{array}\right\}\ell_A+\ell_B=425\,m$$

بنابراین دو قطار A و B در مجموع $425\,m$ مسافت را طی کرده‌اند.

بنابراین فاصلهٔ بین دو قطار در لحظهٔ توقفِ قطار A به ۷۵ متر می‌رسد.

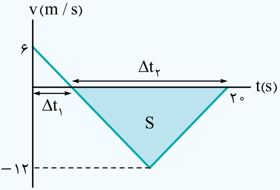
تست

شکل روبه‌رو نمودار سرعت ـ زمان متحرکی است که روی محور x حرکت می‌کند. تندی متوسط متحرک در مدتی که در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، چند متر بر ثانیه است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)



۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ گزینهٔ «۲» هرگاه علامت سرعت متحرک منفی باشد، یعنی متحرک در خلاف جهت محور x در حرکت است. با توجه به نمودار زیر متوجه‌می‌شویم

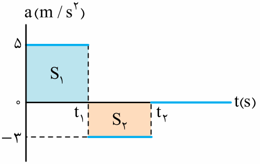


متحرک در مدت‌زمان $\Delta t_۲$ خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. بـرای محاسبهٔ تندی متوسط متحرک، ابتدا باید مسافتی که متحرک در بازهٔ زمانی مورد نظر طی می‌کند را به دست آوریم:

$$\ell = S = \frac{۱}{۲} \times \Delta t_۲ \times ۱۲ = ۶ \times \Delta t_۲$$

حال تندی متوسط متحرک را در بازهٔ زمانی مورد نظر به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۶ \times \Delta t_۲}{\Delta t_۲} = ۶\ m / s$$



نمودار شتاب ـ زمان نموداری است که شتاب متحرک را در هر لحظه نشان می‌دهد. *به طور مثال در نمودار روبه‌رو، شتاب حرکت متحرک در بازه‌های زمانی صفر تا $t_۱$ و $t_۱$ تا $t_۲$ به ترتیب برابر با* $۵\ m / s^۲$ *و* $-۳\ m / s^۲$ *است و از این لحظه به بعد شتاب حرکت آن صفر می‌شود.*

نکته

مساحت سطح محصور بین نمودار شتاب ـ زمان و محور زمان در یک بازهٔ زمانی برابر با تغییر سرعت متحرک در آن بازهٔ زمانی است. اگر نمودار بالای محور زمان باشد، تغییر سرعت متحرک مثبت و اگر نمودار پایین محور زمان باشد، تغییر سرعت متحرک منفی است. *برای مثال سرعت متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$ به اندازهٔ $+S_۱$ و در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ به اندازهٔ $-S_۲$ تغییر کرده است؛ بنابراین تغییر سرعت متحرک از لحظهٔ صفر تا $t_۲$ برابر با* $S_۱ - S_۲$ *است.*