پیشگفتار

درود و ادب به تمامی دبیران و مدرسان گرامی و دانش آموزان دوست داشتنی و سخت‌کوش سراسر ایران پهناور
با توجه به تغییرات صورت گرفته در شرایط برگزاری کنکور سراسری و تاثیر سوابق تحصیلی در ورود به دانشگاه و موسسات آموزش عالی، بر آن شدیم تا منبعی مطمئن برای یادگیری و آموزش اثربخش و سنجش و ارزیابی هدفمند و موثر فراهم کرده و مسیر دانش آموزان عزیز را جهت کسب نمره (۲۰) در تمام امتحانات پیش رویشان هموار سازیم.

درباره کتاب

مجموعه کتاب‌های سیگنال ۲۰ خط سفید برای تمام دروس پایه دوازدهم در ۳ رشته تحصیلی علوم ریاضی و فیزیک، علوم تجربی و علوم انسانی به تالیف و گردآوری رسیده و شامل ٤ بخش اصلی می‌باشد.

۱. آموزش (درسنامه کاملا کاربردی)

محتوای تالیفی درسنامه ها شامل تمام مطالب آموزشی مهم و کاربردی و مفاهیم اساسی و نکات کلیدی کتاب درسی بوده که موجب تسهیل فرآیند یادگیری شده و امکان مرورهای سریع و ماندگار و همچنین جمع‌بندی‌های دوره‌ای را در طول سال تحصیلی فراهم می‌سازد.

۲. سنجش (سوالات امتحانات نهایی و احتمالی)

به منظور بالا بردن سطح توانایی و مهارت دانش‌آموزان پایه دوازدهم برای پاسخگویی کامل و درست به پرسش‌های امتحانات گوناگون و تقویت یادگیری، سوالاتی در تیپ و قالب های متنوع نهایی و تالیفی-احتمالی گردآوری و تالیف گردیده است؛ که با تمرین و تکرار مداوم این سوالات، امکان شناخت نقاط قوت و ضعف دانش‌آموزان را در درس‌های مختلف فراهم می‌سازد.

۳. نمونه سوال امتحان (امتحانات ۲۰ نمره‌ای نوبت اول و دوم – نهایی و احتمالی)

علاوه بر مجموعه سوالات طبقه بندی شده، ۲ نمونه امتحان تالیفی-احتمالی نوبت اول (دی ماه)، ۲ نمونه امتحان تالیفی-احتمالی نوبت دوم (خردادماه)، امتحان نهایی دوره های شهریور و دی ماه ۱۴۰۱ و امتحان نهایی دوره خرداد ماه ۱۴۰۲ برای بررسی و ارزیابی میزان یادگیری و ارتقاء هرچه بیشتر توانمندی دانش‌آموزان عزیز و کسب بهترین نتیجه فراهم شده است.

٤. پاسخنامه تشریحی آموزشی

پاسخنامه کاملا تشریحی و آموزشی سوالات در پایان کتاب برای تقویت یادگیری و کاهش حداکثری خطاها و اشتباهات احتمالی دانش‌آموزان آماده سازی شده است.

سیگنال بگیر تا بیست برو!

فهرست

بارم‌بندی

فصل	محدوده فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
۱	کل	۱٥	٥	۸
۲	تاصفحه ٦۰	٥	۲	٥/٥
	صفحه ٦۰ به‌بعد		۳/٥	
۳	کل		۹/٥	٦/٥
جمع		۲۰	۲۰	۲۰

درس نامه

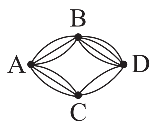
فصل اول
آمار و احتمال

درس اول: شمارش

اصل جمع: اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد و این دو عمل را با هم نتوانیم انجام دهیم در این صورت به $(m+n)$ طریق می‌توان عمل اول یا عمل دوم را انجام داد.

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد به طوری که مرحله اول به m طریق و مرحله دوم به n طریق قابل انجام باشد در این صورت عمل را به $(m\times n)$ طریق می‌توان انجام داد.

مثال) مطابق شکل مقابل بین شهرهای A و B و C و D راه‌هایی وجود دارند که همگی دو طرفه هستند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت؟ (خرداد ۹۹)



پاسخ) برای مسافرت از شهر A به شهر D دو مسیر وجود دارد:

مسیر ۱: از شهر A به B و سپس به شهر D: $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}} ۳\times۴=۱۲$

مسیر ۲: از شهر A به C و سپس به شهر D: $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}} ۳\times۲=۶$

پس در کل طبق اصل جمع به $۱۸=۶+۱۲$ طریق می‌توانیم از A به D سفر کنیم.

نکته

اصل جمع و اصل ضرب به ترتیب برای بیشتر از ۲ عمل و بیشتر از ۲ مرحله قابل تعمیم است.

نماد فاکتوریل: اگر n یک عدد طبیعی باشد $n!$ (بخوانید n فاکتوریل) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n!=n\times(n-۱)\times(n-۲)\times...\times۳\times۲\times۱$$

مثال) حاصل $\frac{۶!}{۳!}$ را بنویسید. (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ)

$$\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۱۲۰$$

نکته

قرارداد می‌کنیم که $۰!=۱$

جایگشت: به هر یک از حالت‌های قرار گرفتن n شی متمایز در کنار هم یک جایگشت n شی می‌گوییم.

نکته

تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر $n!$ است.

مثال) ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در یک صف پشت سر هم قرار بگیرند. (احتمالی)

پاسخ) طبق تعریف جایگشت به $۷!$ طریق می‌توانند پشت سر هم در یک صف قرار بگیرند

روش حل سؤالات مربوط به ساختن اعداد و کلمات:

برای حل این گونه سؤالات ابتدا به تعداد ارقام عدد و یا تعداد حروف کلمه مورد نظر خانه خالی در نظر می‌گیریم و سپس با توجه به شرایط و محدودیت‌های بیان شده در صورت سؤال تعداد حالت‌های پر کردن خانه‌های خالی را مشخص می‌کنیم و در نهایت با اصل ضرب تعداد کلمات یا اعداد خواسته شده را بدست می‌آوریم.

مثال) با حروف کلمه «خورشید» و بدون تکرار حروف (با معنی یا بدون معنی) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با حرف «ی» شروع شود و به حرف «خ» ختم شود. (شهریور ۹۹)

پاسخ) چون کلمه ۴ حرفی خواسته شده پس چهار تا خانه رسم می‌کنیم:

حالت	حالت	حالت	حالت

باتوجه به محدودیت گفته شده، حرف اول فقط «ی» و حرف آخر فقط «خ» باشد، اولین و آخرین جایگاه به یک حالت پر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست حرف «ی» و «خ» از انتخاب‌های بعدی حذف میشوند پس با ۴ و ۳ حالت باید بقیه مکان‌ها را پر کنیم یعنی خانه‌های خالی به صورت مقابل پر می‌شوند:

۱	۳	۴	۱
حالت	حالت	حالت	حالت

و در نهایت تعداد کلمات ۴ حرفی، با این شرایط طبق اصل ضرب برابر خواهد بود با

$$۱\times۴\times۳\times۱=۱۲$$

مثال) با ارقام ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۲ و ۱ و ۰ چند عدد ۵ رقمی فرد بدون رقم تکراری می‌توان نوشت؟ (احتمالی)

پاسخ) چون عدد ۵ رقمی خواسته شده باید ۵ تا خانه‌ی خالی رسم کنیم:

حالت	حالت	حالت	حالت	حالت

رقم یکان باید فرد باشد پس ۳ حالت می‌توان برای آن در نظر گرفت. (اولین جایگاه از سمت راست) برای پر کردن بقیه خانه‌ها از سمت چپ شروع می‌کنیم چون در اولین خانه از سمت چپ صفر نمی‌تواند قرار بگیرد و همچنین یکی از ارقام فرد هم در یکان استفاده شد پس برای آن فقط ۵ حالت داریم. برای جایگاه بعدی به خاطر غیر تکراری بودن ارقام یک حالت نسبت به جایگاه قبلی کم می‌شود اما صفر می‌تواند در آن جایگاه استفاده شود بنابراین برای جایگاه بعدی هم ۵ حالت داریم و به همین ترتیب می‌توانیم خانه‌های خالی را به صورت زیر پر کنیم:

۳	۳	۴	۵	۵
حالت	حالت	حالت	حالت	حالت

و در نهایت تعداد اعداد ۵ رقمی با این شرایط برابر خواهد بود با:

$$۵\times۵\times۴\times۳\times۳=۹۰۰$$

تبدیل: تعداد انتخاب‌های r شی از n شی که جابه‌جایی یا ترتیب اشیاء اهمیت داشته باشد را با نماد $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و با استفاده از فرمول مقابل محاسبه می‌شود:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال) از بین ۱۰ نفر شرکت کننده در مسابقه دو میدانی به چند حالت می‌توان به ۳ نفر اول جایزه داد؟ (احتمالی)

پاسخ) می‌دانیم که در انتخاب ۳ نفر اول ترتیب اهمیت دارد بنابراین تعداد حالت‌ها را طبق رابطه تبدیل می‌نماییم:

$$P(۱۰,۳)=\frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!}=\frac{۱۰!}{۷!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۷!}=۷۲۰$$

ترکیب: تعداد انتخاب‌های r شی از n شی که جابه جایی یا ترتیب اشیاء مهم نباشد

را با نماد $\binom{n}{r}$ یا $C(n,r)$ نشان می‌دهیم و با استفاده از فرمول مقابل محاسبه می‌شود:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$$

مثال) مجموعه هشت عضوی چند زیر مجموعه ۳ عضوی دارد؟ (خرداد ۹۸)

پاسخ) می‌دانیم که در یک مجموعه ترتیب قرار گرفتن اعضا اهمیت ندارد بنابراین طبق رابطه ترکیب تعداد حالت‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$C(۸,۳)=\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!\times(۸-۳)!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۳!\times۵!}=۵۶$$

مثال) ۱۲ نقطه روی محیط دایره قرار دارند با آن‌ها چند وتر و چند مثلث متمایز می‌توان ساخت؟ (تمرین کتاب درسی)

پاسخ) می‌دانیم که هر وتر با دو نقطه و هر مثلث با ۳ مشخص می‌شود که ترتیب انتخاب نقاط اهمیت ندارند بنابراین:

$$\text{تعداد وترها}=\binom{۱۲}{۲}=\frac{۱۲!}{۲!\times(۱۲-۲)!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰!}{۲!\times۱۰!}=۶۶$$

$$\text{تعداد مثلث ها}=\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲!}{۳!\times(۱۲-۳)!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹!}{۳!\times۹!}=۲۲۰$$

سؤالات امتحان نهایی و احتمالی درس اول

الف) جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۱- تعداد جایگشت‌های مختلف ۴ کتاب متمایز .... می‌باشد. (دی ۱۴۰۱)

۲- حاصل $\frac{۵!}{۳!}$ برابر است با .... (شهریور ۱۴۰۱)

۳- برای عدد صفر، فاکتوریل را به صورت .... = !۰ تعریف می‌کنیم. (خرداد ۱۴۰۰)

۴- به .... طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۵ کتاب انتخاب و در یک قفسه بچینیم. (خرداد ۹۹)

ب) درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

۵- حاصل $\frac{۸!}{۴!}$ برابر !۲ است. (خرداد ۱۴۰۱)

۶- برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $۱=!۰$ و $۱=!۱$ تعریف می‌کنیم. (شهریور ۹۹)

ج) گزینه صحیح را انتخاب کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

۷- حاصل $\frac{۶!}{۳!}$ کدام است؟

الف) ۲۰   ب) ۳۰   ج) ۲۵   د) ۱۲۰

۸- با ۸ نقطه متمایز واقع بر محیط دایره چند مثلث می‌توان تشکیل داد؟

الف) ۱۵   ب) ۲۰   ج) ۴۲   د) ۵۶

۹- حاصل $P(۲,۲)$ کدام است؟

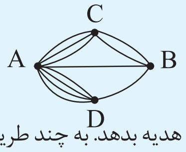
الف) ۱   ب) ۲   ج) ۴   د) صفر

۱۰- با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و بدون تکرار ارقام چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟ (دی ۱۴۰۱)

۱۱- با ارقام ۹ و ۷ و ۴ و ۲ و ۱ چند عدد سه رقمی فرد و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (دی ۹۹)

۱۲- مجموعه پنج عنصری $\{۱,۲,۴,۶,۸\}$ چند زیر مجموعه دو عضوی دارد؟ (دی ۹۸)

۱۳- بین چهار شهر A و B و C و D مطابق شکل مقابل راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر C بدون عبور از شهر B به شهر D سفر کرد؟ (خرداد ۱۴۰۱)



۱۴- علی ۳ کتاب علمی و ۴ کتاب داستان دارد. او می‌خواهد از بین کتاب‌هایش یک کتاب علمی و یک کتاب داستان را به دوستش هدیه بدهد. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟ (شهریور ۱۴۰۱)

۱۵- مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $\binom{۵}{۳}$ باشد. (خرداد ۱۴۰۱)

درس دوم: احتمال

پدیده تصادفی: به پدیده‌ای که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام به طور قطعی پیش‌بینی کرد اما مجموعه‌ای از نتایج ممکن را بتوان پیش‌بینی کرد پدیده یا آزمایش تصادفی می‌نامند و به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی برآمد می‌گوییم.

مثال) پرتاب سکه در شروع مسابقات فوتبال یک پدیده تصادفی می‌باشد.

فضای نمونه: مجموعه تمام نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه آزمایش تصادفی می‌نامیم و آن را با حرف S نشان می‌دهیم و از نماد $n(S)$ برای تعداد اعضای آن استفاده می‌کنیم.

نکته

تعداد اعضای برخی از فضاهای نمونه را به صورت زیر داریم:

الف) اگر یک سکه را n بار (n سکه با هم) پرتاب کنیم آنگاه $n(S)=2^n$

ب) اگر یک تاس را n بار (n تاس را با هم) پرتاب کنیم آنگاه $n(S)=6^n$

ج) اگر خانواده‌ای دارای n فرزند باشد تعداد اعضای فضای نمونه جنسیت فرزندان 2^n می‌باشد.

د) اگر از درون یک جعبه با n مهره، k مهره خارج کنیم تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با $n(S)=\binom{n}{k}$

هـ) در پرتاب n سکه و m تاس، تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با $2^n\times 6^m$.

مثال) در پرتاب یک سکه و یک تاس تعداد اعضای فضای نمونه طبق اصل ضرب برابر است با $n(S)=2\times 6=12$

پیشامد: به هر یک از زیر مجموعه‌های فضای نمونه S یک پیشامد می‌گویند.

مثال) در پرتاب دو سکه با هم پیشامد اینکه مجموعه اعداد رو شده ۷ باشد به صورت زیر است: $A=\{(1,6)(6,1)(2,5)(5,2)(3,4)(4,3)\}$

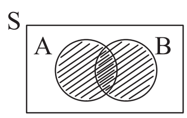
پیشامد غیرممکن: از آن جایی که $\varnothing\subseteq S$ پس $\varnothing$ (تهی) یک پیشامد از فضای نمونه S می‌باشد که به آن پیشامد غیرممکن گوییم.

پیشامد حتمی: از آن جایی که $S\subseteq S$ پس S (فضای نمونه) یک پیشامد از فضای نمونه S می‌باشد که به آن پیشامد حتمی گوییم.

اعمال روی پیشامدها: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند:

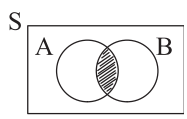
الف) اجتماع دو پیشامد $(A\bigcup B)$ زمانی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

$$A\bigcup B=\{x\in S|x\in A\vee x\in B\}$$



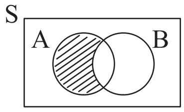
ب) اشتراک دو پیشامد $(A\bigcap B)$ زمانی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

$$A\bigcap B=\{x\in S|x\in A\wedge x\in B\}$$



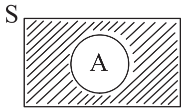
ج) تفاضل دو پیشامد زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی B رخ ندهد.

$$A-B=\{x\in S|x\in A\wedge x\notin B\}$$



د) متمم پیشامد A یعنی A' زمانی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.

$$A'=\{x\in S|x\notin A\}$$



پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار گوییم هر گاه A و B با هم رخ ندهند به عبارت دیگر داشته باشیم $A\bigcap B=\varnothing$

نکته

دو پیشامد A و A' ناسازگارند یعنی $A\bigcap A'=\varnothing$

مثال) در پرتاب یک تاس دو پیشامد زوج آمدن و فرد آمدن ناسازگار هستند.

احتمال یک پیشامد: اگر A یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه S باشد احتمال رخ دادن A را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم و برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد اعضای پیشامد مطلوب}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه}}$$

با توجه به رابطه احتمال مقدار احتمال یک پیشامد نمی‌تواند یک عدد منفی باشد و چون تعداد اعضای پیشامد نمی‌تواند از تعداد اعضای فضای نمونه بیشتر باشد بنابراین مقدار احتمال هم نمی‌تواند از ۱ بیشتر باشد یعنی $0\le P(A)\le 1$

همچنین با توجه به تعاریف پیشامد نشدنی و حتمی داریم:

$$P(S)=1 \quad , \quad P(\varnothing)=0$$

برای پیشامد A و متمم آن یعنی A' هم رابطه احتمال به صورت مقابل برقرار است:

$$P(A')=1-P(A)$$

برای دو پیشامد A و B در فضای نمونه S داریم:

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند چون $A\bigcap B=\varnothing$ و در نتیجه $P(A\bigcap B)=0$ بنابراین می‌توانیم برای دو پیشامد ناسازگار رابطه اجتماع را به صورت زیر بیان کنیم:

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$$

مثال) اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشند و احتمال رخ دادن A برابر $\frac{1}{5}$ و احتمال رخ دادن B برابر $\frac{1}{8}$ و احتمال رخ دادن همزمان A و B برابر $\frac{1}{10}$ باشد احتمال اینکه حداقل یکی از آن‌ها رخ دهد چقدر است؟ (احتمالی)

پاسخ) $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}=\frac{9}{40}$

مثال) در کیسه‌ای ۴ مهره سفید ۳ مهره زرد و ۲ مهره آبی وجود دارد. ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم مطلوبست محاسبه احتمال آنکه رنگ مهره‌ها هر سه متفاوت باشد؟ (دی ۹۹)

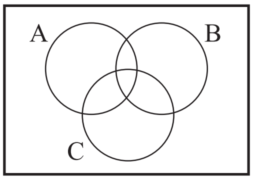
پاسخ) ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را محاسبه می‌کنیم:

$$n(s)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۳!\times ۶!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶!}{۳!\times ۶!}=۸۴$$

حال با توجه به اینکه می‌خواهیم مهره‌ها از رنگ‌های متفاوت باشند باید از هر رنگ فقط یک مهره انتخاب کنیم یعنی:

$$n(A)=\binom{۴}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۲}{۱}=۴\times ۳\times ۲=۲۴$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۴}{۸۴}=\frac{۲}{۷}$$

ردیف		نمره
۱	**درستی یا نادرستی هریک از موارد زیر را مشخص کنید.** الف) مرتب کردن داده ها در گام دوم چرخه آمار اتفاق می افتد. ب) تعداد حالت های قرار گرفتن ۴ دانش آموز در یک صف برابر است با !۴. ج) طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم ترین گام رسیدن به پاسخ می باشد.	۱/۵
۲	**جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.** الف) فضای نمونه پرتاب سه سکه باهم .... عضو دارد. ب) مجموعه ای که تمام حالات ممکن در احتمال را شامل شود .... می‌نامند. ج) تعداد اعضای جامعه را .... می‌نامند.	۱/۵
۳	**گزینه صحیح را انتخاب کنید.** الف) حاصل $\frac{6!}{2!}$ برابر است با: ۱) ۳۶۰ ۲) ۱۲۷ ۳) ۴۲۰ ۴) ۳۰۰ ب) یک مجموعه ۸ عضوی چند از مجموعه سه عضوی دارد. ۱) ۲۷ ۲) ۵۶ ۳) ۲۴ ۴) ۶۰	۲
۴	با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۴ و ۵ چند عدد چهار رقمی زوج می توان نوشت؟ (بدون تکرار)	۲
۵	با حروف کلمه کامپیوتر چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که (بدون تکرار) با حرف «پ» شروع شود و به حرف « ر» ختم شود.	۲
۶	دو تاس را باهم پرتاب می کنیم. احتمال اینکه حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۴ باشد.	۲
۷	اگر A , B , C سه پیشامد در فضای بسته S باشند، پیشامد اینکه فقط A رخ دهد و پیشامد هایB یا C رخ ندهد را در نمودار مشخص کنید. 	۱
۸	جعبه ای که شامل ۴ مهره قرمز ۷ مهره آبی می باشد، ۳ مهره را به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال اینکه تعداد مهره های قرمز از مهره های آبی بیشتر باشد چقدر است.	۲
۹	چهار جمله اول دنباله $a_n = \frac{(-1)^n}{2}$ را بنویسید و آن را رسم کنید.	۳
۱۰	جملات دنباله $\frac{1}{3}$ و۱و۳و۹ را در نظر بگیرید. الف) فرمول بازگشتی این دنباله را بنویسید. ب) ضابطه این دنباله را بنویسید.	۳
	موفق باشید جمع نمرات	۲۰

زمان امتحان: ۹۰ دقیقه	امتحان احتمالی نوبت دوم	رشته: علوم انسانی	ریاضی و آمار (۳)	امتحان شماره ۳

ردیف		نمره
۱	**درستی یا نادرستی هریک از موارد زیر را مشخص کنید.** الف) به انتخاب شی از r شیء n که در آن جابه جایی اشیاء انتخاب شده اهمیت دارد، ترکیب می گوییم. ب) نسبت مشترک (r)، دنباله $\dots, \frac{1}{3}, 1, 3, 9$ برابر است با $\frac{1}{3}$. ج) دو تابع نمایی $y = a^x$ $(0 < a < 1)$ با افزایش مقادیر x، مقادیر y نیز افزایش می یابد. د) در پرتاب یک تاس دو پیشامد زوج آمدن و فرد آمدن، دو پیشامد ناسازگار هستند.	۱
۲	**جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.** الف) ریشه سوم عدد ۲۷- برابرست با.................. . ب) مطمئن ترین نمودار برای متغیر کمی، نمودار .... می باشند. ج) در یک دنباله حسابی اگر $d > 0$ (اختلاف مشترک)، در این صورت دنباله .... می باشد. (افزایش - کاهش) د) اگر برای دو پیشامد A و B داشته باشیم .... در این صورت ناسازگار می‌نامیم.	۱
۳	با ارقام ۰ و ۲ و ۳ و ۵ و ۷ چند عدد سه رقمی می توان نوشت. (بدون تکرار)	۱/۵
۴	روی یک محیط دایره ۱۰ نقطه وجود دارد. چه تعداد مثلث با این نقاط می توان تشکیل داد.	۱/۵
۵	می‌خواهیم از بین ۷ دانش آموز پایه دهم و ۵ دانش آموز پایه یازدهم یک تیم ۸ نفره تشکیل دهیم. مطلوب است احتمال اینکه ۶ نفر از اعضای تیم پایه دهم و ۲ نفر پایه یازدهم باشند.	۱/۵
۶	با توجه به رابطه $a_n = 1$, $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$, سه جمله اول را بنویسید.	۱/۵
۷	جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم آن ۲۴۳ می باشد. جمله هفتم این دنباله را مشخص کنید.	۲
۸	دنباله $3, 7, 11, \dots$ را در نظر بگیرید. الف) رابطه بازگشتی را بنویسید. ب) مجموعه ۲۰ جمله اول را بدست آورید.	۲
۹	مقدار x را از تساوی زیر بدست آورید. $\frac{x^7 \times 35^3}{5^2 \times 5^3 \times 5^5} = 7^{10}$	۲
۱۰	هریک از اعداد رادیکالی توان دار و هر عدد توان دار را به شکل رادیکالی بنویسید. الف) $7^{\frac{2}{9}}$ ب) $\sqrt[5]{6^3}$	۱/۵
۱۱	نمودار تابع $y = 3^x$ را رسم کنید و از روی نمودار مقدار تقریبی $3^{\frac{1}{2}}$ بنویسید.	۲/۵
۱۲	جمعیت شهری در سال ۲۰۲۰ میلادی حدود یک میلیون نفر برآمد شده است اگر رشد جمعیت این شهر با نرخ ۱۰ درصد در حال افزایش، رشد در سال ۲۰۲۲ میلادی، جمعیت این شهر چند نفر خواهد بود.	۲
	موفق باشید	جمع نمرات ۲۰

پاسخنامه تشریحی آموزشی

فصل اول — درس اول

الف)

۱- $۴!=۲۴$ ۲- ۲۰

۳- ۱   ۴- $\binom{۵}{۳}=۱۰$

ب)

۵- نادرست زیرا $\frac{۸!}{۴!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!}=۱۶۸۰$

۶- درست

ج)

۷- $\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۱۲۰$

۸- $\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!\times۵!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۳!\times۵!}=۵۶$

۹- $P(۲,۲)=\frac{۲!}{(۲-۲)!}=\frac{۲!}{۰!}=۲$

۱۰- با توجه به شرط زوج بودن عدد باید یکان آن زوج باشد و چون رقم صفر در بین ارقام وجود دارد و اینکه رقم صفر در صدگان هم نمی‌تواند قرار بگیرد باید برای شمارش تعداد اعداد سه رقمی به دو حالت سؤال را حل کنیم:

حالت اول: رقم یکان صفر باشد.

۶	۵	۱
حالت	حالت	حالت

و طبق اصل ضرب $۳۰=۱\times۵\times۶$ می‌توان نوشت.

حالت دوم: رقم یکان غیر صفر باشد.

۵	۵	۳
حالت	حالت	حالت

و طبق اصل ضرب $۷۵=۳\times۵\times۵$ می‌توان نوشت.

و در نهایت طبق اصل جمع $۱۰۵=۳۰+۷۵$ عدد می‌توان نوشت.

۱۱- طبق شرایط فرد بودن و اینکه رقم تکراری نباید وجود داشته باشد.

۴	۳	۳
حالت	حالت	حالت

و طبق اصل ضرب $۳۶=۳\times۳\times۴$ عدد می‌توان نوشت.

۱۲- چون در مجموعه ترتیب اعضا اهمیت ندارد بنابراین پاسخ سؤال به صورت

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۲!\times۳!}=\frac{۵\times۴\times۳!}{۲!\times۳!}=۱۰$$

۱۳- طبق شرایط سؤال چون نباید از شهر B عبور کنیم، باید ابتدا از شهر C به شهر A و سپس از شهر A به شهر D برویم. از شهر C به شهر A، ۳ راه مختلف و از شهر A به شهر D، ۴ راه مختلف وجود دارد و طبق اصل ضرب در نهایت به $۱۲=۴\times۳$ طریق مختلف می‌توانیم از C به D برویم.

۱۴- $\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱}=\frac{۳!}{۱!\times۲!}\times\frac{۴!}{۱!\times۳!}=\frac{۳\times۲!}{۱\times۲!}\times\frac{۴\times۳!}{۱\times۳!}=۳\times۴=۱۲$

۱۵- هر مسئله‌ای که طرح کنیم که برای پاسخ آن به انتخاب ۳ شی از ۵ شی متمایز بیانجامد که ترتیب هم اهمیت نداشته باشد درست است. بنابراین می‌توانیم سؤال را به صورت زیر مطرح کنیم.

می‌خواهیم از بین ۵ نفر یک کمیته ۳ نفر تشکیل دهیم این کار به چند طریق امکان پذیر است.

درس دوم

الف)

۱- غیر ممکن   ۲- برآمد

۳- ناسازگار   ۴- $۲^۳=۸$

ب)

۵- درست   ۶- درست

۷- نادرست زیرا جواب معادله به طور قطعی تعیین می‌شود.

۸- نادرست زیرا نتیجه آزمون کل فضای نمونه را تشکیل نمی‌دهد.

ج)

۹- $n(S)=۲^۳=۸$

۱۰- $P(A)=۰/۰۱\Rightarrow P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۰۱=۰/۹۹$

۱۱- پیشامد نشدنی یا غیر ممکن که همان پیشامد تهی می‌باشد که طبق مطالب درسنامه احتمال آن برابر صفر می‌شود.

۱۲- جعبه کلاً ۱۲ مهره دارد بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با:

$$n(S)=\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲!}{۳!\times۹!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹!}{۳!\times۹!}=۲۲۰$$

پیشامد بیان شده در صورت سؤال حداکثر ۲ مهره قرمز است یعنی ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی یا ۱ مهره قرمز و ۲ مهره آبی یا هر سه مهره آبی می‌باشد که تعداد اعضای پیشامد برابر می‌شود با:

$$n(A)=\binom{۷}{۲}\times\binom{۵}{۱}+\binom{۷}{۱}\times\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۳}=۲۱\times۵+۷\times۱۰\times۱۰=۱۸۵$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۸۵}{۲۲۰}=\frac{۳۷}{۴۴}$$

۱۳- در پرتاب ۲ تاس پیشامد مطلوب مجموع ۱۰ و ۱۱ می‌باشد یعنی:

$A=\{(۶,۵)(۵,۶)(۶,۶)\}$

۱۴- الف) $S=\{(\text{د},\text{د}),(\text{پ},\text{پ}),(\text{پ},\text{د}),(\text{د},\text{پ})\}\Rightarrow n(S)=۴$

ب) $A=\{(\text{د},\text{د}),(\text{پ},\text{پ})\}\Rightarrow n(A)=۲\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

۱۵- $n(S)=۲\times۶=۱۲$

$$A=\{(\text{ر},۱),(\text{پ},۱),(\text{ر},۲),(\text{پ},۲),(\text{ر},۳),(\text{پ},۳),(\text{ر},۴),(\text{ر},۵),(\text{ر},۶)\}$$

$$\Downarrow$$

$$n(A)=۹$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۱۲}=\frac{۳}{۴}$$