پیشگفتار

درود و ادب به تمامی دبیران و مدرسان گرامی و دانش آموزان دوست داشتنی و سخت‌کوش سراسر ایران پهناور
با توجه به تغییرات صورت گرفته در شرایط برگزاری کنکور سراسری و تاثیر سوابق تحصیلی در ورود به دانشگاه و موسسات آموزش عالی، بر آن شدیم تا منبعی مطمئن برای یادگیری و آموزش اثربخش و سنجش و ارزیابی هدفمند و موثر فراهم کرده و مسیر دانش آموزان عزیز را جهت کسب نمره (۲۰) در تمام امتحانات پیش رویشان هموار سازیم.

درباره کتاب

مجموعه کتاب‌های سیگنال ۲۰ خط سفید برای تمام دروس پایه دوازدهم در ۳ رشته تحصیلی علوم ریاضی و فیزیک، علوم تجربی و علوم انسانی به تالیف و گردآوری رسیده و شامل ٤ بخش اصلی می‌باشد.

۱. آموزش (درسنامه کاملا کاربردی)
محتوای تالیفی درسنامه ها شامل تمام مطالب آموزشی مهم و کاربردی و مفاهیم اساسی و نکات کلیدی کتاب درسی بوده که موجب تسهیل فرآیند یادگیری شده و امکان مرورهای سریع و مانا و همچنین جمع‌بندی‌های دوره‌ای را در طول سال تحصیلی فراهم می‌سازد.

۲. سنجش (سوالات امتحانات نهایی و احتمالی)
به منظور بالا بردن سطح توانایی و مهارت دانش‌آموزان پایه دوازدهم برای پاسخگویی کامل و درست به پرسش‌های امتحانات گوناگون و تقویت یادگیری، سوالاتی در تیپ و قالب های متنوع نهایی و تالیفی-احتمالی گردآوری و تالیف گردیده است؛ که با تمرین و تکرار مداوم این سوالات، امکان شناخت نقاط قوت و ضعف دانش‌آموزان را در درس‌های مختلف فراهم می‌سازد.

۳. نمونه سوال امتحان (امتحانات ۲۰ نمره‌ای نوبت اول و دوم - نهایی و احتمالی)
علاوه بر مجموعه سوالات طبقه بندی شده، ۲ نمونه امتحان تالیفی-احتمالی نوبت اول (دیماه)، ۲ نمونه امتحان تالیفی-احتمالی نوبت دوم (خردادماه)، امتحان نهایی دوره های شهریور و دی ماه ۱۴۰۱ و امتحان نهایی دوره خرداد ماه ۱۴۰۲ برای بررسی و ارزیابی میزان یادگیری و ارتقاء هرچه بیشتر توانمندی دانش‌آموزان عزیز و کسب بهترین نتیجه فراهم شده است.

٤. پاسخنامه تشریحی آموزشی
پاسخنامه کاملا تشریحی و آموزشی سوالات در پایان کتاب برای تقویت یادگیری و کاهش حداکثری خطاها و اشتباهات احتمالی دانش‌آموزان آماده سازی شده است.

فهرست

سیگنال بگیر تا بیست برو!

بارم‌بندی

فصل	محدوده فصل	نوبت اول دی	نوبت دوم خرداد	شهریور و دی
۱	کل	۷	۲	۳
۲	کل	٥	۲	۳
۳	کل	٥	۲	۲
٤	تا صفحه ۷٦	۳	۱	٥
	صفحه ۷۷ به بعد		٤	
٥	کل		۳/٥	۳
٦	کل		۳/٥	۲/٥
۷	کل		۲	۱/٥
جمع نمرات		۲۰	۲۰	۲۰

درس نامه

فصل اول
تابع

درس اول: توابع چند جمله ای - صعودی و نزولی

تعریف: تابع $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ را که در آن تمام ضرایب $a_n,...,a_1,a_0$ همگی **اعداد حقیقی** می باشند و n یک عدد **صحیح نا منفی** است ($a_n \neq 0$) یک **چند جمله ای** از درجه n می‌نامیم. دامنه و برد این گونه توابع مجموعه اعداد حقیقی می باشد.

مثال: تابع $f(x)=9x^{10}+\sqrt{8}x^2+3x+1$ را یک چند جمله ای از درجه ۱۰ می‌نامند.

حالت‌های خاص که در سال‌های گذشته با آن‌ها آشنا شدید

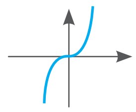
۱- **توابع ثابت** ($f(x)=k$): توابع چند جمله ای از درجه صفر می باشد. از لحاظ نموداری هرخط موازی محور x ها می‌باشد؛ مثال: $f(x)=5$

۲- **توابع خطی** ($f(x)=ax+b$): توابع چند جمله‌ای از درجه یک می‌باشند نمودارشان یک خط می باشد؛ مثال: $f(x)=2x+1$

۳- **توابع درجه دوم** ($f(x)=ax^2+bx+c$): توابع چند جمله‌ای از درجه دو می‌باشند. نمودار آن ها به شکل سهمی می باشد؛ مثال: $f(x)=2x^2+7x+3$

معرفی تابع $f(x)=x^3$

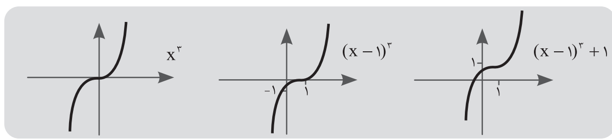
یک تابع چند جمله ای از درجه سه، که دامنه و برد آن برابر با $\mathbb{R}$ می باشد. نمودار آن به شکل زیر می‌باشد.



این نمودار را به خوبی به خاطر بسپارید. با استفاده از این نمودار می توان نمودارهای دیگری را با استفاده از مفهوم انتقال توابع رسم کرد.

مثال: نمودار تابع $f(x)=(x-1)^3+1$ را رسم کنید. (مشابه تمرین)

پاسخ: ابتدا نمودار $f(x)=x^3$ را رسم می کنیم. سپس نمودار را در جهت مثبت روی محور x ها یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم بعد از آن نمودار جدید را یک واحد به سمت بالا انتقال می دهیم.



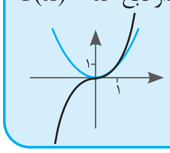
● **به مقایسه بین نمودارهای x^2 و x^3 دقت کنید.**

اگر x عددی بین صفر و یک باشد در این صورت مقدار x^2 از مقدار x^3 بیشتر می‌شود. مثلاً $x=\frac{1}{2}$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$\begin{cases} x^2=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4} \\ x^3=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4}>\frac{1}{8}$$

نکته

از لحاظ نموداری هم در بازه (۰و۱)، نمودار تابع $f(x)=x^2$ از نمودار تابع $f(x)=x^3$ بالاتر می باشد.

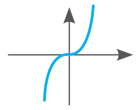


معرفی توابع صعودی و نزولی

تعریف: برای تابع $f(x)$، هرگاه با **افزایش** مقادیر x، مقادیر y هم به طور مرتب **افزایش** یابند، تابع را **اکیداً صعودی** می نامیم. به عبارتی می‌توان نوشت:

برای هر x_1 و x_2 از دامنه $f(x)$ که $x_2>x_1$، داشته باشیم $f(x_2)>f(x_1)$

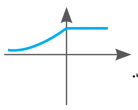
مثال: تابع $y=x^3$ یک تابع اکیداً صعودی می باشد. (نهایی خرداد ۱۴۰۱)



حال اگر در تابع $f(x)$، با افزایش مقادیر x، مقادیر y هم افزایش یابند یا ثابت بمانند می‌گوییم تابع $f(x)$، **صعودی** می باشد.

یعنی برای هر x_1 و x_2 از دامنه $f(x)$ که $x_2>x_1$، داشته باشیم $f(x_2)\geq f(x_1)$.

مثال: نمودار شکل مقابل یک **تابع صعودی** را نشان می‌دهد.

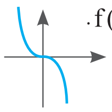


به همین ترتیب می‌توان مفهوم توابع **اکیداً نزولی** و نزولی را تعریف کرد.

تعریف: برای تابع $f(x)$، هر گاه با افزایش مقادیر x، مقادیر y به طور مرتب کاهش یابند، تابع را **اکیداً نزولی** می‌نامیم. به عبارتی می‌توان نوشت:

برای هر x_1 و x_2 از دامنه $f(x)$ که $x_2>x_1$، داشته باشیم $f(x_2)<f(x_1)$.

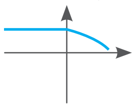
مثال: تابع $f(x)=-x^3$ یک تابع اکیداً نزولی می باشد. (برگرفته از کتاب درسی)



حال اگر در تابع $f(x)$، با **افزایش** مقادیر x، مقادیر y **کاهش** یابند یا ثابت بمانند، می گوییم تابع $f(x)$، **نزولی** می‌باشد. به عبارتی می‌توان نوشت:

برای هر x_1 و x_2 از دامنه تابع $f(x)$ که $x_2>x_1$، داشته باشیم $f(x_2)\leq f(x_1)$.

مثال: نمودار شکل مقابل یک تابع **نزولی** را نشان می‌دهد.



نکته

توابع ثابت در یک بازه هم **صعودی** هستند و هم **نزولی**.

نکته

هر تابع **اکیداً صعودی** یا اکیداً **نزولی** را اکیداً **یکنوا** می نامیم. و هر تابع **صعودی** یا **نزولی** را **یکنوا** می نامیم.

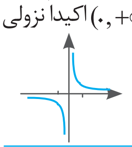
نکته

هر تابع **اکیداً یکنوا**، همواره **یکنواست**. اما عکس این مطلب درست نیست.

تذکر

دقت شود که یک تابع می تواند در هر بازه ای به طور جداگانه صعوی یا نزولی باشد، اما در کل دامنه تعریف نه صعودی باشد و نه نزولی. سوال ۳ قسمت (ب) را ببینید.

مثال: تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید. نمودار آن در شکل زیر رسم شده است.
همان طور که مشاهده می کنید این نمودار در بازه های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً نزولی می‌باشد اما در کل $\mathbb{R}$ **نه صعودی** است و **نه نزولی**.



تذکر

نمودارهای که در ظاهر چند قسمتی هستند حتماً برای صعودی و نزولی بودن در کل دامنه تعریف باید دقیق بررسی شوند.

سـؤالات امتحان نهایی و احتمالی فصل اول (درس اول)

۱- درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را تعیین کنید.

الف) تابع ثابت در یک بازه هم صعودی است و هم نزولی. (شهریور ۹۸)

ب) در بازه (۰و۱)، نمودار تابع $f(x)=x^3$ از نمودار تابع $f(x)=x^2$ بالاتر است. (دی ماه ۹۹)

پ) تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{x}$، اکیداً صعودی است. (شهریور ۱۴۰۰)

ت) اگر f روی بازه های (a,b) , (b,c) اکیداً صعودی باشد. آن‌گاه f روی بازه (a,c) اکیداً صعودی است. (احتمالی)

ث) هر تابع یک به یک اکیداً یکنواست. (احتمالی)

ج) اگر تابع f در یک فاصله اکیداً نزولی باشد، در این فاصله نزولی است. (احتمالی)

چ) هر تابع اکیداً یکنوا ، یک به یک است. (احتمالی)

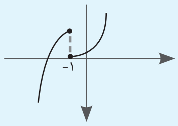
۲- با توجه به نمودار تابع $y=x^3$، نمودار تابع $y=-(x+1)^3-4$ را رسم کنید. (احتمالی)

۳- هر کدام از توابع زیر در چه بازه هایی اکیداً صعودی و در چه بازه هایی اکیداً نزولی هستند. درکل دامنه تعریف هم وضعیت آن‌ها مشخص شود. (احتمالی)

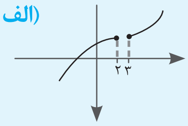
د) $f(x)=x^2|x|$

ج) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 1 & 0\le x<1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$

ب)



الف)



۴- تابع $f=\{(2,1),(3,m-1),(4,7-m)\}$ یک تابع صعودی است. حدود m را بیابید. (احتمالی)

۵- اگر تابع $f(x)=(a^2-4)x^2+ax+5$ در کل $\mathbb{R}$ صعودی باشد مقدار a را بدست آورید. (احتمالی)

۶- اگر $f(x)$ یک تابع اکیداً نزولی باشد و داشته باشیم $f(5x+2)<f(5-x)$ حدود x را بدست آورید. (احتمالی)

۷- نمودار تابع $f(x)$ را چنان رسم کنید که روی بازه $[-2,0]$ ، $[0,2]$ صعودی باشد اما روی بازه $[-2,2]$ صعودی نباشد.(احتمالی)

۸- صعودی یا نزولی بودن توابع $y=2^x+1$ ، $y=-\log_2^x$ را بررسی کنید. (احتمالی)

۹- نمودار توابع $f(x)=x^3$, $g(x)=x|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و با هم مقایسه کنید. (احتمالی)

درس دوم: ترکیب دو تابع و رسم نمودارها با استفاده از انتقال توابع

●**ترکیب دو تابع:** $x\xrightarrow[g]{}g(x)\xrightarrow[f]{}f(g(x))$ $\quad$ $x\xrightarrow[f]{}f(x)\xrightarrow[g]{}g(f(x))$

تعریف: برای دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به ترتیب با دامنه های D_f و D_g، ترکیب دو تابع را با نمادهای fog و gof نشان می دهیم و آن را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$(fog)(x)=f(g(x))$ ※یعنی در تابع f(x) به جای تمام x ها قرار دهیم g(x)

$(gof)(x)=g(f(x))$ ※یعنی در تابع g(x) به جای تمام x ها قرار دهیم f(x)

نکته

شرط تشکیل $(fog)(x)$ آن است که $D_f \cap R_g \neq \varnothing$. (اشتراک دامنه f و برد g مخالف تهی باشد)

※ اگر توابع f و g را بصورت زوج مرتب داشته باشیم در این صورت برای بدست آوردن $(fog)(x)$ یا $(gof)(x)$ باید به صورت زیر عمل کنیم. مثال را ببینید.

مثال: برای دو تابع $f=\{(1,2),(3,5),(7,-1)\}$ و $g=\{(3,1),(4,3),(-1,2)\}$ تابع fog را بدست آورید.

پاسخ:

$$\begin{cases} f(g(3))=f(1)=2 \\ f(g(4))=f(3)=5 \\ f(g(-1))=f(2)=? \ \text{تعریف‌نشده} \end{cases} \Rightarrow (fog)=\{(3,2),(4,5)\}$$

مشخص کردن دامنه‌های fog و gof با استفاده از تعریف:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} \quad , \quad D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

مثال: برای توابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$، ضابطه تابع fog و دامنه gof را بدست آورید.

پاسخ: $D_f=[1,+\infty) \quad , \quad D_g=\mathbb{R}$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{(2x^2-1)-1}=\sqrt{2x^2-2}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in[1,+\infty) \mid \sqrt{x-1}\in\mathbb{R}\}=$$

$$\{x\in[1,+\infty) \mid x\in[1,+\infty)\}=[1,+\infty)$$

نکته

بدست آوردن g(x) وقتی که f(g(x)) و f(x) را داریم:

کافی است در تابع f(x) به جای x ها، g(x) را قرار دهیم و از تساوی بدست آمده معادله حل کنیم و g(x) را بدست آوریم.

مثال: اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$ باشد، ضابطه تابع g(x) را بدست آورید. (تمرین کتاب)

پاسخ: در تابع f(x) به جای تمام x ها، قرار می دهیم g(x). داریم:

$$f(x)=3x-4 \Rightarrow f(g(x))=3g(x)-4=3x^2-6x+14 \Rightarrow$$

$$3g(x)=3x^2-6x+18 \Rightarrow g(x)=x^2-2x+9$$

نکته

بدست آوردن تابع f(x) وقتی که f(g(x)) و g(x) را داریم:

کافی است قرار دهیم g(x)=t. سپس از این رابطه، x را بر حسب t پیدا می‌کنیم و در تساوی (fog)(x) داده شده قرار می‌دهیم. در نهایت تمام t ها را به x تبدیل می‌کنیم.

مثال: اگر $f(g(x))=2x+11$ و $g(x)=x+4$ باشد، ضابطه تابع f(x) را بدست آورید. (احتمالی)

پاسخ: $f(x+4)=2x+11 \quad , \quad x+4=t \to x=t-4$

$$f(t)=2(t-4)+11=2t+3 \Rightarrow f(x)=2x+3$$

خواص ترکیب تابع‌ها

نکته

در حالت کلی، ترکیب توابع خاصیت جابجایی ندارد. یعنی: $(fog)(x) \neq (gof)(x)$

ترکیب توابع خاصیت شرکت پذیری دارد. یعنی: $fo(goh)(x)=(fog)oh$

تبدیل نمودار توابع با استفاده از مفهوم انتقال

۱- انتقال عمودی:

الف) برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$ از روی نمودار $y=f(x)$، کافی است x ها را ثابت نگه داریم و به تمام مقادیر y، k واحد اضافه کنیم. (نمودار را k واحد به بالا منتقل کنیم.)

ب) برای رسم نمودار تابع $y=f(x)-k$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، کافی است x ها را ثابت نگه داریم و از تمام مقادیر y، k واحد کم کنیم. (نمودار را k واحد به پایین انتقال دهیم.)

۲- انتقال افقی:

الف) برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$ از روی نمودار $y=f(x)$، کافی است مقادیر y را ثابت نگه داریم و از تمام مقادیر x، k واحد کم کنیم. (نمودار را k واحد به سمت چپ انتقال دهیم)

ب) برای رسم نمودار تابع $y=f(x-k)$ از روی نمودار $y=f(x)$، کافی است مقادیر y را ثابت نگه داریم و به تمام مقادیر x، k واحد اضافه کنیم. (نمودار را k واحد به سمت راست انتقال دهیم)

● **در این موارد نکات زیر را در نظر داشته باشید.**

الف) دامنه تابع $y=f(x)\pm k$ با دامنه تابع $y=f(x)$، برابر است.

ب) برد تابع $y=f(x\pm k)$ با برد تابع $y=f(x)$، برابر است.

۳- انبساط و انقباض عمودی:

برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ از روی نمودار $y=f(x)$، کافی است مقادیر x را ثابت نگه داریم و تمام مقادیر y را در عدد k ضرب کنیم.

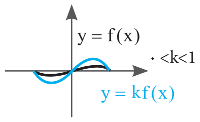
نکته

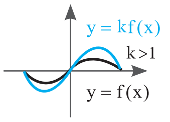
اگر $k>1$، نمودار به طور **عمودی منبسط** می‌شود

نکته

گر $0<k<1$، نمودار به طور **عمودی منقبض** می شود.

مثال:





۴- انبساط و انقباض افقی:

برای رسم نمودار $y=f(kx)$ از روی نمودار $y=f(x)$، کافی است مقادیر y را ثابت نگه داریم و تمام مقادیر x را بر عدد k تقسیم کنیم.

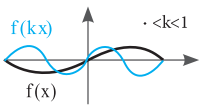
نکته

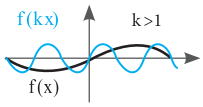
اگر $k>1$، نمودار به طور افقی منقبض می شود.

نکته

اگر $0<k<1$، نمودار به طور افقی منبسط می شود.

مثال:





● **در این موارد نکات زیر را در نظر داشته باشید:**

الف) دامنه تابع $y=kf(x)$ با دامنه تابع $y=f(x)$ برابر است.

ب) برد تابع $y=f(kx)$ با بُرد تابع $y=f(x)$ برابر است.

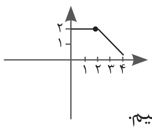
نکته طلایی

اولویت اعمال تغییرات روی تابع $y=f(x)$، برای حالت کلی $af(bx+c)+d$

۱- تأثیر ثابت c (انتقال افقی) ۲- تأثیر ضریب b (انقباض یا انبساط افقی)

۳- تأثیر ضریب a (انقباض یا انبساط عمودی) ۴- تأثیر ثابت d (انتقال عمودی)

مثال: با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر، نمودار تابع $y=2f(x-1)+1$ را رسم کنید. (امتحان نهایی)



پاسخ: برای راحتی کار تمام نقاط مشخص شده در شکل را می نویسیم.

۱- ابتدا تغییرات روی x ها را اعمال می کنیم.

مقادیر y ها ثابت و به x ها یک واحد اضافه می کنیم. (یادمان باشد x ها لجبازن)

۲- تغییرات ضرب و جمع روی y ها را اعمال می‌کنیم.

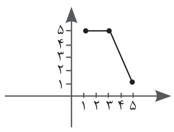
x ها ثابت می مانند و y ها را دو برابر می کنیم با یک جمع می‌کنیم.

مرحله مرحله

$$(0,2)\xrightarrow{(1)}(1,2)\xrightarrow{(2)}(1,2(2)+1)=(1,5)$$

$$(2,2)\xrightarrow{(1)}(3,2)\xrightarrow{(2)}(3,2(2)+1)=(3,5)$$

$$(4,0)\xrightarrow{(1)}(5,0)\xrightarrow{(2)}(5,0(2)+1)=(5,1)$$



نکته طلایی

۱- برای رسم نمودار تابع y=-f(x)، کافی است نمودار را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

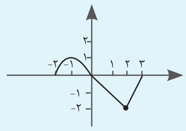
۲- برای رسم نمودار تابع y=f(-x)، کافی است نمودار را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

۳- برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$، فقط قرینه قسمت های زیر محورx ها را نسبت به محور x ها رسم کنیم. اما قسمت های بالای محور x ها در جای خود باقی می‌ماند.

۱- درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را تعیین کنید.

الف) اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$، آن گاه $(fog)(۴)=۵$ (دی ماه ۱۴۰۰)

ب) برد تابع با ضابطه $y=kf(x)$، همان برد تابع $y=f(x)$ می باشد. (نهایی دی ماه ۹۸)



۲- برد تابع $f(x)$ بازه $[-۳,۱)$ می باشد. برد تابع $y=-۲f(۳x-۱)+۳$ را بدست آورید. (خرداد ماه ۱۴۰۱)

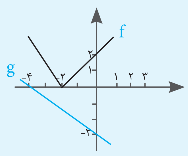
۳- با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار تابع $y=۳f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنید. (خرداد ماه ۹۹)

۴- نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^۲-۲x+۱$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین و سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله آخر نسبت به محور x ها قرینه می کنیم. ضابطه نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید. (شهریور ماه ۱۴۰۰)

۵- با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را بدست آورید. (شهریور ماه ۱۴۰۰)

الف) $(gof)(۱)$ ب) $(fo(f+g))(۰)$

x	−۱	۰	۱	۲
f(x)	۰	−۱	۲	−۵
g(x)	۲	۳	۴	−۲



۶- با توجه به نمودارهای f و g، به سؤالات زیر پاسخ دهید. (دی ماه ۹۹ و ۱۴۰۰)

الف) $(fog)(-۴)$

ب) اگر $g(۳t-۱)=۰$، t را بدست آورید.

ج) با محدود کردن دامنه f، بازه ای را مشخص کنید که f یک به یک شود.

د) $(g^{-۱}of^{-۱})(۲)$

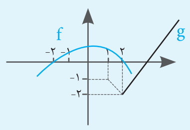
۷- توابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$ را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطه تابع gof را مشخص کنید. (احتمالی)

۸- اگر نقطه $A(۵,۲)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، آن گاه نقطه متناظر A در نمودار تابع $y=-۳f(\frac{۱}{۲}x)+۵$ را بدست آورید. (احتمالی)

۹- اگر $f(x)=x+b$ و $g(x)=x^۲+ax$، a و b را طوری تعیین کنید که $(fog)(x)=x^۲+۸x+۵$. (احتمالی)

۱۰- برای توابع $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g=\{(-۱,۵),(۴,۶),(۲,۳)\}$، تابع $(fog)(x)$ را بدست آورید. (احتمالی)

۱۱- با توجه به نمودار زیر موارد خواسته شده را پاسخ دهید. (احتمالی)



$(fog)(۲)=$

۱۲- اگر $f(x)=۵x+a$ و $g(x)=۷-x$ باشند به طوری که $(fog)(x)-(gof)(x)=۱۰$ مقدار a را بدست آورید. (احتمالی)

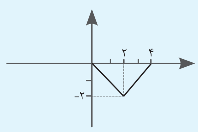
۱۳- برای هر یک از توابع داده شده دامنه و ضابطه (fog) را بدست آورید. (احتمالی)

الف) $f(x)=\sqrt{x+۳}$ $\quad g(x)=\sqrt{۲-x}$

ب) $f(x)=\frac{۴}{x+۳}$ $\quad g(x)=\sqrt{x}$

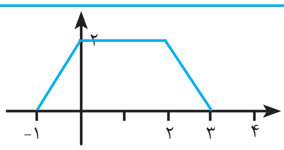
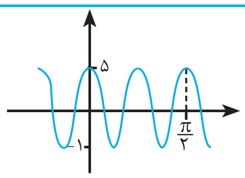
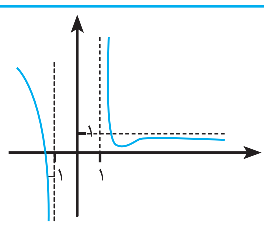
ج) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad g(x)=\sin x$

۱۴- نمودار تابع $y=f(x+۱)$ به شکل زیر در نظر بگیرید. سپس نمودار $y=۲f(x-۱)+۱$ را رسم کنید. (احتمالی)

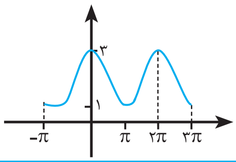


۱۵- نمودار تابع $f(x)=-۲\sin(۳x)$ را با استفاده از نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم کنید. (در بازه $[۰,۲\pi]$) (احتمالی)

امتحان شماره ۱	ریاضی (۳)	رشته: علوم تجربی	امتحان احتمالی-نوبت اول	زمان آزمون: ۱۲۰ دقیقه

ردیف		نمره
۱	**جمله های صحیح و غلط را مشخص کنید.** الف) تابع $f(x)=\sqrt{۷}x^۳+\sqrt{x^۲}-۳$ یک تابع چند جمله ای درجه سوم می‌باشد. ب) ماکزیمم مقدار تابع $y=۲\sin \pi x-۳$ برابر ۲ می‌باشد ج) تابع $y=-\log_{\sqrt{۲}}^{x+۱}$ در دامنه تعریف خود اکیداً نزولی است. د) برای دو تابع f و g که $f\neq g$، تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ گاه برقرار نیست .	۲
۲	**در جای خالی کلمه‌ی مناسب قرار دهید.** الف) دوره تناوب تابع $y=\|\sin x\|$ برابر است با .... ب) اگر نمودار $y=f(x)$ را ابتدا ۳ واحد به سمت راست و سپس ۴ واحد به سمت بالا انتقال دهیم ضابطه تابع به صورت .... در می آید. ج) اگر $f'(۳)=۱$ باشد مقدار $\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{۴(x-۳)}$ برابر است با.......... د) وارون تابع $y=۳^x-۱$ به صورت .... می‌باشد.	۲
۳	برای توابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$ دامنه تابع fog و gof را بدست آورید.	۱/۵
۴	با توجه به نمودار $f(x)$ در شکل زیر، نمودار تابع $y=۲f(x+۳)$ را رسم کنید.  	۱/۵
۵	برای تابع $f(x)=x^۲+۲x+۷$ دامنه را طوری محدود کنید که تابع وارون پذیر باشد و سپس وارون آن را بدست آورید.	۱
۶	حاصل عبارت $۴\sin x\cos x\cos ۲x$ را به ازای $x=۷/۵^\circ$ محاسبه کنید.	۱/۵
۷	معادله مثلثاتی $\cos ۲x-۳\sin x+۱=۰$ را حل کنید.	۱/۵
۸	با توجه به نمودار زیر ضابطه تابع مثلثاتی رابنویسید.  	۱/۷۵
۹	حاصل هریک از حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید الف) $\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲}{[x]-۱}$ ب) $\lim_{x\to ۱}\frac{۲x+۱}{\|x-۱\|}$ ج) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^۲+۷x+۱}{۳x^۲+۱}$ د) $\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{۲-\sqrt{x+۲}}$	۲/۷۵
۱۰	با توجه به نمودار زیر حاصل هریک از حدهای زیر را بنویسید. $\lim_{x\to -۱^-} f(x)$ $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$  	۱/۵
۱۱	معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=x^۲+۱$ را در نقطه ای به طول $x=۲$ بدست آورید.	۱/۵
۱۲	مشتق تابع $f(x)=x^۳-۱$ را با استفاده از تعریف بدست آورید .	۱/۵
	موفق و سربلند باشید جمع نمرات	۲۰

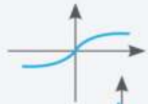
امتحان شماره ۳	ریاضی (۳)	رشته: علوم تجربی	امتحان احتمالی - نوبت دوم	زمان آزمون: ۱۲۵ دقیقه

ردیف		نمره
	جمله های صحیح و غلط را مشخص کنید.	
۱	الف) در نقطه $x=0$ برای تابع $y=\sqrt[3]{x}$ یک مماس قائم داریم. ب) هر نقطه بحرانی اکسترمم نسبی است. ج) هر تابع ثابت هم صعودی است هم نزولی.	۱/۵
	در جای خالی کلمه‌ی مناسب قرار دهید.	
۲	الف) در بازه $(0,1)$ نمودار تابع $y=x^2$، ...... نمودار تابع $y=x^3$ قرار دارد. ب) برای تابع $f(x)=8x^3+3x^2+1$ مقدار $f''(0)$ برابر است با .... ج) اگر تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در $x=a$، .... است.	۱/۵
۳	برای توابع $f(x)=x+1$, $g(x)=\sqrt{x+3}$ D_{fog} را بدست آورید.	۱
۴	معادله مثلثاتی $\cos 2x-\cos x+1=0$ را حل کنید.	۱
۵	برای نمودار زیر ضابطه $y=a\cos bx+c$ را بنویسید.  	۱
۶	هر یک از حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x+7}{9x^2+7x+1}$ ب) $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x-1}{(x-3)^2}$ ج) $\lim\limits_{x\to-\infty}9x^2+7x+1$ د) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2\sin x-1}{\cos x}$	۳
۷	اگر $f'(3)=7,\ f(3)=8,\ g(3)=10$ در این صورت حاصل $\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)g(x)-8g(x)}{x-3}$ را بدست آورید.	۱/۲۵
۸	مشتق هر یک از توابع زیر را محاسبه کنید. الف) $f(x)=(8x+1)^2(\sqrt{x})$ ب) $f(x)=9(10x^3+1)^7$ ج) $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{2x^2+1}$	۲/۲۵
۹	معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=2t^2+t+4$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0,4]$ داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای ۲ برابر سرعت متوسط در بازه $[0,4]$ می باشد.	۱/۵
۱۰	برای تابع $f(x)=x^3+3x^2-9x+10$ با رسم جدول تغییرات، نقاط اکسترمم نسبی را در صورت وجود مشخص کنید.	۱/۵
۱۱	در یک بیضی مجموع فاصله های هر نقطه روی آن از دو کانون برابر با ۲۴ می باشد. اگر طول قطر کوچک بیضی برابر با $10\sqrt{3}$ باشد فاصله کانونی و خروج از مرکز این بیضی را بدست آورید.	۱/۵
۱۲	وضعیت خط $4x+3y-1=0$ و دایره معادله $x^2+y^2+2x+4y=0$ را مشخص کنید.	۱/۵
۱۳	یک سکه را پرتاب می کنیم اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می کنیم. احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو بیاید چقدر است؟	۱/۵
	موفق و سربلند باشید جمع نمرات	۲۰

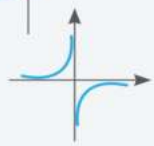
فصل اول درس اول

۱- الف) درست

ب) نادرست در درسنامه آمده است.



پ) درست: به نمودار آن در کل $\mathbb{R}$ دقت کنید.

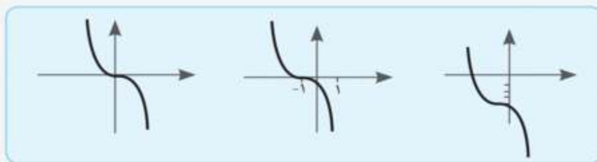


ت) نادرست : کافیست نمودار زیر را در نظر بگیرید.

ث)نادرست: باید حتما تابع پیوسته باشد

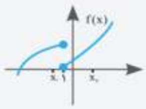
ج) درست چ)درست

۲- با انتقال نمودار را رسم می‌کنیم. ابتدا نمودار تابع $y=-x^{۳}$ را رسم می‌کنیم سپس روی محور x ها <u>۱</u> واحد به سمت چپ و در مرحله بعد، روی محور y ها <u>۴</u> واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

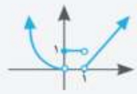


۳- الف) دربازه $(-\infty,۲)$ اکیداً صعودی، دربازه $(۲,+\infty)$ اکیداً صعودی.درکل $\mathbb{R}$ صعودی می‌باشد. چون درنقطه x=۲ و x=۳ عرض ها یکسان می‌باشند.

ب) دربازه $(-\infty,-۱]$ اکیداً صعودی، دربازه $[-۱,+\infty)$ اکیداً صعودی. اما در کل $\mathbb{R}$ نه صعودی است و نه نزولی به شکل توجه کنید.



$$x_{۲}>x_{۱}\ ,\ f(x_{۲})<f(x_{۱})$$



ج) نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

در بازه $(-\infty,۰)$ اکیداً نزولی، در بازه $[۰,۱)$ تابع ثابت می‌باشد پس هم صعودی و هم نزولی است. در بازه $(۱,+\infty)$ اکیداًصعودی. در کل $\mathbb{R}$ <u>نه</u> صعودی <u>نه</u> نزولی

د) نمودار تابع را رسم می‌کنیم. $f(x)=x^{۲}|x|\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^{۳} & x\geq ۰\\ -x^{۳} & x<۰\end{cases}$

دربازه $(-\infty,۰)$ اکیداً نزولی. دربازه $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی. در کل $\mathbb{R}$ <u>نه</u> صعودی <u>نه</u> نزولی.

۴- با توجه به اینکه تابع f یک تابع صعودی است پس با افزایش مقادیر x، مقادیر y یا افزایش می یابد یا ثابت می‌ماند. در نتیجه داریم:

$$\begin{matrix}m-۱\geq ۱\\ m-۱\leq ۷-m\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}m\geq ۲\\ ۲m\leq ۸\rightarrow m\leq ۴\end{cases}\Rightarrow ۲\leq m\leq ۴$$

۵- چون تابع می‌خواهد در کل $\mathbb{R}$ صعودی باشد پس باید ضریب $x^{۲}$ صفر شود.

(نمی‌تواند سهمی باشد.) $a^{۲}-۴=۰\Rightarrow a^{۲}=۴\Rightarrow a=\pm ۲$

حال به ازای هر دو مقدار a تابع را بررسی می‌کنیم

$a=۲\rightarrow f(x)=۲x+۵$ صعودی

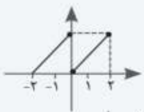
$a=-۲\rightarrow f(x)=-۲x+۵$ غ ق ق: نزولی

۶- طبق تعریف اکیدا نزولی است.

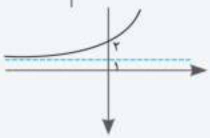
$$۵x+۲>۵-x$$

$$۶x>۳\Rightarrow x>\frac{۱}{۲}$$

۷- لازم به ذکر است که نمودار رسم شده منحصر به فرد نیست

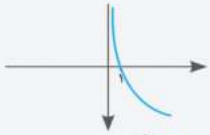


۸-



$y=۲^{x}+۱$

روی $\mathbb{R}$ اکیدا صعودی است



$y=-\log_{۲}^{x}$ روی $\mathbb{R}$ اکیدا نزولی است

۹-

$$f(x)=x^{۳}$$

$$g(x)=x|x|=\begin{cases}x^{۲} & x\geq ۰\\ -x^{۲} & x<۰\end{cases}$$