پیشگفتار

درود و ادب به تمامی دبیران و مدرسان گرامی و دانش آموزان دوست داشتنی و سخت‌کوش سراسر ایران پهناور
با توجه به تغییرات صورت گرفته در شرایط برگزاری کنکور سراسری و تاثیر سوابق تحصیلی در ورود به دانشگاه و موسسات آموزش عالی، بر آن شدیم تا منبعی مطمئن برای یادگیری و آموزش اثربخش و سنجش و ارزیابی هدفمند و موثر فراهم کرده و مسیر دانش آموزان عزیز را جهت کسب نمره (۲۰) در تمام امتحانات پیش رویشان هموار سازیم.

درباره کتاب

مجموعه کتاب‌های سیگنال ۲۰ خط سفید برای تمام دروس پایه دوازدهم در ۳ رشته تحصیلی علوم ریاضی و فیزیک، علوم تجربی و علوم انسانی به تالیف و گردآوری رسیده و شامل ٤ بخش اصلی می‌باشد.

۱. آموزش (درسنامه کاملا کاربردی)

محتوای تالیفی درسنامه ها شامل تمام مطالب آموزشی مهم و کاربردی و مفاهیم اساسی و نکات کلیدی کتاب درسی بوده که موجب تسهیل فرآیند یادگیری شده و امکان مرورهای سریع و مانا و همچنین جمع‌بندی‌های دوره‌ای را در طول سال تحصیلی فراهم می‌سازد.

۲. سنجش (سوالات امتحانات نهایی و احتمالی)

به منظور بالا بردن سطح توانایی و مهارت دانش‌آموزان پایه دوازدهم برای پاسخگویی کامل و درست به پرسش‌های امتحانات گوناگون و تقویت یادگیری، سوالاتی در تیپ و قالب های متنوع نهایی و تالیفی-احتمالی گردآوری و تالیف گردیده است؛ که با تمرین و تکرار مداوم این سوالات، امکان شناخت نقاط قوت و ضعف دانش‌آموزان را در درس‌های مختلف فراهم می‌سازد.

۳. نمونه سوال امتحان (امتحانات ۲۰ نمره‌ای نوبت اول و دوم – نهایی و احتمالی)

علاوه بر مجموعه سوالات طبقه بندی شده، ۲ نمونه امتحان تالیفی-احتمالی نوبت اول (دی ماه)، ۲ نمونه امتحان تالیفی-احتمالی نوبت دوم (خردادماه)، امتحان نهایی دوره های شهریور و دی ماه ۱۴۰۱ و امتحان نهایی دوره خرداد ماه ۱۴۰۲ برای بررسی و ارزیابی میزان یادگیری و ارتقاء هرچه بیشتر توانمندی دانش‌آموزان عزیز و کسب بهترین نتیجه فراهم شده است.

٤. پاسخنامه تشریحی آموزشی

پاسخنامه کاملا تشریحی و آموزشی سوالات در پایان کتاب برای تقویت یادگیری و کاهش حداکثری خطاها و اشتباهات احتمالی دانش‌آموزان آماده سازی شده است.

فهرست

سیگنال بگیر تا بیست برو!

بارم بندی

فصل	محدوده فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
۱	کل	۱۵	۵	۷
۲	تاصفحه٤۲	۵	۲	٦
	صفحه٤۲به‌بعد		۵	
۳	کل		۸	۷
جمع		۲۰	۲۰	۲۰

درس نامه

فصل اول
آشنایی با نظریه اعداد

درس اول: استدلال ریاضی

استدلال
استدلال یعنی ارائه دلیل برای اثبات درستی یک گزاره.

اثبات مستقیم
در اثبات مستقیم با استفاده از دنباله ای از داده ها مانند اصول، نتایج، قضیه‌ها و تعاریف، درستی حکم را ثابت می‌کنیم.

تذکر
استفاده از اثبات مستقیم گاهاً پیچیده و دشوار است. در این کتاب هدف ما اثبات‌های پیچیده و دشوار نیست.

مثال: ثابت کنید مجموع دو عدد فرد عددی زوج است.

اثبات: فرض کنید m ، n دو عدد فرد باشند در این صورت اعداد صحیح k و k' موجودند به طوری که:

$m = ۲k + ۱ \quad , \quad n = ۲k' + ۱$ لذا:

$$m + n = (۲k+۱) + (۲k'+۱) = ۲k + ۲k' + ۲ = ۲(k + k' + ۱)$$

بنابراین $m+n$ عددی زوج است.

مثال: اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشند آنگاه $۴k+۱$ مربع کامل است.

اثبات: چون k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی است لذا $n \in \mathbb{N}$ موجود است که: $k = n(n+۱) = n^۲ + n$

$$\Rightarrow ۴k+۱ = ۴(n^۲+n)+۱ = ۴n^۲+۴n+۱ = (۲n+۱)^۲$$

مثال نقض: مثالی است که با استفاده از آن می توان کلیت یک حکم غیرکلی را رد کرد.
می‌دانیم که هیچ‌گاه با استفاده از یک مثال نمی‌توان درستی یک حکم را اثبات کرد ولی از آن برای نشان دادن نادرستی یک حکم استفاده می‌کنیم.

مثال: هرگاه برای هر سه مجموعه A،B،C داشته باشیم $A \cap B = A \cap C$ آنگاه $B=C$.

این گزاره در حالت کلی درست نیست زیرا اگر:

$A = \{۱,۲\} \qquad B = \{۱,۲,۳\} \qquad C = \{۱,۲,۴\}$

آن‌گاه: $A \cap B = \{۱,۲\}$ و $A \cap C = \{۱,۲\}$

بنابراین با وجود این که $A \cap B = A \cap C$ ولی $B \neq C$.

مثال: اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند آن‌گاه: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

می‌دانیم در حالت کلی این گزاره درست نیست لذا اگر:

$x=۶۴ \quad , y=۳۶$

آنگاه: $\sqrt{۶۴+۳۶} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$

ولی $\sqrt{۶۴} + \sqrt{۳۶} = ۸ + ۶ = ۱۴$

پس در حالت کلی $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها (روش اشباع):
گاهی اوقات در اثبات یک گزاره با ارزش درستی، برای فرض حالت‌های مختلفی وجود دارد که می‌بایست با در نظر گرفتن همه این حالت‌ها درستی حکم را ثابت می‌کنیم.

مثال: ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی عددی زوج است.

اثبات: فرض کنیم x و y دو عدد صحیح متوالی باشند لذا برای عدد x دو حالت وجود دارد.

حالت الف: اگر x فرد باشد آن گاه y زوج است لذا xy زوج است.

حالت ب: اگر x زوج باشد آن گاه xy زوج است.

پس همواره xy عددی زوج است.

مثال: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، حاصل عبارت $n^۲ - ۵n + ۷$ عددی فرد است.

اثبات: چون n عددی طبیعی است پس دو حالت برای آن وجود دارد.

حالت الف: اگر n زوج باشد آنگاه $k \in \mathbb{Z}$ وجود دارد که $n=۲k$ پس:

$$n^۲ - ۵n + ۷ = (۲k)^۲ - ۵(۲k) + ۷ = ۴k^۲ - ۱۰k + ۷ =$$
$$۴k^۲ - ۱۰k + ۶ + ۱ = \underbrace{۲(۲k^۲ - ۵k + ۳)+۱}_{\text{فرد}}$$

حالت ب: اگر n فرد باشد آنگاه $k \in \mathbb{Z}$ موجود است که $n=۲k+۱$ پس:

$$n^۲ - ۵n + ۷ = (۲k+۱)^۲ - ۵(۲k+۱) + ۷ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ - ۱۰k - ۵ + ۷$$
$$= ۴k^۲ - ۶k + ۳ = ۴k^۲ - ۶k + ۲ + ۱$$
$$= ۲(۲k^۲ - ۳k + ۱) + ۱ \longrightarrow \text{فرد}$$

اثبات غیر مستقیم(برهان خلف):
دراین روش با فرض نادرستی حکم به نادرستی فرض می‌رسیم.

مثال: فرض کنید r عددی گویا و x عددی اصم (گنگ) باشد، ثابت کنید $r+x$ گنگ است.

اثبات به روش برهان خلف: فرض کنید $r+x$ عددی گنگ نباشد لذا گویا است.

از آنجایی که تفاضل دو عدد گویا عددی گویاست لذا: $(r+x) - r = x$ عددی گویاست که خلاف فرض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

گزاره‌های هم ارز:
دو گزاره که دارای ارزش یکسانی باشند را دو گزاره هم ارز می‌نامند.

هرگاه p و q دو گزاره باشند که $p \Rightarrow q \quad , \quad p \Rightarrow q$ دو گزاره درست باشند آن گاه $p \Leftrightarrow q$ یک گزاره درست است برعکس این مسئله نیز درست است. در این حالت p و q را هم ارز گوییم و می‌نویسیم $p \cong q$.

اثبات های بازگشتی:
در این روش برای اثبات یک گزاره کافی است گزاره را با گزاره ساده تری هم ارز کنیم و از درستی آن گزاره درستی گزاره اولیه را نتیجه بگیریم.

مثال: اگر $a \rangle ۰$ ثابت کنید. $a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲ + ۱ \geq ۲a$

$$\Leftrightarrow a^۲ - ۲a + ۱ \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-۱)^۲ \geq ۰$$

چون روابط بالا بازگشت پذیر است پس در مسیر برگشت حکم داده شده اثبات می‌شود.

مثال: ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

اثبات: اگر a و b دو عدد نامنفی باشند آنگاه $\frac{a+b}{۲}$ میانگین حسابی آنها و $\sqrt{ab}$ میانگین هندسی آنهاست.

در واقع باید ثابت کنیم: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab \ge 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab-4ab \ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$$

حال از بدیهی بودن درستی گزاره آخری درستی گزاره اولیه را نتیجه می گیریم.

مثال: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید.

$$a^2+b^2+ab \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2ab \ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+\left(a^2+2ab+b^2\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+(a+b)^2 \ge 0$$

حال از بدیهی بودن درستی گزاره آخری درستی گزاره اولیه را نتیجه میگیریم.

سؤالات امتحان نهایی و احتمالی فصل اول (درس اول)

۱- ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n، n^2-5n+7 عددی فردی است. (خرداد ۱۴۰۱)

۲- گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید. (دی ۱۴۰۱)

«برای هر دو عدد حقیقی x و y: $y^2+1 \ge -2x(y+x+1)$»

۳- a_1 ، a_2 ، a_3 اعداد صحیح هستند. b_1, b_2, b_3 همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است. (احتمالی)

۴- به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربعات آنهاست. (دی ۱۴۰۰)

۵- اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است. (دی ۹۹)

۶- برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ثابت کنید. $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+xz$ (شهریور ۹۸)

۷- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با دلیل مشخص کنید. (احتمالی)

الف) اگر k حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آن گاه $4k+1$ مربع کامل است.

ب) مجموع هر دو عدد فرد عددی زوج است.

ج) برای هر عدد طبیعی $n>1$ عدد 2^n-1 اول است.

د) مجموع هر دو عدد گنگ عددی گنگ است.

۸- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. (احتمالی)

الف) هیچ دو عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارد که $(x+y)^2 = x^2+y^2$.

ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=0$ آنگاه $a=0$ یا $b=0$.

ج) اگر $a,b \in \mathbb{R}$ باشند داریم: $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$

د) حاصلضرب هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

۹- گزاره درست را اثبات و گزاره نادرست را با ارائه مثال نقض رد کنید. (احتمالی)

الف) برای هر عدد طبیعی n عدد 2^n+1 اول است.

ب) مربع هر عدد فرد عددی فرد است.

۱۰- درستی گزاره های زیر را اثبات و یا نادرستی را با مثال نقض رد کنید. (احتمالی)

الف) اگر x عددی گنگ باشد آنگاه $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.

ب) اگر A و B و C سه مجموعه باشند که $A\cup B = A\cup C$ آنگاه $B=C$.

۱۱- به کمک رابطه بازگشتی درستی رابطه $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a} \ge a+b$ را ثابت کنید. (احتمالی)

$(a,b\in\mathbb{R}\ ,\ a>0,\ b>0)$

۱۲- درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل بیان کنید. (احتمالی)

الف)حاصل ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ عددی گنگ است.

ب) اگر a و b دو عدد گنگ ولی a+b گویا باشد آنگاه a-۲b گنگ است.

۱۳- ثابت کنید اگر a و b و c سه عدد حقیقی باشند آنگاه: $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۳\ge ۲(a+b+c)$ (احتمالی)

۱۴- ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی x و y: $x^{۲}+y^{۲}+۱\ge xy+x+y$ (احتمالی)

۱۵- اگر a و b دو عدد صحیح باشند که ab عددی فرد است. در این صورت $a^{۲}+b^{۲}$ عددی زوج است. (احتمالی)

۱۶- ثابت کنید در تقسیم مربع هر عدد بر ۴ باقی مانده برابر صفر یا یک است. (احتمالی)

۱۷- نشان دهید اگر $n^{۲}$ زوج باشد n نیز زوج است. (احتمالی)

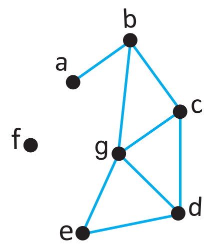
۱۸- ثابت کنید اگر n طبیعی و ۳n-۲ فرد باشد n هم فرد است. (احتمالی)

۱۹- اگر $a>۰$ باشد ثابت کنید $a+\frac{۱}{a}\ge ۲$. (احتمالی)

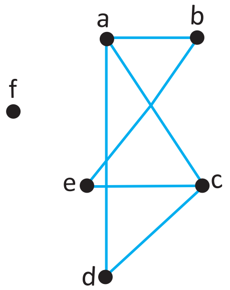
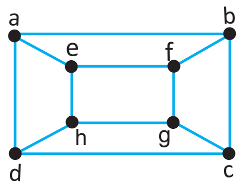
۲۰- اگر x,y دو عدد حقیقی هم علامت باشند، ثابت کنید: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge ۲$ (احتمالی)

امتحان شماره ۱	ریاضیات گسسته (پایه دوازدهم)	رشته: ریاضی فیزیک	امتحان احتمالی نوبت اول	زمان امتحان: ۸۰ دقیقه

ردیف		نمره
	۱- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر K حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $4K+1$ مربع کامل است. ب) هر دو عدد طبیعی متوالی نسبت به هم اولند. ج) گراف ۳-منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست. د) برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.	۱
	۲- اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد ثابت کنید $\alpha+2\beta$ گنگ است.	۱
	۳- برای هر عدد صحیح n ثابت کنید $n^2+11n+30$ همواره عددی زوج است.	۱/۵
	۴- اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند ثابت کنید. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$	۱
	۵- نادرستی روابط زیر را با ارائه مثال نقض نشان دهید. الف) برای هر عد حقیقی مثبت x داریم: $x^2 > \frac{1}{x}$ ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y رابطه $\vert x+y\vert < \vert x\vert + \vert y\vert$ همواره برقرار است.	۱/۵
	۶- اگر $a>1$ و $a \mid 9k+4$ و $a \mid 5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است.	۱
	۷- اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a+2$ باقی مانده تقسیم عدد a^2+b^2+3 را بر ۸ بیابید.	۱
	۸- باقی مانده تقسیم عدد $A=(1000)^{13}\times 12+10$ بر عدد ۷ را بیابید.	۱
	۹- معادله همنهشتی $3x \overset{7}{\equiv} 13$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بدست آورید.	۱
	۱۰- اگر سوم خرداد در یک سال پنج شنبه باشد، ۲۲بهمن در همان سال چه روزی از هفته است؟	۱
	۱۱- به چند طریق می‌توان کیسه‌ی ۱۳۱کیلویی را با وزنه‌های ۷ و ۵ کیلویی وزن کرد؟	۱
	۱۲- آیا از رابطه $a \mid b+c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت $a \mid b$ یا $a \mid c$ ؟ در صورت پاسخ منفی مثال نقض بیاورید.	۱
	۱۳- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $a \overset{m}{\equiv} b$ ثابت کنید $a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.	۱
	۱۴- اگر باقی مانده تقسیم a بر ۵ برابر ۳ باشد باقی مانده $2a^2+3a$ بر ۵ رابیابید.	۱
	۱۵- فرض کنید G گرافی ۴- منتظم و $\overline{G}$ گرافی ۵- منتظم باشد. اندازه G را بدست آورید.	۱
	۱۶- گراف K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف، مرتبه گراف و $\Delta(G)$ را مشخص کنید.	۱
	۱۷- باتوجه به گراف روبرو به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) یک مسیر به طول ۳ از a به d بنویسید. ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. پ) درجه راس a در گراف $\overline{G}$ را تعیین کنید. ت) آیا گراف G همبند است؟ چرا؟	۲
	موفق و سربلند باشید	جمع نمرات ۲۰



زمان امتحان: ۸۰ دقیقه	امتحان احتمالی نوبت دوم	رشته: ریاضی فیزیک	ریاضیات گسسته (پایه دوازدهم)	امتحان شماره ۳

ردیف	سؤال	نمره
	۱- درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. الف) اگر a, b اعداد حقیقی باشند آنگاه: $a > b \Rightarrow a^3 < b^3$ ب) مجموع هر دو عدد گنگ عددی گنگ است. پ) با ارقام ۳و۴و۵و۹ می توان ۱۲ عدد دو رقمی متمایز نوشت. (بدون تکرار ارقام) ت) گراف P_7 دارای دوری به طول ۷ است.	۱
	۲- جاهای خالی را کامل کنید. الف) معادله همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر .... ب) تعداد یال های گراف K_6 برابر است با .... پ) گراف G را همبند گویند هرگاه بین هر دو راس آن یک .... وجود داشته باشد. ت) حاصلضرب هر عدد گویا در عددی گنگ لزوما عددی گنگ	۱
	۳- اگر a, b دو عدد حقیقی باشند با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید: $a^2 + 1 \ge b(2-b)$	۱
	۴- اگر باقیمانده تقسیم اعداد a، b بر ۲۷ به ترتیب ۱۲ و ۱۳ باشد، باقیمانده تقسیم $(2a - 3b)$ بر ۲۷ را بدست آورید.	۱/۵
	۵- معادله $432x \overset{11}{\equiv} 79$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بدست آورید.	۱/۵
	۶- اگر ۲۹ خرداد یک سال دوشنبه باشد، ۲ اسفند همان سال چه روزی از هفته است؟	۱/۵
	۷- گراف G به صورت روبه رو رسم شده است.  الف) $\Delta(G), \delta(G)$ را مشخص کنید. ب) بیشترین درجه در مکمل گراف G چند است؟ پ) $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید. ت) آیا گراف G همبند است؟ چرا؟	۲
	۸- گراف کامل K_p دارای ۱۵ یال است. p را بیابید و گراف را رسم کنید.	۱/۲۵
	۹- الف) ثابت کنید هر مجموعه احاطه گر دلخواه غیر مینیمال را می توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کرد. ب) با رسم P_6 یک مجموعه احاطه گر مینیمال غیر مینیمم بنوسید.	۱/۵
	۱۰- تفاوت بین مجموعه احاطه گری می نیمال و مجموعه احاطه گری می نیمم چیست؟	۱
	۱۱- عدد احاطه گری گراف شکل زیر را با ارائه راه حل تعیین کنید.  	۱/۵
	۱۲- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ چه تعداد جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آنکه: $1 \le i \le 5\ ,\ x_i \ge 1$	۱/۲۵
	۱۳- هشت نفر به چند طریق می‌توانند در یک اتاق چهار نفره و دو اتاق دو نفره قرار بگیرند؟ الف) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید. ب) یک مربع لاتین چرخشی 4×4 بنویسید.	۰/۷۵
	۱۴- مجموعه اعداد $A = \{1, 2, \dots, 84\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیر مجموعه ۴۴ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۶ باشد.	۱/۵
	۱۵- به چند طریق می‌توان ۵ شاخه گل را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل یک شاخه گل داده باشیم؟	۱/۷۵
	موفق و سربلند باشید — جمع نمرات	۲۰

فصل اول درس اول

۱-

چون n زوج است پس عدد $k\in\mathbb{N}$ وجود دارد که n =۲k لذا :

$$n^۲-۵n+۷=(۲k)^۲-۵(۲k)+۷=۴k^۲-۱۰k+۷$$
$$=۴k^۲-۱۰k+۶+۱=۲(۲k^۲+۵k+۳)+۱$$

۲-

$$y^۲+۱\ge -۲xy-۲x^۲-۲x \Leftrightarrow ۲x^۲+y^۲+۲xy+۲x+۱\ge ۰$$
$$\Leftrightarrow x^۲+y^۲+۲xy+x^۲+۲x+۱\ge ۰$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^۲+(x+۱)^۲\ge ۰$$

از آنجایی که درستی گزاره پایانی بدیهی است پس گزاره اولیه درست است.

۳-

فرض خلف: فرض کنید $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ عددی فرد باشد
در این صورت هرسه عامل $a_۱-b_۱$ ، $a_۲-b_۲$ ، $a_۳-b_۳$ همگی فردند پس
حاصل جمع آنها نیز فرد است پس:
$(a_۱-b_۱)+(a_۲-b_۲)+(a_۳-b_۳)=۰$ فرد است که تناقض است.

۴-

فرض کنید x،y دو عدد حقیقی باشند در این صورت می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$xy\le \frac{x^۲+y^۲}{۲}$$
$$\Leftrightarrow x^۲+y^۲\ge ۲xy$$
$$\Leftrightarrow x^۲+y^۲-۲xy\ge ۰$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^۲\ge ۰$$

چون درستی گزاره پایانی بدیهی است نتیجه می‌گیریم گزاره اولیه درست است.

۵-

فرض خلف: فرض کنید $\alpha-\beta$ گویا باشد در این صورت $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=۲\alpha$
گویاست پس $\alpha=\frac{۲\alpha}{۲}$ گویاست که تناقض است.

۶-

$$x^۲+y^۲+z^۲\ge xy+yz+xz \Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲\ge ۲xy+۲yz+۲xz$$
$$\Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲-۲xy-۲yz-۲xz\ge ۰$$
$$\Leftrightarrow (x^۲+y^۲+z^۲-۲xy-۲yz-۲xz)+(x^۲+y^۲+z^۲)\ge ۰$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)^۲+(x^۲+y^۲+z^۲)\ge ۰$$

باتوجه به بدیهی بودن درستی گزاره آخری گزاره اولیه درست است.

۷-

الف) درست:

$$k=n(n+۱)=n^۲+n \Rightarrow ۴k+۱=۴(n^۲+n)+۱$$
$$\Rightarrow ۴k+۱=۴n^۲+۴n+۱=(۲n+۱)^۲$$

ب) درست:

$$n=۲k+۱\ ,\ m=۲k'+۱$$
$$m+n=(۲k+۱)+(۲k'+۱)=۲k+۲k'+۲=۲(k+k'+۱)$$

ج) نادرست: $n=۴ : ۲^n-۱=۲^۴-۱=۱۵=۳\times ۵$ (مثال نقض)

د) نادرست: $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ هر دو گنگ هستند ولی $\sqrt{۲}+(-\sqrt{۲})=۰$ گویاست
(مثال نقض)

۸-

الف) نادرست: اگر x=۰ و y=۱ باشد(مثال نقض).

ب) درست: اگر $a\neq ۰$ باشد آنگاه a وارون پذیر است پس $a^{-۱}\in\mathbb{R}$ موجود است
که $a^{-۱}.a=۱$ لذا

$$a^{-۱}(ab)=(a^{-۱}a)b=۱b=b=۰$$

ج) نادرست: اگر a=-۳ و b=۲ داریم $-۳<+۲$ ولی $(۲)^۲<(-۳)^۲$. (مثال نقض)

د) درست: فرض کنیم n عددی طبیعی باشد در این صورت برای n دو حالت داریم:

الف) n زوج است لذا $n(n+۱)(n+۲)$ بر ۲ بخش پذیر است.

ب) n فرد است لذا n+۱ زوج است پس $n(n+۱)(n+۲)$ بر ۲ بخش پذیر است.

پس حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر ۲ بخش پذیر است.

برای نشان دادن بخش پذیری بر ۳ ، سه حالت داریم:

حالت ۱) $n=۳k$ پس $n(n+۱)(n+۲)$ بر۳ بخش پذیر است.

حالت ۲) $n=۳k+۱$ پس $n+۲=۳(k+۱)$ لذا $n(n+۱)(n+۲)$ بر ۳ بخش پذیر است.

حالت ۳) $n=۳k+۲$ پس $n+۱=۳(k+۱)$ لذا $n(n+۱)(n+۲)$ بر ۳ بخش پذیر است.

بنابراین در حالت کلی حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی بر ۲ و ۳ یعنی بر ۶ بخش پذیر است.

۹-

الف) نادرست: اگر n =۳ باشد $۲^۳+۱=۸+۱=۹$ اول نیست. (مثال نقض)

ب) درست: چون n فرد است لذا n=۲k+۱ پس:

$$n^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۲(۲k^۲+۲k)+۱$$

۱۰-

اثبات:

الف) درست:اثبات برهان خلف:فرض کنید $\frac{۱}{x}$ گنگ نباشد پس گویاست لذا
معکوس آن یعنی x نیز گویاست. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

ب) نادرست: فرض کنید $A=\{۱,۲,۳\}$ ، $B=\{۲,۴\}$ ، $C=\{۱,۲,۴\}$ در این صورت
$A\cup B=A\cup C=\{۱,۲,۳,۴\}$ ولی $B\neq C$.

۱۱-

اثبات:

$$\frac{a^۲}{b}+\frac{b^۲}{a}\ge a+b \Leftrightarrow a^۳+b^۳\ge ab(a+b)$$
$$\Leftrightarrow \cancel{(a+b)}(a^۲-ab+b^۲)\ge ab\cancel{(a+b)}$$
$$\Leftrightarrow a^۲-۲ab+b^۲\ge ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^۲\ge ۰$$