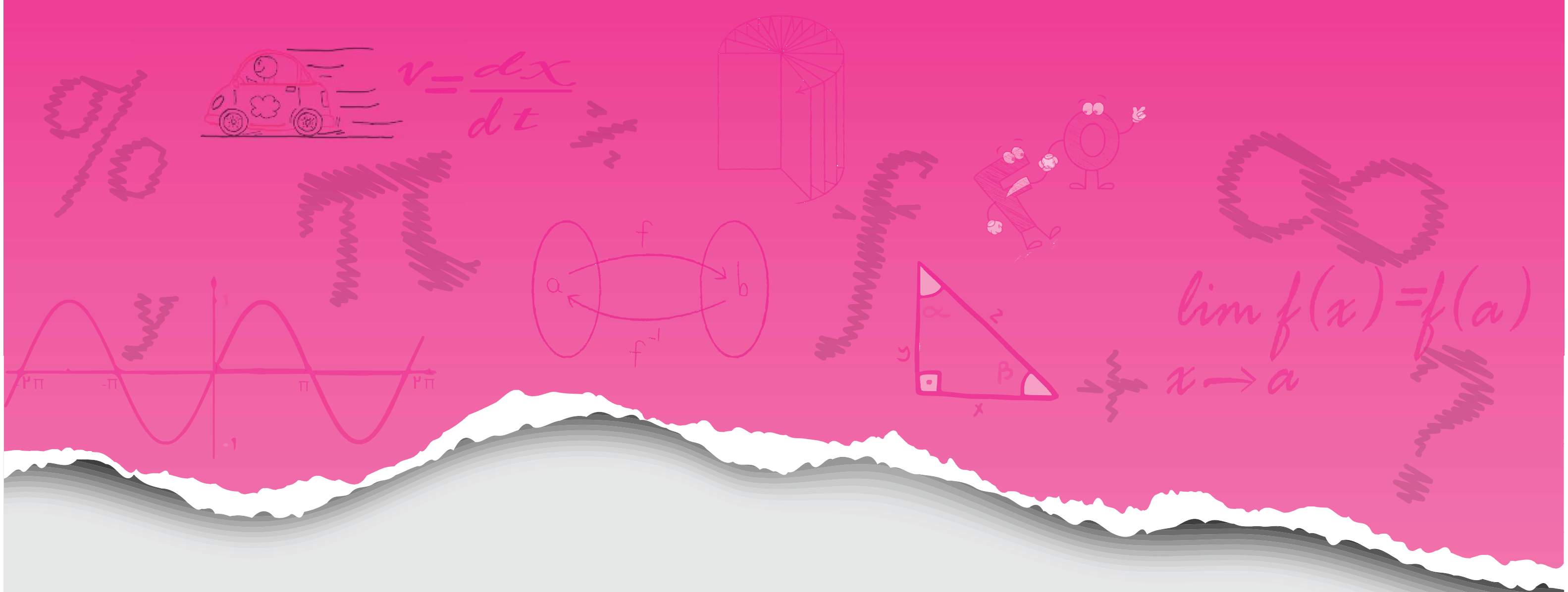


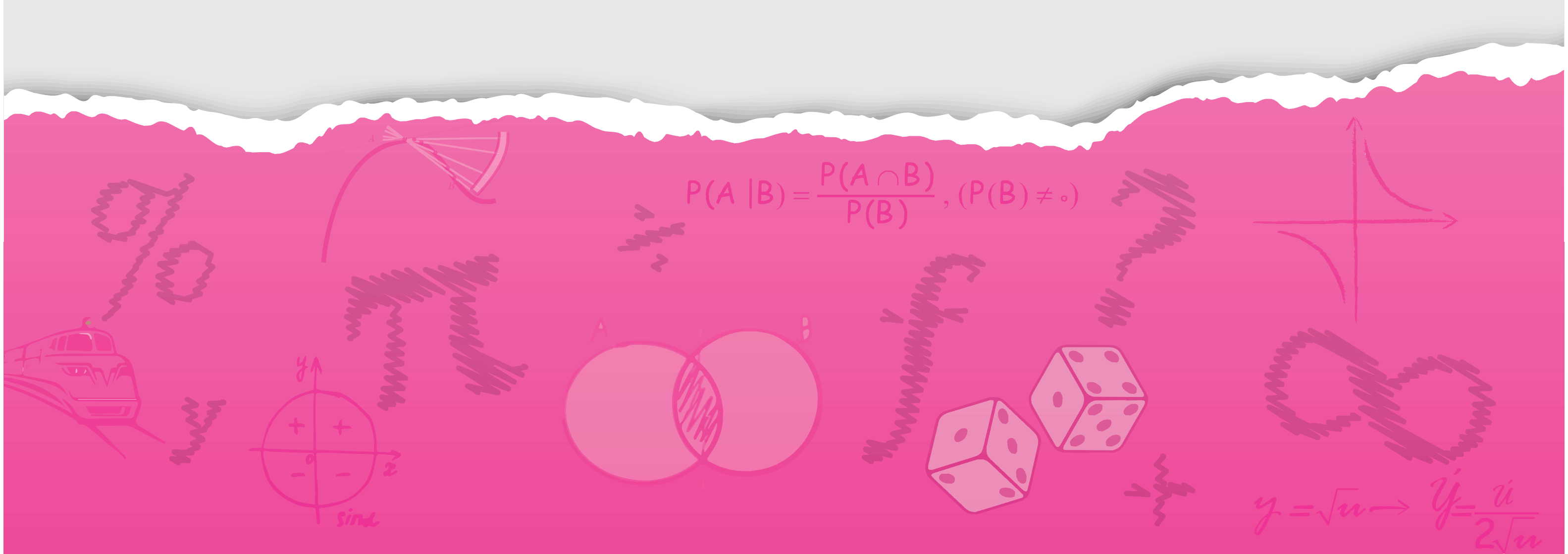
کلاس کنکور

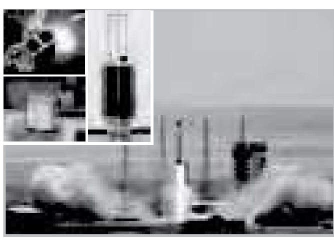
ریاضی ۳

دوازدهم

رشتهٔ علوم تجربی

نویسندگان: عباس نیکنام، کامیار علیون





فصل ۱
تابع
در یک نگاه

انتقال

۱ انواع انتقال

$f(x)+a$: نمودار $f(x)$، a واحد در راستای محور y جابجا می‌شه.
($a>0$: بالا، $a<0$: پایین)

$f(x+a)$: نمودار $f(x)$، a واحد در راستای محور x جابجا می‌شه.
($a>0$: چپ، $a<0$: راست)

$-f(x)$: قرینهٔ نمودار $f(x)$ نسبت به محور x.

$f(-x)$: قرینهٔ نمودار $f(x)$ نسبت به محور y.

$f(kx)$: طول نقاط $\frac{1}{|k|}$ برابر می‌شه. (اگه $k<0$ ابتدا مقدار مثبت اون رو درنظر گرفته و بعدش نسبت به محور y قرینه می‌کنیم)

$kf(x)$: عرض نقاط $|k|$ برابر می‌شه. (اگه $k<0$ ابتدا مقدار مثبت اون رو درنظر گرفته و بعدش نسبت به محور x قرینه می‌کنیم)

$|f(x)|$: قسمت‌های زیر محور x نسبت به اون قرینه می‌شه.

$f(|x|)$: قسمت‌های سمت چپ محور y به‌طور کامل حذف می‌شن و قسمت‌های سمت راست محور y، نسبت به اون قرینه می‌شن.

۲ برای تبدیل $f(x)$ به $kf(ax+b)+h$:

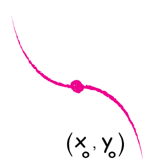
* برای اعمال تغییرات روی f ابتدا ضریب k رو اعمال کرده و بعدش میریم سراغ h.

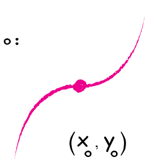
* برای اعمال تغییرات روی ورودی f یا همون x، ابتدا انتقال افقی b رو اعمال کرده و بعدش میریم سراغ a.

چند جمله‌ای‌ها

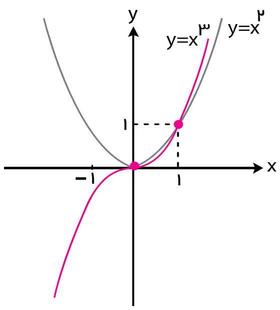
۱ عبارت $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ به شرطی که $n\in\mathbb{W}, a_i\in\mathbb{R}, a_n\neq 0$ یک چند جمله‌ای از درجهٔ n هست. خلاصه این‌که توان‌ها باید اعداد صحیح نامنفی باشن و ضرایب عدد حقیقی.

۲ در تابع $y=a(x-x_0)^3+y_0$ نقطهٔ (x_0,y_0) مرکز تقارن نموداره و با توجه به علامت a به‌صورت یکی از شکل‌های زیر هست:



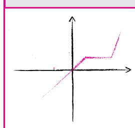
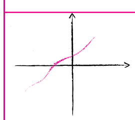
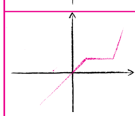
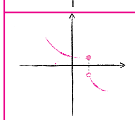


۳ نمودار تابع $y=x^2$ و $y=x^3$ در یک دستگاه مختصات:

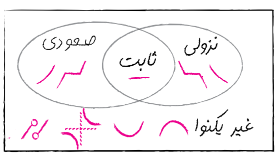


یکنوایی

۱ به جدول زیر دقت کن، تعاریف دقیق صعودی یا نزولی بودن رو می‌بینیم:

تابع	تعریف	ویژگی	تذکر	دید نموداری
صعودی	هرگاه با افزایش مقدار x، مقدار y ثابت بماند یا افزایش یابد.	$x_1>x_2$ $\Downarrow$ $f(x_1)\geq f(x_2)$	در توابع صعودی تابع می‌تواند در بازه‌ای ثابت باشد.	
اکیداً صعودی	هرگاه با افزایش مقدار x، مقدار y فقط افزایش یابد.	$x_1>x_2$ $\Downarrow$ $f(x_1)>f(x_2)$	-	
نزولی	هرگاه با افزایش مقدار x، مقدار y ثابت بماند یا کاهش یابد.	$x_1>x_2$ $\Downarrow$ $f(x_1)\leq f(x_2)$	در توابع نزولی تابع می‌تواند در بازه‌ای ثابت باشد.	
اکیداً نزولی	هرگاه با افزایش مقدار x، مقدار y فقط کاهش یابد.	$x_1>x_2$ $\Downarrow$ $f(x_1)<f(x_2)$	-	

۲ مجموعهٔ توابع با ویژگی‌های صعودی و نزولی بودن به چهار قسمت تقسیم می‌شن.



۳ در توابع درجهٔ دوم به فرم $y=ax^2+bx+c$:

اگه $a>0$: تابع بعد از رأس اکیداً صعودی و قبل از اون اکیداً نزولی است. (خوشحال)

اگه $a<0$: تابع بعد از رأس اکیداً نزولی و قبل اون اکیداً صعودی است. (ناراحت)

❹ برای تشخیص یکنوایی توابع در اعمال جبری و ترکیب می‌شه از جدول زیر کمک گرفت:

ص: صعودی ن: نزولی ×: مشخص نیست

f	g	$f+g$	$f-g$	fog	$f\times g$	f/g
ص	ص	ص	×	ص	×	×
ص	ن	×	ص	ن	×	×
ن	ص	×	ن	ن	×	×
ن	ن	ن	×	ص	×	×

ترکیب توابع

❶ در توابع $fog(x)$ یا همون $f(g(x))$ تابع g به‌عنوان ورودی تابع f قرار می‌گیره.

$$x \xrightarrow{\boxed{g}} g(x) \xrightarrow{\boxed{f}} f(g(x))$$

❷ دامنهٔ ترکیب توابع: $D_{fog}=\left\{x \middle| x\in D_g , g(x)\in D_f\right\}$

که واسه بدست آوردنش به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

گام ۱: دامنهٔ تابع درونی رو بدست میاریم.

گام ۲: دامنهٔ تابع بیرونی رو بدست میاریم و تابع درونی رو عضوش قرار می‌دیم.

گام ۳: اشتراک گام ۱ و ۲

* برای بدست آوردن دامنهٔ ترکیب تابع، همیشه باید قبل از بدست آوردن ضابطه، دامنه رو بدست بیاریم.

تابع معکوس

❶ به تابعی که به ازای هر خروجی، دقیقاً به یک ورودی متناظر باشه، تابع یک‌به‌یک می‌گن.

دقت کن در نمودار تابع یک‌به‌یک هر خط افقی (موازی محور xها) نمودار رو در حداکثر یک نقطه قطع می‌کنه.

❷ هر وقت جای ورودی و خروجی تابع f رو عوض کنیم، تابع وارون یا f^{-1} بدست میاد. درواقع: $(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$

* شرط وارون‌پذیری تابع f، یک‌به‌یک بودن اونه.

* دامنهٔ تابع f همون برد تابع f^{-1} و برد تابع f همون دامنهٔ تابع f^{-1} هست.

$$D_f=R_{f^{-1}} , R_f=D_{f^{-1}}$$

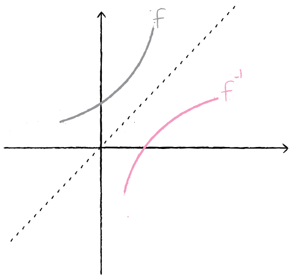
❸ برای دو تابع وارون‌پذیر f و g داریم: $(fog)^{-1}(x)=g^{-1}of^{-1}(x)$

❹ برای تابع وارون‌پذیر f داریم:

$$\begin{cases} fof^{-1}(x)=x , D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}} \\ f^{-1}of(x)=x , D_{f^{-1}of}=D_f \end{cases}$$

درواقع ترکیب هر تابع با وارونش، تابع همانی رو تولید می‌کنه.

❺ نمودار تابع f^{-1}، قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم یا همون خط $y=x$ هست.



❻ اگر تابع f اکیداً صعودی نباشه، تلاقی تابع f و f^{-1} فقط روی خط $y=x$ هست، پس می‌شه به‌جای حل معادله $f(x)=f^{-1}(x)$، معادلهٔ $f(x)=x$ رو حل کرد.

* دقت کن اگر f اکیداً صعودی نباشه، تلاقی f و f^{-1} الزاماً روی $y=x$ نیست.

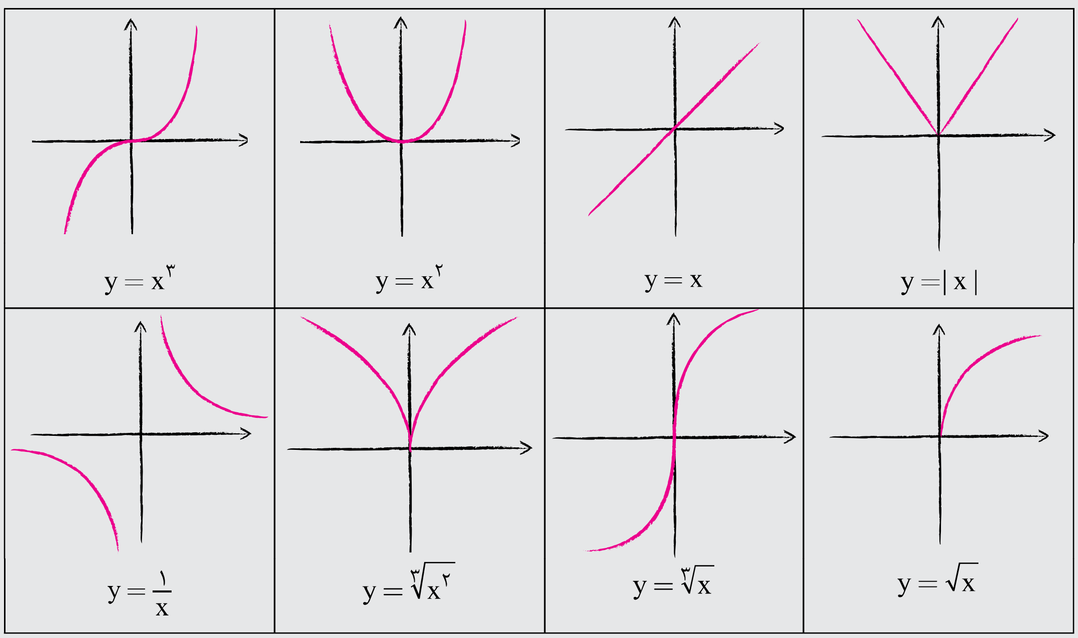
❼ در توابع هموگرافیک به فرم $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0 , ad-bc\neq 0)$ زمانی f و f^{-1} برهم منطبق هستن که: $a+d=0$

۱ تابع

قبل از این‌که وارد درس بشیم این توضیح لازمه که در بعضی از فصل‌ها به ویژه فصل یک، ترتیب دروس یه‌کم با ترتیب کتاب درسی فرق داره. چون فکر می‌کنیم شاید با این ترتیب یادگیری بهتر بتونی از پس تست‌ها بربیای بنابراین اگه آزمون آزمایشی‌ای میدی که براساس صفحات کتاب درسی پیش میره، بهتره یه نیم‌نگاهی به اسم درس‌ها بندازی.

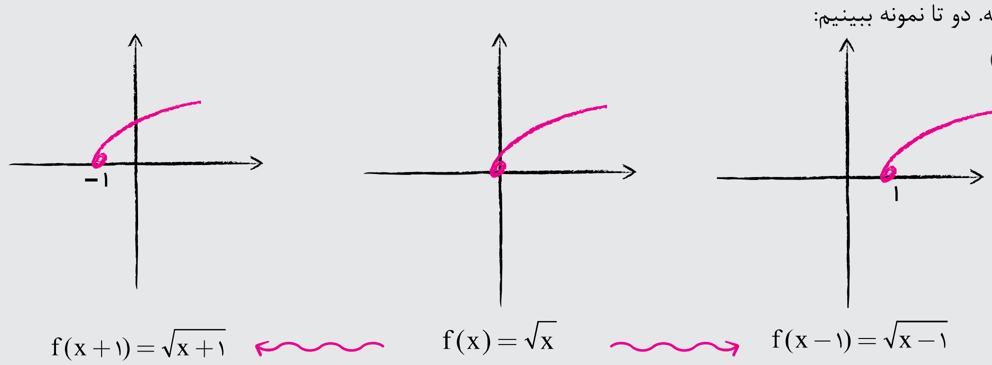
تبدیل نمودار تابع

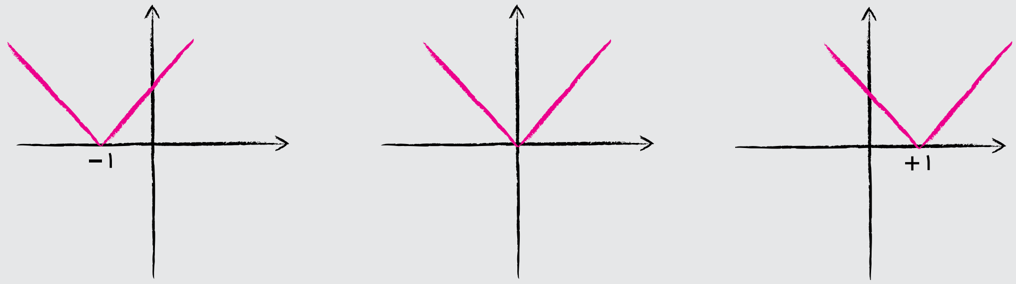
یادآوری نمودار توابع مهم (این نمودارها رو سال‌های قبل دیدی بجز نمودار $y=\sqrt[3]{x}$ و $y=\sqrt[3]{x^2}$ که امسال میبینی)



رسم نمودارهای $y=f(x+k)$ و $y=f(x)+k$

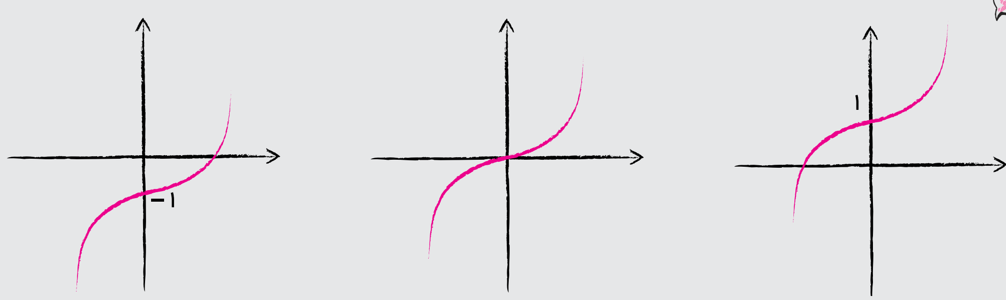
$f(x+k)$، انتقال افقی: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگه $k<0$ باشه، نمودار $y=f(x)$ رو $|k|$ واحد به سمت راست می‌بریم و اگه $k>0$ باشه، نمودار رو k واحد به سمت چپ می‌بریم. در این حالت برد، تغییر نمی‌کنه، ولی دامنه با $-k$ جمع می‌شه. دو تا نمونه ببینیم:



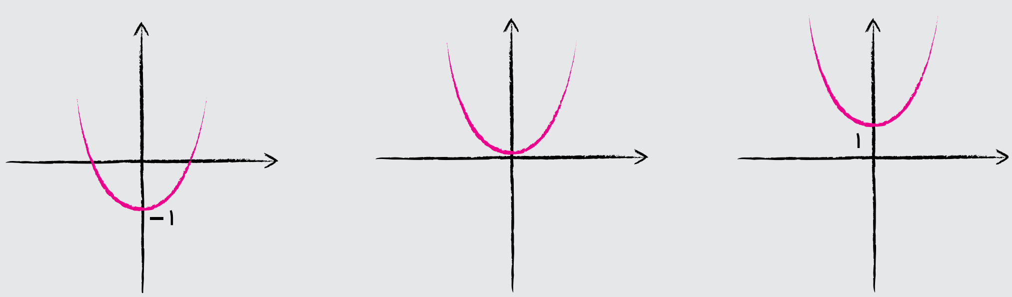


$f(x-1)=|x-1|$ ⟵ $f(x)=|x|$ ⟶ $f(x+1)=|x+1|$

$f(x)+k$، انتقال عمودی: برای رسم $y=f(x)+k$ اگه $k>0$ باشه، نمودار $y=f(x)$ رو k واحد به بالا می‌بریم و اگه $k<0$ باشه، نمودار رو $|k|$ واحد به پایین می‌بریم. دقت کنید در این حالت، دامنه تغییر نمی‌کنه، ولی برد با عدد k جمع می‌شه. دوتا نمونه ببینیم:



$y=f(x)+1=x^3+1$ ⟵ $f(x)=x^3$ ⟶ $y=f(x)-1=x^3-1$



$y=f(x)+1=x^2+1$ ⟵ $f(x)=x^2$ ⟶ $y=f(x)-1=x^2-1$

راستی یادته دیگه؟! اگه $f(x)$ به $f(-x)$ تبدیل می‌شد، نمودار نسبت به محور y، قرینه و اگه $f(x)$ به $-f(x)$ تبدیل می‌شد، نمودار نسبت به محور x، قرینه می‌شد.

مثال

نمودار تابع با ضابطه $f(x)=4x-x^2$ را در امتداد محور x ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم، فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبداءمختصات کدام است؟ (سراسری، ۱۴۰۱)

۱) ۱ ‏‏ ۲) ۲ ‏‏ ۳) $2\sqrt{5}$ ‏‏ ۴) $\sqrt{10}$

۴ وقتی می‌گه ۲ واحد در جهت منفی محورx یعنی به جای x در پرانتز عبارت $x+2$ رو قرار میدیم.

$$\Rightarrow y=4(x+2)-(x+2)^2 \Rightarrow y=4x+8-(x^2+4x+4) \quad \Rightarrow y=-x^2+4$$

حالا تلاقی این دو منحنی رو با برابر قرار دادن دو ضابطه به دست میاریم. $-x^2+4x=-x^2+4 \ \Rightarrow x=1$

حالا $x=1$ رو در یکی از ضابطه‌ها قرار میدیم تا y رو به دست بیاریم.

$y=4x-x^2=4(1)-(1)^2=3\Rightarrow$ نقطه تلاقی $(1,3)$

بنابراین فاصله از مبدأ مختصات یا همون نقطه $(0,0)$ برابر است با: $\sqrt{(1-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$

مثال

نمودار تابع $y=-x^2+2x+5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ (سراسری ، ۹۸)

۱) $(3,4)$ ‏‏ ۲) $(2,5)$ ‏‏ ۳) $(3,5)$ ‏‏ ۴) $(2,6)$

۱ خب بلاهایی که خواسته سرِ تابع $y=-x^2+2x+5$ درمیاریم:

۳ واحد به طرف x های مثبت ← یعنی به جای x تو یه پرانتز بذار $x-3$. $\Rightarrow y=-(x-3)^2+2(x-3)+5$

۲ واحد به طرفyهای منفی ← ۲ واحد از کل تابع کم کن. $y=-(x-3)^2+2(x-3)+5-2$

پس تابع جدید برابره با: $y=-(x^2-6x+9)+2x-6+5-2=-x^2+8x-12$

حالا واسه اینکه نمودار تابع جدید بالای نیمساز ربع اول یا همون $y=x$ باشه، کافیه نامعادلهٔ $-x^2+8x-12>x$ رو حل کنیم:

$$-x^2+8x-12-x>0\rightarrow -x^2+7x-12>0\xrightarrow[\text{جهت نامساوی برمی‌گردد}]{\times(-1)}x^2-7x+12<0\rightarrow (x-3)(x-4)<0$$

	۳		۴	
+		−		+

$\Rightarrow$ جواب: $3<x<4$

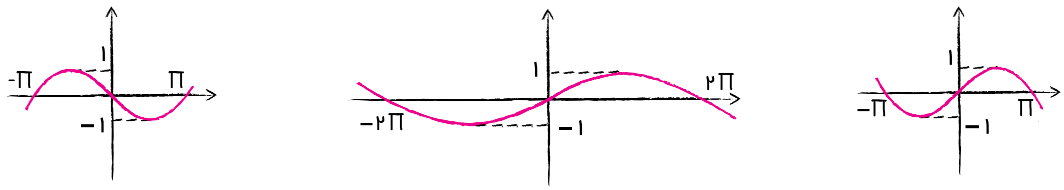
خب! حالا بریم سراغ بحث‌های مربوط به امسال

رسم نمودارهای $y=f(kx)$ و $y=kf(x)$

$f(kx)$، انقباض یا انبساط افقی:

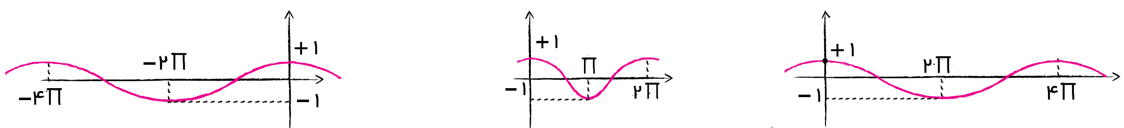
حالت اول، $|k|>1$: برای رسم $y=f(kx)$ اگه $k>1$ باشه، نمودار رو در جهت محور x ها $\frac{1}{k}$ برابر می‌کنیم و اگه $k<-1$ باشه، باید هم نمودار رو در جهت محور x ها $\frac{1}{|k|}$ برابر کنیم، هم نسبت به محور y ها قرینه کنیم (فرقی نداره اول کدوم کار رو انجام بدیم.)

به این کار میگن انقباض در جهت محور xها.



$y=f(-2x)=\sin(-2x)$ $\xleftarrow{k=-2}$ $f(x)=\sin x$ $\xrightarrow{k=2}$ $y=f(2x)=\sin 2x$

حالت دوم، $|k|<1$: برای رسم نمودار $y=f(kx)$ اگه $0<k<1$ باشه نمودار $y=f(x)$ رو در جهت محور xها $\frac{1}{k}$ برابری کنیم و اگه $-1<k<0$ باشه، باید هم نمودار رو در جهت محور xها $\frac{1}{|k|}$ برابر کنیم، هم نسبت به محور yها قرینه کنیم (بازم میگم تقدم و تأخر این دو عمل مهم نیست.) به این کار انبساط در جهت محور xها می‌گن. به نمونه ببینیم:

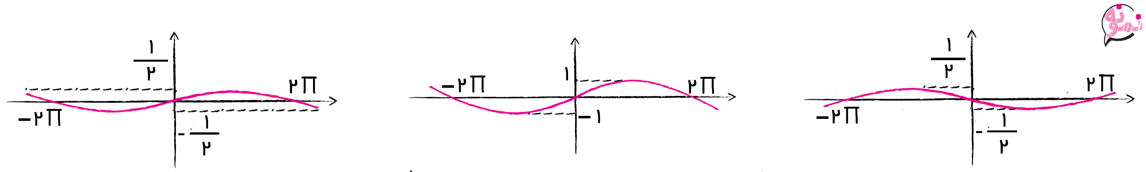


$y=\cos(-\frac{x}{2})$ $\xleftarrow{k=-\frac{1}{2}}$ $y=\cos x$ $\xrightarrow{k=\frac{1}{2}}$ $y=f(\frac{x}{2})=\cos(\frac{x}{2})$

دقت کنید در دو حالت اخیر برد تغییر نمی‌کنه، ولی دامنه $\frac{1}{k}$ برابر می‌شه.

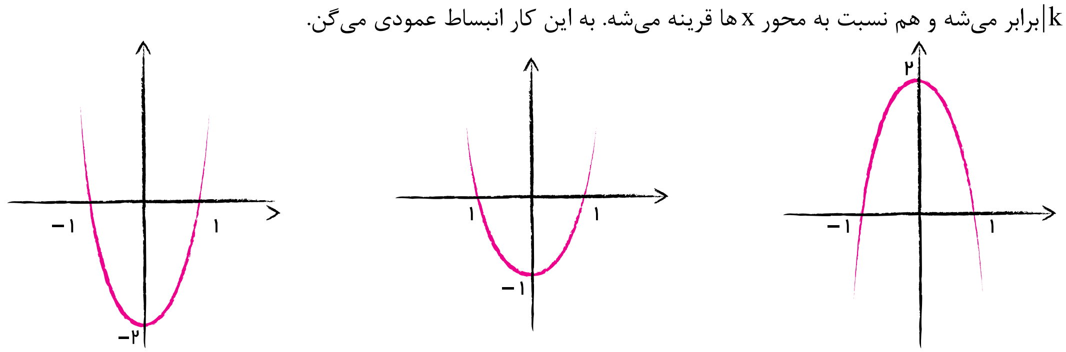
$kf(x)$، انبساط یا انقباض عمودی:

حالت اول، $|k|<1$: برای رسم نمودار $y=kf(x)$، اگه $0<k<1$ نمودار در جهت محور yها k برابر میشه و اگه $-1<k<0$ نمودار هم در راستای محور yها $|k|$ برابر می‌شه و هم نسبت به محور xها قرینه می‌شه. به این کار انقباض عمودی می‌گن.



$y=\frac{1}{2}\sin x$ $\xleftarrow{k=+\frac{1}{2}}$ $f(x)=\sin x$ $\xrightarrow{k=-\frac{1}{2}}$ $y=\frac{-1}{2}\sin x$

حالت دوم، $|k|>1$: در این حالت اگه $k>1$ نمودار در راستای محور yها k برابر میشه و اگه $k<-1$ باشد نمودار هم در راستای محور yها $|k|$ برابر می‌شه و هم نسبت به محور xها قرینه می‌شه. به این کار انبساط عمودی می‌گن.



$y=2f(x)=2(x^2-1)$ $\xleftarrow{k=+2}$ $f(x)=x^2-1$ $\xrightarrow{k=-2}$ $y=-2f(x)=-2(x^2-1)$

واسه اینکه یه جمع‌بندی کنیم و بهتر بفهمی چی شد به جدول زیر و مثال‌هاش دقت کن.

$y=f(x+۱)$	نمودار $y=f(x)$ رو یک واحد به چپ انتقال میدیم.
$y=f(x-۲)$	نمودار $y=f(x)$ رو دو واحد به راست انتقال میدیم.
$y=f(x)+۱$	نمودار $y=f(x)$ رو یک واحد به بالا انتقال میدیم.
$y=f(x)-۲$	نمودار $y=f(x)$ رو دو واحد به پایین انتقال میدیم.
$y=f(۲x)$	نمودار f رو در جهت محور x ها $\frac{۱}{۲}$ برابر می‌کنیم. (انقباض افقی)
$y=f(\frac{۱}{۳}x)$	نمودار f رو در جهت محور x ها ۳ برابر می‌کنیم. (انبساط افقی)
$y=f(-۳x)$	ابتدا نمودار رو نسبت به محور y قرینه می‌کنیم بعد در جهت محور x، $\frac{۱}{۳}$ برابر می‌کنیم. (انقباض افقی)
$y=۲f(x)$	نمودار f رو در جهت محور y ها دو برابر می‌کنیم. (انبساط عمودی)
$y=-\frac{۱}{۵}f(x)$	اول نمودار رو نسبت به محور x قرینه می‌کنیم، بعد در جهت محور y ها $\frac{۱}{۵}$ برابر می‌کنیم. (انقباض عمودی)

تمرین

نمودار کدام تابع از انقباض عمودی نمودار تابع f به دست می‌آید؟ *(قلمچی، ۹۹)*

۱) $y=f(\frac{x}{۳})$ ۲) $y=f(۳x)$ ۳) $y=۳f(x)$ ۴) $y=\frac{۱}{۳}f(x)$

۱ ۲ ۳ ۴

نکته اگه بخوایم نمودار $y=kf(ax+b)+h$ رو از روی نمودار $y=f(x)$ رسم کنیم، فرقی نداره اول به اعمال روی f بپردازیم بعد به اعمال روی x (یا همون ورودی f) یا برعکس.

خطر دقت کن: ❶ برای اعمال روی f ابتدا ضریب f (در اینجا یعنی k) و بعد از اون عددی که جمع یا تفریق میشه (در اینجا یعنی h) رو درنظر می‌گیریم.

❷ برای اعمال روی ورودی f یا همون x، اول عدد ثابتی که جمع یا تفریق میشه (در اینجا یعنی b) و بعد از اون ضریب x (در اینجا یعنی a) رو لحاظ می‌کنیم. در مثال زیر در مورد h,k,b,a بیشتر توضیح میدیم:

مثلاً برای رسیدن به تابع $y=۲f(\frac{x-۲}{۵})+۱$ از روی تابع $y=f(x)$ با توجه به این که $۲f(\frac{x-۲}{۵})+۱=۲f(\frac{۱}{۵}x-\frac{۲}{۵})+۱$ است، اول x رو به $x-\frac{۲}{۵}$ تبدیل می‌کنیم و بعد از اون x رو به $\frac{۱}{۵}x$.

$$f(x)\xrightarrow[(b)]{x\to x-\frac{۲}{۵}}f(x-\frac{۲}{۵})\xrightarrow[(a)]{x\to\frac{۱}{۵}x}f(\frac{۱}{۵}x-\frac{۲}{۵})$$

بعدش f رو در ۲ ضرب می‌کنیم و در آخر به علاوهٔ ۱ می‌کنیم.

$$f(\frac{۱}{۵}x-\frac{۲}{۵})\xrightarrow[(k)]{\times۲}۲f(\frac{۱}{۵}x-\frac{۲}{۵})\xrightarrow[(h)]{+۱}۲f(\frac{۱}{۵}x-\frac{۲}{۵})+۱$$

مراحل رسیدن از $f(x)$ به $3f(2x-1)+2$ را نشان داده و مشخص کنید در هر مرحله چه تغییری در نمودار ایجاد می‌شود؟

خب اول بریم سراغ f:

$$f \xrightarrow[\text{عرض نقاط ۳ برابر می‌شه}]{\times 3} 3f \xrightarrow[\text{به عرض نقاط ۲ واحد اضافه می‌شه.}]{+2} 3f+2$$

دیدی؟! طبق چیزی که گفتیم اول ضریب f (یعنی ۳) و بعدش عددی که جمع میشه (یعنی ۲) رو اعمال کردیم.

حالا بریم سراغ تغییرات x:

$$f(x) \xrightarrow[\text{طول نقاط ۱ واحد اضافه می‌شه}]{x \to x-1} f(x-1) \xrightarrow[\text{طول نقاط } \frac{1}{2} \text{ برابر می‌شه}]{x \to 2x} f(2x-1)$$

اگه دقت کرده باشی طبق چیزی که گفتیم این‌جا اول عددی که منها میشه (یعنی ۱−) و بعدش ضریب x (یعنی ۲) رو اعمال کردیم.

راستی! میشه که اول از ورودی f شروع کنیم و بعدش بریم سراغ خود f. یعنی می‌تونستیم اول یک واحد به سمت راست انتقال بدیم و در جهت محور xها $\frac{1}{2}$ برابر کنیم و بعد در جهت محور y، ۳ برابر کنیم و در آخر ۲ واحد به بالا انتقال بدیم.

مثال

اگر $f(x)=x^2-4x+3$ باشد، فاصلهٔ رأس‌های دو سهمی $f(x)$ و $g(x)=\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$ چقدر است؟ (گاج، ۹۹)

۱) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{17}}{6}$ ۴) $\frac{\sqrt{17}}{4}$

۱ ۲ ۳ ۴ اول رأس $f(x)=x^2-4x+3$ رو به‌دست میاریم:

$$x_s=-\frac{b}{2a}=\frac{-(-4)}{2(1)}=2 \to y_s=f(2)=4-8+3=-1 \Rightarrow \text{راس}:(2,-1)$$

حالا می‌دونیم برای تبدیل $f(x)$ به $\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$، باید مراحل زیر رو طی کنیم:

$$f(x) \xrightarrow[\text{عرض نقاط } \frac{1}{2} \text{ برابر}]{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{2}f(x) \xrightarrow[\text{طول نقاط دو برابر}]{x\to\frac{x}{2}} \frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$$

بنابراین در نمودار $g(x)=\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$ طول نقطهٔ $(2,-1)$ دو برابر و عرض اون $\frac{1}{2}$ برابر شده که حاصل نقطهٔ $(4,-\frac{1}{2})$ می‌شه.

حالا فاصلهٔ دو نقطه رو به‌دست میاریم:

$$\sqrt{(4-2)^2+(-1-(-\frac{1}{2}))^2}=\sqrt{\frac{17}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

مثال

علی برای رسم نمودار تابع $y=f(\frac{1}{2}x-4)$، به اشتباه ابتدا طول تمام نقاط روی نمودار تابع f را ۲ برابر می‌کند و سپس آن را ۴ واحد به سمت راست انتقال می‌دهد. او با کدام انتقال بر روی نمودار حاصل می‌تواند اشتباه خود را اصلاح کند؟ (قلمچی،۹۹)

۱) ۲ واحد به سمت راست ۲) ۴ واحد به سمت راست

۳) ۸ واحد به سمت راست ۴) ۲ واحد به سمت چپ

۱ ۲ ۳ ۴ فهمیدی علی چی کار کرده؟! همون چیزی رو که در خطر توضیح دادیم، سوتی داده! ترتیب رو رعایت نکرده. اول x رو به $\frac{1}{2}x$ تبدیل کرده و بعدش ۴ واحد رفته سمت راست. یعنی:

$$f(x) \xrightarrow{x\to\frac{1}{2}x} f(\frac{1}{2}x) \xrightarrow{x\to x-4} f(\frac{1}{2}(x-4))=f(\frac{1}{2}x-2)$$

خب حالا به کمک کدوم گزینه می‌تونیم $f(\frac{1}{2}x-2)$ رو به $f(\frac{1}{2}x-4)$ تبدیل کنیم؟

(گزینهٔ ۱) ۲ واحد راست:

$$f(\frac{1}{2}x-2) \xrightarrow{x\to x-2} f(\frac{1}{2}(x-2)-2)=f(\frac{1}{2}x-3)$$

(گزینهٔ ۲) ۴ واحد راست:

$$f(\frac{1}{2}x-2) \xrightarrow{x\to x-4} f(\frac{1}{2}(x-4)-2)=f(\frac{1}{2}x-4)$$

(گزینهٔ ۳) ۸ واحد است: $f(\frac{1}{2}x-2)\xrightarrow{x\to x-8}f(\frac{1}{2}(x-8)-2)=f(\frac{1}{2}x-6)$

(گزینهٔ ۴) ۲ واحد چپ: $f(\frac{1}{2}x-2)\xrightarrow{x\to x+2}f(\frac{1}{2}(x+2)-2)=f(\frac{1}{2}x-1)$

وقتی دیدیم گزینه ۲ جوابه دیگه بررسی بقیه لازم نبود ولی برای تمرین بقیه رو هم بررسی کردیم.

آقا کلاً راهِ راحت‌تر واسه حل این‌جور مسأله‌ها نداریم؟! نمی‌شه میون‌بُر زد؟ یعنی منظورم اینه راهی هست که دونه دونه مسیر انتقال نریم؟

چرا نمی‌شه! خوب حواستو جمع کن:

تکنیک **اولش به همین سادگی شروع می‌شه. اگه = ( ) f و = ( ) f باشه، اونوقت = و =**

یعنی: اولاً، داخل پرانتزها باید یکسان باشه و ثانیاً، جواب f ها هم باید یکی بشه.

آقا ما هیچی نفهمیدیم!!

بابا صبر کن یه کم!! من که هنوز چیزی نگفتم! تو مثال معنی همهٔ حرفای بالا رو می‌فهمی.

مثلاً اگر نقطهٔ $A(2,4)$ روی $g(x)=3f(2x-1)+1$ باشه، متناظر A روی تابع $h(x)=-2f(\frac{3-x}{2})+3$ چه نقطه‌ای است؟

یعنی بعد از انتقال و همهٔ بلاهایی که سر g و x میاد تا به h تبدیل شه، مختصات A به چی تبدیل می‌شه؟

به زبان ساده $x_A=2$ و $y_A=4$. پس اون‌ها را سرجاشون بذار، یعنی:

$y=3f(2x-1)+1\to 4=3f(2\times 2-1)+1\Rightarrow 1=f(3)$

خب پس تا این‌جای کار رسیدیم به اینکه $f(3)=1$ هست.

حالا طبق چیزی که گفتیم داخل پرانتز رابطهٔ جدید باید برابر همون عدد به دست اومدهٔ داخل پرانتز یعنی ۳ بشه و جواب f هم باید ۱ بشه (یعنی به جای f عدد یک رو قرار بدیم)؛ ببین چه‌جوری:

$y=-2\overset{=1}{\boxed{f(\underset{3}{\frac{3-x}{2}})}}+3$

$\frac{3-x}{2}=$ پرانتز جدید $=3\Rightarrow x=-3$

و به جای f یک می‌ذاریم تا y جدید رو به‌دست بیاریم.

$y=-2\times 1+3\Rightarrow y=1$

یعنی مختصات A' (تغییریافته A)، $(-3,1)$ می‌شه.

حالا دیگه هر انتقال یا انبساط و انقباض رو با همین روش بررسی کن.

مثال

اگر نقطهٔ (a,b) روی نمودار تابع $y=1+f(1+x)$ قرار داشته باشد، کدام‌یک از نقاط زیر حتماً روی نمودار تابع $y=1-f(1-x)$ قرار دارد؟ *(گزینه دو، ۹۷)*

۱) $(-a,-b)$
۲) $(2-a,-b)$
۳) $(2-a,2-b)$
۴) $(-a,2-b)$

۱ ۲ ۳ ۴

اگر (a,b) مختصات نقطهٔ A باشد، $x_A=a$ و $y_A=b$ است. پس کافیه به جای x، a و به جای y، b رو در رابطهٔ $y=1+f(1+x)$ قرار بدیم:

$y=1+f(1+x)\to b=1+f(a+1)\Rightarrow f(a+1)=b-1$

حالا کافیه در رابطهٔ جدید یعنی $y=۱-f(۱-x)$ داخل پرانتز رو برابر با $a+۱$ و مقدار f رو $b-۱$ بذاریم:

$$y=۱-\overbrace{\boxed{f(\underbrace{۱-x}_{a+۱})}}^{=b-۱}$$

بنابراین:

$$۱-x=a+۱\Rightarrow x=-a \quad \text{و} \quad y=۱-(b-۱)=۲-b$$

پس نقطهٔ انتقال‌یافته به مختصات $(-a,۲-b)$ هست.

تمرین

نقطهٔ $A(a,b)$ روی تابع $y=۲f(x-۱)+۱$ با نقطهٔ $B(۱,۷)$ روی تابع $y=-f(۲x)+۳$ متناظر است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۱ ۲ ۳ ۴ راهنمایی: با انجام کارهای مثال‌های قبل، نقطهٔ $A(a,b)$ به نقطه $B(\frac{a-۱}{۲},\frac{-b+۷}{۲})$ یا همون $(۱,۷)$ تبدیل میشه.

مثال

در تابع $y=۲f(۳x+۱)$ دامنه $(-۴,۵]$ و برد $[۰,۴)$ می‌باشد. دامنه و برد تابع $y=f(۲x-۱)-۱$ را بیابید.

اول دامنه؛

مگه میشه با تکنیک گفته شده، مسائل دامنه رو هم حل کرد؟

چرا نشه، فقط باید حواستو جمع کنی.

اول جواب من رو بده. اینجا وقتی میگه دامنه $y=۲f(۳x+۱)$، $(-۴,۵]$ هست. منظورش چیه؟! بله! یعنی محدودهٔ تغییرات x رو داده، نه محدودهٔ تغییرات $۳x+۱$. پس تو باید طبق قرارمون اول داخل پرانتز رو بسازی:

$$-۴<x\le ۵\to -۱۲<۳x\le ۱۵\to -۱۱<۳x+۱\le ۱۶$$

حالا که محدودهٔ عبارت داخل پرانتز رابطهٔ قدیم رو به‌دست آوردیم، داخل پرانتز تابع جدید یعنی $y=f(۲x-۱)-۱$ رو در همون بازه قرار میدیم تا محدودهٔ x یا همون دامنهٔ جدید رو حساب کنیم:

پرانتزجدید

$$-۱۱<۲x-۱\le ۱۶\Rightarrow -۱۰<۲x\le ۱۷\to -۵<x\le \frac{۱۷}{۲}\Rightarrow \text{دامنه جدید}:(-۵,\frac{۱۷}{۲}]$$

حالا برد:

اول محدودهٔ تغییرات f رو به کمک برد رابطهٔ قدیم به‌دست میاریم:

(حواست باشه کاری به داخل پرانتز نداریم، اون واسه دامنه مهمه)

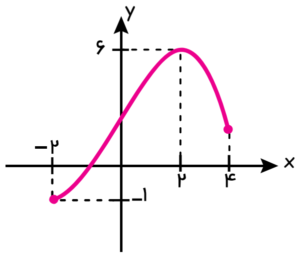
$$۰\le y<۴\to ۰\le ۲f<۴\to ۰\le f<۲$$

حالا به کمک محدودهٔ به‌دست اومده واسهٔ f میریم سراغ تابع جدید:

$$۰\le f<۲\to -۱\le f-۱<۱\Rightarrow \text{برد جدید}:[-۱,۱)$$

مثال

اگر تمام نمودار تابع $y=\frac{1}{۳}f(۴x+۲)-۵$ به‌صورت روبه‌رو باشد، دامنهٔ تابع $y=۱-f(\frac{۲x}{۳}+۱)$ شامل چند عدد صحیح است؟ (سنجش، ۹۹)



۱) ۳۶   ۲) ۳۵

۳) ۲۶   ۴) ۲۵

۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به شکل، دامنه یا همون حدود x در رابطهٔ $y=\frac{1}{۳}f(۴x+۲)-۵$، $[-۲,۴]$ هست؛ بنابراین ابتدا حدود داخل پرانتز رو می‌سازیم:

$$-۲\le x\le ۴\rightarrow -۸\le ۴x\le ۱۶\rightarrow -۶\le ۴x+۲\le ۱۸$$

پرانتز رابطه در محدودهٔ $[-۶,۱۸]$ هست؛ بنابراین پرانتز رابطهٔ جدید رو هم در همون محدوده قرار میدیم تا حدود x یا همون دامنهٔ رابطهٔ جدید رو حساب کنیم:

$$-۶\le \frac{۲x}{۳}+۱\le ۱۸\rightarrow -۷\le \frac{۲x}{۳}\le ۱۷$$

$$-۲۱\le ۲x\le ۵۱\Rightarrow \frac{-۲۱}{۲}\le x\le \frac{۵۱}{۲}:[-۱۰/۵,۲۵/۵]$$

شامل اعداد صحیح: $-۱۰,-۹,\dots,۲۵ \Rightarrow$ تعداد $=۲۵-(-۱۰)+۱=۳۶$

این جوری هم می‌تونی بگی ۱۰ تا منفی، ۲۵ تا مثبت و یکی هم صفر، روی هم ۳۶ عدد.

تمرین

اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $D_f=[-۱,۴]$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=-۳f(-\frac{x}{۲}+۲)$ شامل چند عدد طبیعی است؟ (قلمچی، ۹۹)

۱) ۱۱   ۲) ۱۰   ۳) ۵   ۴) ۶

۱ ۲ ۳ ۴ راهنمایی: منظور از تابع f، همون $f(x)$ هست که درون پرانتزش داره تو بازهٔ $[-۱,۴]$ تغییر می‌کنه، پس باید پرانتز جدید هم ....

تمرین

اگر دامنهٔ تابع $y=f(x+۲)+۴x-۱$ برابر $[-۲,۴]$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=f(۲x+۱)$ کدام است؟ (گزینه‌دو، ۱۴۰۰)

۱) $[\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲}]$ ۲) $[-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲}]$ ۳) $[-۴,۲]$ ۴) $[-\frac{۳}{۲},۱]$

۱ ۲ ۳ ۴

تکنیک **حالا یک تکنیک باحال دیگه؛ در انتقال توابع به‌جای اینکه کل تابع رو دنبال کنیم، می‌تونیم نقاط خاص اونو دنبال کنیم، در این صورت هر بلایی سر نقطهٔ خاص بیاد، همون بلا بر سر کل تابع میاد.**

یعنی چی؟

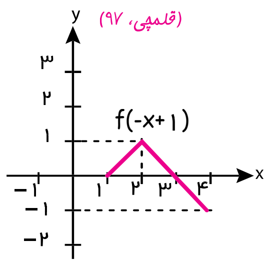
فرض کن تو با تمام بچه‌های کلاس به یک اردوی تفریحی بری و قرار نباشه در طول اردو اون‌ها رو ترک کنی. حالا من به‌جای اینکه همهٔ شما رو دنبال کنم، فقط خودتو دنبال می‌کنم. در این صورت هر کجا تو باشی و هر کجا تو بری اونا هم همراه تو خواهند بود. دقیقاً خودتو مثل یک نقطهٔ خاص و بقیهٔ بچه‌ها رو تمام نقاط تابع در نظر بگیریم. افتاد!؟

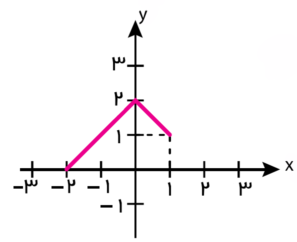
از این تکنیك جاهای دیگم میتونی استفاده کنی مثلاً تو بحث تابع معکوس.

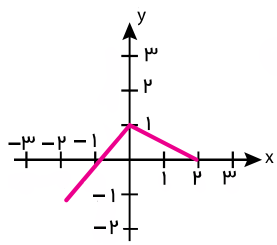
اونجا به جای این که کل تابع رو معکوس کنی میتونی فقط یك نقطه رو معکوس کنی، حالا صبرکن می‌بینی.

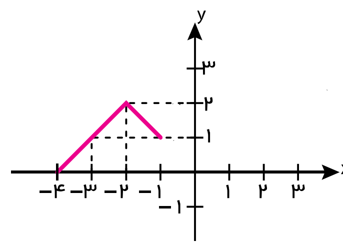
مثال

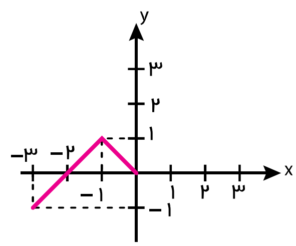
اگر نمودار تابع $y = f(-x+1)$ به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f(x+1)+1$ کدام است؟ (قلمچی، ۹۷)



۱)


۲)


۳)


۴)


۱ ۲ ۳ ۴

راه اول: نقطهٔ $(2,1)$ نقطه‌ای از $y=f(-x+1)$ رو در نظر بگیر. با جایگذاری $x=2$ و $y=1$ داریم: $1=f(-2+1) \Rightarrow 1=f(-1)$

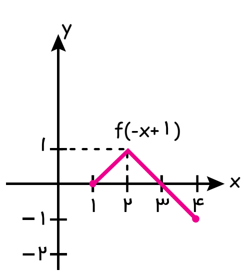
حالا باید داخل پرانتز تابع جدید رو مساوی -1 بذاریم و x رو به‌دست بیاریم و به‌جای f عدد ۱ رو بذاریم و y رو به‌دست بیاریم:

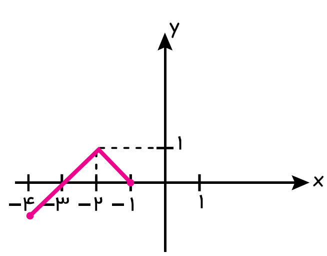
$$y=f(x+1)+1 \Rightarrow \begin{cases} x+1=-1 \Rightarrow x=-2 \\ y=1+1 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

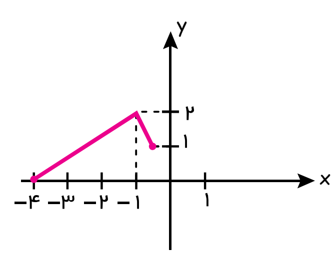
حالا باید دنبال گزینه‌ای بگردیم که نقطه $(-2,2)$ روی اون باشه یعنی گزینهٔ ۳. راستی اگه دو تا گزینه این نقطه رو داشت، نقطه رو عوض می‌کنیم. در ضمن دقت کنید $(2,1)$ نقطهٔ خاصی از تابع اولیه بود (ماکزیمم بود) حالا در این تابع هم یک نقطهٔ خاصه (بازم ماکزیممه).

راه دوم: مسیر انتقال $f(-x+1)$ به $f(x+1)+1$ رو تعیین می‌کنیم:

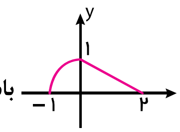
$$f(-x+1) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y]{x \to -x} f(x+1) \xrightarrow[\text{۱ واحد به سمت بالا}]{+1} f(x+1)+1$$

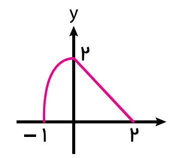
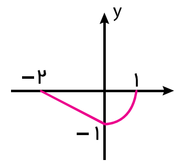
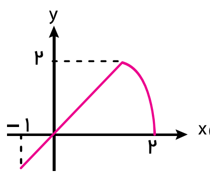
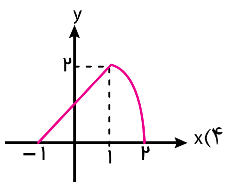






مثال

اگر نمودار تابع f به‌صورت  باشد، نمودار تابع $g(x)=۲f(۱-x)$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۴ ۳ ۲ ۱ راهنمایی: شاید لازم بشه دو تا نقطه رو دنبال کنی...

چند جمله‌ای

صورت کلی یک چندجمله‌ای درجه n به شکل زیر است:

$$\boxed{y=a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + a_{n-۲}x^{n-۲} + \ldots + a_۱ x + a_۰}$$

که در آن $a_n \neq ۰$ و a_nها اعداد حقیقی و n عدد صحیح نامنفی است.

کدام‌یک از توابع زیر چندجمله‌ای هستند؟

الف) $y=\sqrt{x}+۱$ ب) $y=۳x^۲+|x|+\sin x$

ج) $y=\dfrac{x^۴+x^۲}{۴}$ د) $y=\sqrt{۲}x+۱$

✗ الف) با توجه به اینکه توان x در $\sqrt{x}$ برابر با $\frac{۱}{۲}$ هست، طبق تعریف عدد صحیح نامنفی نیست، بنابراین چندجمله‌ای نیست.

✗ ب) عبارات شامل قدرمطلق و جزءصحیح و نسبت‌های مثلثاتی چندجمله‌ای نیستند.

✓ ج) با تفکیک تابع به‌صورت $y=\frac{۱}{۴}x^۴+\frac{۱}{۲}x^۲$ واضحه تابع چندجمله‌ای است.

✓ د) دقت کن ضرایب چندجمله‌ای می‌تونه اعداد حقیقی و غیرصحیح باشند، بنابراین تابع چندجمله‌ای است.

مثال

کدام‌یک از توابع زیر چندجمله‌ای نیست؟ (گاج، ۹۹)

۱) $f(x)=\sqrt{۲x}(x-۱)^۲-x$ ۲) $g(x)=\sqrt{۲x}(x+۱)^۳-x^۲$

۳) $h(x)=\dfrac{۴x^۲+۸x}{۷}+۱$ ۴) $k(x)=\sqrt{\pi}-(\sqrt{۲x}-۱)^۲$

۴ ۳ ۲ ۱ دقت کنید در گزینهٔ ۲، x زیر رادیکال است و می‌دانیم $\sqrt{x}$ چندجمله‌ای نیست.

در سال‌های قبل چند نوع از این توابع رو بررسی کردیم. امسال می‌خواهیم تابع درجه ۳ به فرم $f(x)=x^۳$ و انتقال یافته‌های اونو بررسی کنیم.

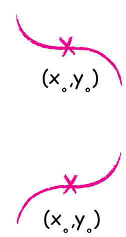
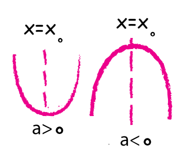
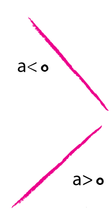
همون‌طور که ضابطهٔ تابع درجه ۲ $(f(x)=ax^۲+bx+c)$ رو می‌تونستیم به‌صورت $y=a(x-x_۰)^۲+y_۰$ نمایش بدیم که در اون $(x_۰,y_۰)$ مختصات رأس سهمی بود.

$$(y_۰=f(x_۰)=\frac{-\Delta}{۴a}\ ,\ x_۰=\frac{-b}{۲a})$$

تابع درجه ۳ که صورت کلی اون $y = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d$ هست رو در صورتی که از روی $y = x^{۳}$ ساخته شده باشد، می‌تونیم به شکل $y = a(x - x_{۰})^{۳} + y_{۰}$ نمایش بدیم که در اون $x_{۰} = \frac{-b}{۳a}$ و $y_{۰} = f(x_{۰})$ و نقطهٔ $(x_{۰}, y_{۰})$ مرکز تقارن تابع است. در این صورت اگه a مثبت باشد، نمودار به‌صورت (یه کم جلوتر می‌بینیم که صعودیه) است. و اگر a منفی باشد، نمودار به‌صورت است. (یه کم جلوتر می‌بینیم که این یکی نزولیه.) بنابراین:

نکته مرکز تقارن تابع درجه سوم: در تابع $f(x) = a(x - x_{۰})^{۳} + y_{۰}$، نقطهٔ $(x_{۰}, y_{۰})$ همون مرکز تقارن نمودار است.
حالا اگه این تابع را به‌صورت $f(x) = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d$ بازنویسی کنیم، $x_{۰}$ برابر با $\frac{-b}{۳a}$ خواهد بود.

در جدول زیر خلاصه‌ای از توابع درجه ۰، ۱، ۲ و ۳ رو آوردیم:

	تابع درجه ۳	تابع درجه ۲	تابع خطی	تابع ثابت
ضابطه	$y = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d$ $y = a(x - x_{۰})^{۳} + y_{۰}$	$y = ax^{۲} + bx + c$ $y = a(x - x_{۰})^{۲} + y_{۰}$	$y = ax + b$	$y = k$
نمودار	 مرکز تقارن $(x_{۰}, y_{۰})$ $x_{۰} = \frac{-b}{۳a}\ ,\ y_{۰} = f(\frac{-b}{۳a})$	 محور تقارن $x_{۰} = \frac{-b}{۲a}$ عرض رأس سهمی $y_{۰} = f(\frac{-b}{۲a}) = \frac{-\Delta}{۴a}$		

یادآوری برای رسم یا نوشتن ضابطهٔ تابع ثابت، داشتن یک نقطه از آن کافی است و برای رسم تابع خطی یا نوشتن ضابطهٔ تابع خطی، داشتن شیب و یک نقطه از آن یا داشتن دو نقطه از آن کافی است.
همین‌طور برای رسم یا داشتن ضابطهٔ تابع درجه ۲ ، داشتن سه نقطه یا داشتن مختصات رأس و یک نقطه از آن کافی است (به کتاب دهم و یازدهمت یه نگاهی بنداز).

حالا در مورد این تابع هم داشتن سه نقطه یا داشتن مرکز تقارن و یک نقطه برای رسم یا نوشتن ضابطه کفایت می‌کند.

تکنیک **برای رسم این نوع تابع درجهٔ ۳ مرکز تقارن و یک نقطهٔ دلخواه از تابع رو مشخص می‌کنیم و یکی از دو فرم یا رو با این دو نقطه مطابقت میدیم؛ البته فرم صعودیه، یعنی با زیاد شدن طول نقاط، عرض نقاط هم زیاد میشه و فرم نزولیه، یعنی با زیاد شدن طول نقاط، عرض اون‌ها کم می‌شه. دقت کن این روش برای توابع درجه ۳ به‌صورت $y = a(x - x_0)^3 + y_0$ هست.**

نمونه **تابع $f(x) = -2(x+1)^3 + 1$ را رسم کنید.**

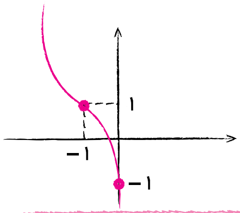
خب طبق چیزی که گفتیم، مختصات مرکز تقارن که طول اون برابر با ریشهٔ عبارت داخل پرانتز یعنی $x = -1$ هست رو به‌دست میاریم:

مرکز تقارن: $x = -1 \to y = 1 \Rightarrow (-1, 1)$

حالا مثلاً به ازای یک طول دلخواه مثل $x = 0$ مختصات یه نقطهٔ دیگه از تابع رو به‌دست میاریم:

$x = 0 \to y = -1 : (0, -1)$

حالا می‌خوایم نقطهٔ $(-1, 1)$ به‌عنوان مرکز تقارن رو به نقطهٔ $(0, -1)$ جوری وصل کنیم که یکی از شکل‌های یا تشکیل بشه، چه جوری؟ کدومش؟ بله دیگه شکلی که نزولیه امکان‌پذیره.



مثال

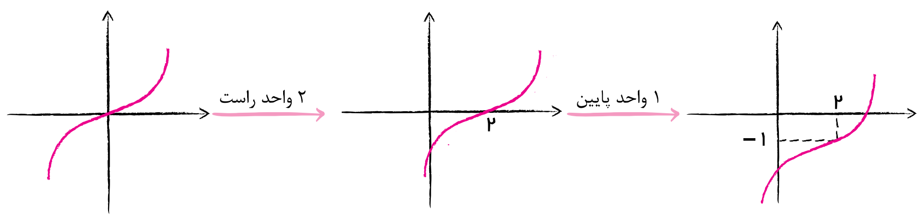
نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = -(2-x)^3 - 1$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟ (قلمچی، ۹۸)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

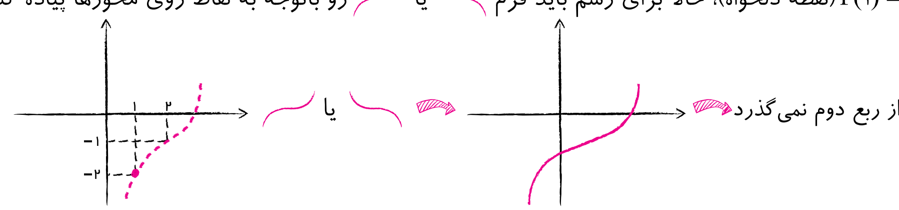
۴ راه اول:

$-(2-x)^3 - 1 = (x-2)^3 - 1$

کافیه نمودار $y = x^3$ رو اول ۲ واحد به راست سپس یک واحد به پایین انتقال بدیم.



راه دوم: برای رسم کافیه مرکز تقارن (ریشهٔ داخل پرانتز x_0 و $y_0 = f(x_0)$) و یک نقطهٔ دلخواه از تابع رو مشخص کنیم. مرکز تقارن $(2, -1)$ و $f(1) = -2$ (نقطهٔ دلخواه)، حالا برای رسم باید فرم یا رو باتوجه به نقاط روی محورها پیاده کنیم.



تمرین

نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x - 3x^2$ از کدام نواحی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟ (قلمچی،۹۹)

۱) اول و سوم ۲) اول و چهارم ۳) دوم و چهارم ۴) دوم و سوم

۳ راهنمایی: $x^3 - 3x^2 + 3x = (x-1)^3 + 1$